

I. CLASSIQUES

Exercice 1 – (Déterminer une loi) [CORRECTION P. 5]

On lance deux dés équilibrés et on note $\mathbb{X}$ la somme des deux résultats.

1. Déterminer $\mathbb{X}(\Omega)$.
2. Donner la loi de $\mathbb{X}$.
3. Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.

Exercice 2 – (Fonction de répartition) [CORRECTION P. 5]

Soit $\mathbb{X}$ définie par

x_i	-1	0	1	2
$\mathbf{P}([\mathbb{X} = x_i])$	0,2	0,3	0,1	0,4

Déterminer la fonction de répartition de $\mathbb{X}$.

Exercice 3 – (Loi uniforme) [CORRECTION P. 5]

Une variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, 8 \rrbracket$.

Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X})$.

Exercice 4 – (Loi de Bernoulli) [CORRECTION P. 5]

Soit $\mathbb{X} \sim \mathcal{B}(p)$.

Calculer $\mathbf{E}(3\mathbb{X} + 2)$ et $\mathbf{V}(3\mathbb{X} + 2)$.

Exercice 5 – (Calculs avec une loi binomiale) [CORRECTION P. 5]

On suppose que $\mathbb{X} \sim \mathcal{B}(5, 0,4)$.

Calculer

1. $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 2])$;
2. $\mathbf{P}([\mathbb{X} \geq 4])$;
3. $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X})$.

Exercice 6 – (Loi géométrique) [CORRECTION P. 6]

Une pièce donne « Pile » avec la probabilité 0,3.

On note $\mathbb{X}$ le rang du premier « Pile ».

1. Donner la loi de $\mathbb{X}$.
2. Calculer $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 4])$.

3. Calculer $\mathbf{P}([\mathbb{X} > 3])$.
4. Donner l'espérance de $\mathbb{X}$.

Exercice 7 – (Loi de Poisson) [CORRECTION P. 6]

Soit $\mathbb{X} \sim \mathcal{P}(2)$.

Calculer

1. $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 0])$;
2. $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 2])$;
3. $\mathbf{P}([\mathbb{X} \leq 2])$;
4. $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X})$.

II. CONCOURS

Exercice 8 – (Simulation Python et Loi Géométrique) [CORRECTION P. 6]

Soient $p \in]0, 1[$ et la fonction Python X ci-dessous :

```

1  import numpy.random as rd
2
3  def X(p):
4      k = 1
5      y = 0
6      a = rd.rand()
7      while a > p:
8          y = y + 1
9          k = k + 1
10         a = rd.rand()
11     while a < p:
12         k = k + 1
13         a = rd.rand()
14     return k - 1 - y

```

1. En s'aidant d'un lancer d'une pièce dont la probabilité d'obtenir "Pile" est p , interpréter ce que simule la fonction X .
2. Soit $\mathbb{X}$ la variable aléatoire simulée par la fonction ci-dessus.
 - a. Quelle est la loi de $\mathbb{X}$?
 - b. Quelle est l'espérance de $\mathbb{X}$ si elle existe ?

Exercice 9 – (Problème du collectionneur (Temps d'attente)) [CORRECTION P. 7]

On tire avec remise une boule d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 2$).

1. On note T la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, deux boules différentes ont été tirées. Déterminer la loi et l'espérance de T .

2. Interpréter la variable aléatoire V_n dont la fonction **Python** suivante calcule une simulation :

```

1  import numpy.random as rd
2
3  def V(n):
4      A = []
5      compteur = 0
6      while len(A) < n:
7          u = rd.randint(1, n + 1)
8          if not (u in A):
9              A.append(u)
10             compteur = compteur + 1
11     return compteur

```

Exercice 10 – (Loi définie par une relation de récurrence) [CORRECTION P. 7]

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire discrète telle que $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 4\mathbf{P}([\mathbb{X} = k + 2]) = 9\mathbf{P}([\mathbb{X} = k + 1]) - 2\mathbf{P}([\mathbb{X} = k])$$

1. Donner la loi de $\mathbb{X}$.
2. Justifier que $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance, puis les calculer.

Indication : On pourra remarquer que la variable $\mathbb{Y} = \mathbb{X} + 1$ suit une loi usuelle.

Exercice 11 – (Rang du premier Pile-Face) [CORRECTION P. 8]

Considérons une infinité de lancers mutuellement indépendants d'une pièce équilibrée. On note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire qui donne le rang d'apparition du premier "Pile-Face" (dans cet ordre, aux lancers $k - 1$ et k). Si une telle succession ne se produit pas, on pose $\mathbb{X} = 0$. Notons A_i l'événement « Un pile apparaît au i -ème lancer ».

1. En utilisant le SCE $(A_1, \overline{A_1})$, prouver que pour tout $k \geq 2$:

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = k + 1]) = \frac{1}{2}\mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) + \frac{1}{2^{k+1}}$$

2. En déduire $\mathbf{P}([\mathbb{X} = k])$ pour tout $k \geq 2$.
3. Préciser $\mathbf{P}([\mathbb{X} \geq 2])$ puis $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 0])$.
4. Justifier que $\mathbb{X}$ admet une espérance et la calculer.

Exercice 12 – (Transformations d'une loi de Poisson) [CORRECTION P. 8]

Soit $\mathbb{X} \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

1. Soit $\mathbb{Y} = (-1)^{\mathbb{X}}\mathbb{X}$. Est-ce que $\mathbb{Y}$ possède une espérance ? Si oui, la calculer.
2. Soit $\mathbb{Z}$ définie par :

- Si $\mathbb{X}$ prend une valeur paire, $\mathbb{Z} = \frac{\mathbb{X}}{2}$.
- Si $\mathbb{X}$ prend une valeur impaire, $\mathbb{Z} = 0$.

- Quelle relation a-t-on entre $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{Z}$?
- Est-ce que $\mathbb{Z}$ possède une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 13 – (Loi conditionnelle d’une somme de Binomiales) [CORRECTION P. 9]

Soient $\mathbb{X}_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathbb{X}_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ deux variables indépendantes.

- Rappeler la loi de $\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2$.
- Pour $n \in (\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2)(\Omega)$, préciser $\mathbf{P}_{[\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 = n]}(\mathbb{X}_1 = k)$.
- Exprimer à l’aide d’une somme $\mathbf{E}(\mathbb{X}_1 \mid [\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 = n])$.

Exercice 14 – (Processus de nœuds sur des Scoubidous) [CORRECTION P. 9]

Un sachet contient n bonbons Scoubidous. À chaque étape, on tire deux extrémités au hasard et on les noue. Soit $\mathbb{X}_n$ le nombre de ronds obtenus à la fin.

- Justifier que le processus s’arrête avec un sachet vide.
- Quelles sont les valeurs prises par $\mathbb{X}_n$? Préciser $\mathbf{P}(\mathbb{X}_n = 1)$ et $\mathbf{P}(\mathbb{X}_n = n)$.
- Justifier que $\mathbf{E}(\mathbb{X}_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$. En déduire que $\mathbf{E}(\mathbb{X}_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln n$.

CORRIGÉS

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

1. $\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket 2, 12 \rrbracket$.
2. On compte les couples donnant chaque somme.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$3. \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}{36} = 1.$$

Correction de l'exercice 2 : [ÉNONCÉ]

On calcule $F(x) = \mathbf{P}(\mathbb{X} \leq x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ 0,2 & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ 0,5 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0,6 & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 3 : [ÉNONCÉ]

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{1+8}{2} = \frac{9}{2}.$$

Pour une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Avec $n = 8$,

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{63}{12} = \frac{21}{4}.$$

Correction de l'exercice 4 : [ÉNONCÉ]

Pour une Bernoulli, $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = p$, $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = p(1-p)$.

Donc,

$$\boxed{\mathbf{E}(3\mathbb{X} + 2) = 3p + 2.} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbf{V}(3\mathbb{X} + 2) = 9p(1-p).}$$

Correction de l'exercice 5 : [ÉNONCÉ]

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} = 2) = \binom{5}{2} (0,4)^2 (0,6)^3 = 0,3456.$$

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} \geq 4) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = 4) + \mathbf{P}(\mathbb{X} = 5) = 5(0,4)^4 (0,6) + (0,4)^5 = 0,08704.$$

Enfin

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 2, \quad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = 1,2.}$$

Correction de l'exercice 6 : [ÉNONCÉ]

$$X \sim \mathcal{G}(0, 3).$$

Pour tout $k \geq 1$,

$$P([X = k]) = (0, 7)^{k-1} \times 0, 3.$$

Ainsi

$$P([X = 4]) = 0, 7^3 \times 0, 3 = 0, 1029.$$

Puis

$$P([X > 3]) = 0, 7^3 = 0, 343.$$

Enfin

$$E(X) = \frac{1}{0, 3} = \frac{10}{3}.$$

Correction de l'exercice 7 : [ÉNONCÉ]

$$P([X = 0]) = e^{-2}.$$

$$P([X = 2]) = e^{-2} \frac{2^2}{2!} = 2e^{-2}.$$

Donc

$$P([X \leq 2]) = e^{-2} (1 + 2 + 2) = 5e^{-2}.$$

Enfin

$$E(X) = 2, \quad V(X) = 2.$$

Correction de l'exercice 8 : [ÉNONCÉ]

- La commande `rd.rand()` simule un tirage uniforme sur $]0, 1[$. La condition $a > p$ correspond à l'obtention d'un "Face" (de probabilité $1 - p$), tandis que $a < p$ correspond à "Pile" (de probabilité p).

- La première boucle `while` compte le nombre d'échecs ("Face") consécutifs avant d'obtenir le premier "Pile". À la sortie de cette boucle, y représente le nombre de "Face" obtenus avant le premier "Pile".
- La deuxième boucle continue de lancer la pièce tant qu'on obtient des "Pile" consécutifs.
- Le résultat renvoyé est $k - 1 - y$. $k - 1$ représente le nombre total de lancers effectués jusqu'au premier "Face" survenu après la première série de "Pile". La quantité $(k - 1) - y$ correspond donc exactement au nombre de "Pile" consécutifs obtenus dans cette seconde phase.

- La seconde phase commence dès qu'un premier "Pile" est obtenu. À partir de ce moment, on compte le nombre de "Pile" consécutifs jusqu'au premier "Face". Le nombre de "Pile" obtenus suit une loi géométrique décalée de 1 (nombre d'essais pour obtenir le premier "Face", sachant que la probabilité de succès "Face" est $1 - p$). Ainsi, $X + 1 \sim \mathcal{G}(1 - p)$, ce qui signifie que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = k) = p^{k-1}(1 - p)$$

- Puisque $X + 1 \sim \mathcal{G}(1 - p)$, $X + 1$ admet une espérance égale à $\frac{1}{1 - p}$. Par linéarité de l'espérance :

$$E(X) = E(X + 1) - 1 = \frac{1}{1 - p} - 1 = \frac{p}{1 - p}$$

Correction de l'exercice 9 : [ÉNONCÉ]

1. Lors du 1er tirage, on obtient une certaine boule. Pour les tirages suivants, obtenir une boule différente de la première a une probabilité de $p = \frac{n-1}{n}$ à chaque tirage (indépendant des autres). La variable $T - 1$ compte le nombre de tirages supplémentaires nécessaires pour obtenir une boule différente. $T - 1$ suit donc une loi géométrique de paramètre $p = \frac{n-1}{n}$. Ainsi, $T(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \rrbracket$ et pour tout $k \geq 2$:

$$\mathbf{P}(T = k) = \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^{k-2} \frac{n-1}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} \frac{n-1}{n}$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}(T) = 1 + \mathbf{E}(T - 1) = 1 + \frac{1}{\frac{n-1}{n}} = 1 + \frac{n}{n-1} = \frac{2n-1}{n-1}$$

2. La liste A stocke les numéros distincts déjà obtenus. La boucle continue tant que la longueur de A est strictement inférieure à n , c'est-à-dire tant qu'on n'a pas obtenu la totalité des n numéros. La variable compteur renvoie le nombre total de tirages nécessaires pour obtenir les n numéros distincts. La fonction simule le classique ****problème du collectionneur****.

Correction de l'exercice 10 : [ÉNONCÉ]

1. Posons $u_k = \mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$. La suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 : $4u_{k+2} - 9u_{k+1} + 2u_k = 0$. L'équation caractéristique associée est $4r^2 - 9r + 2 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 81 - 32 = 49 = 7^2$. Les racines sont :

$$r_1 = \frac{9-7}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{9+7}{8} = 2$$

Il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \alpha \left(\frac{1}{4}\right)^k + \beta 2^k$. Comme la série $\sum u_k$ converge (somme des probabilités égale à 1), le terme général u_k doit tendre vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$. Donc $\beta = 0$. On a alors $\mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \alpha \left(\frac{1}{4}\right)^k$. Utilisons la condition de normalisation $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = 1$:

$$\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \alpha \cdot \frac{1}{1-1/4} = \frac{4}{3}\alpha = 1 \implies \alpha = \frac{3}{4}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^k$.

2. Posons $\mathbb{Y} = \mathbb{X} + 1$. Alors $\mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \geq 1$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{Y} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = k-1) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

On reconnaît la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{3}{4}\right)$. $\mathbb{Y}$ admet donc une espérance et une variance :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}, \quad \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \frac{1-3/4}{(3/4)^2} = \frac{1/4}{9/16} = \frac{4}{9}$$

Par propriété de l'espérance et de la variance par translation :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{Y}) - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \frac{4}{9}$$

Correction de l'exercice 11 : [ÉNONCÉ]

1. Par la formule des probabilités totales avec le SCE $(A_1, \overline{A_1})$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} = k + 1) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(\mathbb{X} = k + 1) + \mathbf{P}(\overline{A_1})\mathbf{P}_{\overline{A_1}}(\mathbb{X} = k + 1)$$

- Si $\overline{A_1}$ est réalisé (le premier lancer est Face), le premier lancer n'aide pas à former le motif "Pile-Face". Tout recommence à partir du 2e lancer. Donc $\mathbf{P}_{\overline{A_1}}(\mathbb{X} = k + 1) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$.
- Si A_1 est réalisé (premier lancer Pile), pour que $\mathbb{X} = k + 1$, il faut faire une série de $k - 1$ Pile consécutifs suivis d'un Face au lancer $k + 1$. Cet événement est $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}}$, de probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$.

$$\text{D'où : } \mathbf{P}(\mathbb{X} = k + 1) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(\mathbb{X} = k) + \frac{1}{2^{k+1}}.$$

2. Posons $u_k = \mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$ pour $k \geq 2$. On a $u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k + \frac{1}{2^{k+1}}$. En divisant par $\frac{1}{2^{k+1}}$, c'est-à-dire en multipliant par 2^{k+1} :

$$2^{k+1}u_{k+1} = 2^k u_k + 1$$

La suite $v_k = 2^k u_k$ est arithmétique de raison 1. Donc pour $k \geq 2$:

$$v_k = v_2 + (k - 2) \cdot 1$$

Pour $k = 2$, $[\mathbb{X} = 2] = A_1 \cap \overline{A_2}$, donc $u_2 = \mathbf{P}(\mathbb{X} = 2) = \frac{1}{4}$. Ainsi $v_2 = 2^2 \cdot \frac{1}{4} = 1$. On en déduit $v_k = 1 + k - 2 = k - 1$, d'où :

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \frac{k - 1}{2^k} \quad \text{pour tout } k \geq 2$$

3. Summons les probabilités pour $k \geq 2$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} \geq 2) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j}{2^{j+1}} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{+\infty} j \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$$

On reconnaît la somme d'une série géométrique dérivée de raison $1/2$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} \geq 2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1 - 1/2)^2} = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$$

Par conséquent, $\mathbf{P}(\mathbb{X} = 0) = 1 - \mathbf{P}(\mathbb{X} \geq 2) = 0$.

4. $\mathbb{X}$ admet une espérance si la série $\sum k\mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$ converge absolument :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \sum_{k=2}^{+\infty} k \frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$$

On reconnaît la série géométrique dérivée seconde en $x = 1/2$:

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{(1 - 1/2)^3} = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4$$

Correction de l'exercice 12 : [ÉNONCÉ]

1. Par le théorème de transfert, $\mathbb{Y}$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum |(-1)^k k| \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \sum k \mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$ converge, ce qui est le cas car $\mathbb{X}$ admet une espérance ($\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \lambda$).

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

En posant $j = k - 1$:

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = -\lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^j}{j!} = -\lambda e^{-\lambda} e^{-\lambda} = -\lambda e^{-2\lambda}$$

2. a. Observons les valeurs de $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$ selon la parité de $\mathbb{X}$:

— Si $\mathbb{X}$ est pair ($k = 2m$), $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$, donc $\mathbb{X} + \mathbb{Y} = 2\mathbb{X} \Rightarrow \frac{\mathbb{X} + \mathbb{Y}}{4} = \frac{\mathbb{X}}{2} = \mathbb{Z}$.

— Si $\mathbb{X}$ est impair ($k = 2m + 1$), $\mathbb{Y} = -\mathbb{X}$, donc $\mathbb{X} + \mathbb{Y} = 0 \Rightarrow \frac{\mathbb{X} + \mathbb{Y}}{4} = 0 = \mathbb{Z}$.

Ainsi, pour tout cas, $\mathbb{Z} = \frac{\mathbb{X} + \mathbb{Y}}{4}$.

- b. Par linéarité de l'espérance, puisque $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ admettent une espérance, $\mathbb{Z}$ admet aussi une espérance :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Z}) = \frac{\mathbf{E}(\mathbb{X}) + \mathbf{E}(\mathbb{Y})}{4} = \frac{\lambda - \lambda e^{-2\lambda}}{4} = \frac{\lambda(1 - e^{-2\lambda})}{4}$$

Correction de l'exercice 13 : [ÉNONCÉ]

- Par stabilité de la loi binomiale pour des paramètres p identiques et indépendants, $\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.
- Par la formule de Bayes :

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 = n]}(\mathbb{X}_1 = k) = \frac{\mathbf{P}(\mathbb{X}_1 = k \cap \mathbb{X}_2 = n - k)}{\mathbf{P}(\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 = n)} = \frac{\binom{n_1}{k} p^k (1-p)^{n_1-k} \binom{n_2}{n-k} p^{n-k} (1-p)^{n_2-(n-k)}}{\binom{n_1 + n_2}{n} p^n (1-p)^{n_1+n_2-n}}$$

Les termes en p et $(1-p)$ se simplifient intégralement :

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 = n]}(\mathbb{X}_1 = k) = \frac{\binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1 + n_2}{n}}$$

La loi conditionnelle de $\mathbb{X}_1$ sachant $[\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 = n]$ est une loi **hypergéométrique** $\mathcal{H}(n_1 + n_2, n_1, n)$.

- Puisque la loi conditionnelle est une loi hypergéométrique de paramètres $(n_1 + n_2, n_1, n)$, son espérance vaut :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}_1 \mid [\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 = n]) = n \frac{n_1}{n_1 + n_2}$$

Correction de l'exercice 14 : [ÉNONCÉ]

- À chaque étape, le nombre d'extrémités libres diminue exactement de 2 (passant de $2k$ à $2k - 2$). Le nombre total d'étapes est donc fini et égal à n .
- $\mathbb{X}_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

— $\mathbf{P}(\mathbb{X}_n = n)$: il faut créer un rond à chaque étape. Pour k brin(s) restant(s) ($2k$ extrémités), la probabilité de choisir deux extrémités d'un même brin est $\frac{k}{\binom{2k}{2}} = \frac{1}{2k-1}$. Ainsi

$$\mathbf{P}(\mathbb{X}_n = n) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{(2n-1)!!}.$$

— $\mathbf{P}(\mathbb{X}_n = 1)$: il faut ne former aucun rond jusqu'à la dernière étape, d'où

$$\mathbf{P}(\mathbb{X}_n = 1) = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{2k-1}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{2k-2}{2k-1}.$$

3. Par linéarité et récurrence, la probabilité de former un rond au moment où il reste k brins est $\frac{1}{2k-1}$. Ainsi $\mathbf{E}(\mathbb{X}_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$. Par comparaison série-intégrale :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \sim \int_1^n \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \ln n.$$