

TD 4

Couple de variables aléatoires discrètes

Exercice 1 – (Loi d'un couple, lois marginales)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 3])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{3}\right)$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Donner l'espérance et la variance de X et Y .

Exercice 2 – (Loi d'un couple, lois marginales, indépendance)

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $Y = X^2$.

La loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	-1	0	1	2
$\mathbf{P}([X = x_i])$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. Donner la loi du couple (X, Y) puis la loi de Y .
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 – (Loi d'un couple, lois marginales, indépendance)

La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par :

$\begin{array}{c} Y \\ \diagdown \\ X \end{array}$	0	1	2
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. Vérifier que l'on a bien défini la loi d'un couple, puis déterminer les lois marginales.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer $E(X)$ et $E(Y)$.

Exercice 4 – (Loi d'une variable aléatoire définie à partir d'un couple)

On considère la loi conjointe du couple (X, Y) de l'exercice précédent.

Déterminer la loi de :

1. $Z_1 = X + Y$
2. $Z_2 = XY$
3. $Z_3 = \text{Max}(X, Y)$
4. $Z_4 = \text{Min}(X, Y)$.

Exercice 5 – (Loi d'un couple, lois marginales, indépendance)

1. Un dé B porte les nombres $-2, -1, 0, 1, 2, 3$. Ce dé n'est pas équilibré.

Les probabilités d'apparition de chaque face forment une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Quelles sont ces probabilités ?

Un dé A parfaitement équilibré porte les nombres 1 sur 4 faces et -2 sur les autres faces.

Soit X la variable aléatoire qui à un lancer du dé A associe le nombre obtenu.

On lance une fois simultanément les deux dés A et B et on désigne par S la variable aléatoire qui au lancer des deux dés associe la valeur absolue de la somme des nombres obtenus.

2.
 - a. Déterminer la loi du couple (X, S) .
 - b. Quelle est la loi marginale de S ?
 - c. X et S sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 – (Loi d'un couple, lois marginales, tirage sans remise)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne contient une boule blanche, une boule verte et $n - 2$ boules rouges numérotées de 1 à $n - 2$. Ces boules sont indiscernables au toucher.

On tire successivement et sans remise les N boules de l'urne.

On note X_1 la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule blanche et X_2 la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule verte.

1. $\forall (i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, montrer que $\mathbf{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \begin{cases} \frac{1}{n(n-1)} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$
2. Déterminer les lois marginales des variables aléatoires X_1 et X_2 .

Exercice 7 – (Famille définissant une loi conjointe)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi jointe :

$$\mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{2^{i+1}j!}.$$

1. Déterminer le réel a .
2.
 - a. Montrer que $X + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
 - b. En déduire l'espérance et la variance de X .
3.
 - a. Déterminer la loi de Y .
 - b. Déterminer l'espérance et la variance de Y .
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$.

Exercice 8 – (Loi d'une somme)

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n .

On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac.

On note T_1 le numéro du premier jeton tiré et T_2 le numéro du deuxième jeton tiré.

1. Déterminer la loi de T_1 .
2. Déterminer la loi du couple (T_1, T_2) .
3. En déduire la loi de T_2 .
4. Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont-elles indépendantes ?
5. Déterminer $\mathbf{E}(T_1 + T_2)$.

Exercice 9 – (Loi d'un min et d'un max)

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on tire au hasard deux boules, avec remise dans cette urne.

On note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule et Y la variable aléatoire au numéro de la deuxième boule.

1. Justifier que X et Y sont indépendantes.
2. On pose $S = \max(X, Y)$. Déterminer $P([S \leq k])$ puis donner la loi de S .
3. On pose $T = \min(X, Y)$. Déterminer $P([T > k])$ puis donner la loi de T .

Exercice 10 – (Loi d'un produit)

On considère B et G deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et une loi géométrique $\mathcal{G}(p')$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire BG .
2. Calculer $E(BG)$.

Exercice 11

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires discrètes.

Vrai ou faux ?

1. Si X et Y sont indépendantes, et si X et Z sont indépendantes, alors X est indépendante de (Y, Z) .
2. Si (X, Y) et Z sont indépendantes, alors Y est indépendante de Z et X est indépendante de Z .
3. Si X et Y sont indépendantes et (X, Y) est indépendante de Z , alors X est indépendante de (Y, Z) .

Exercice 12 – (Loi conditionnelle)

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 , indépendantes et suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.

1. Donner la loi de $X_1 + X_2$.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant que l'évènement $(X_1 + X_2 = n)$ est réalisé.