

TD 4

Couple de variables aléatoires discrètes

Exercice 1 – (Loi d'un couple, lois marginales) [CORRECTION P. 4]

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 3])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{3}\right)$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Donner l'espérance et la variance de X et Y .

Exercice 2 – (Loi d'un couple, lois marginales, indépendance) [CORRECTION P. 4]

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $Y = X^2$.

La loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	-1	0	1	2
$\mathbf{P}([X = x_i])$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. Donner la loi du couple (X, Y) puis la loi de Y .
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 – (Loi d'un couple, lois marginales, indépendance) [CORRECTION P. 5]

La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par :

$\begin{array}{c} Y \\ \diagdown \\ X \end{array}$	0	1	2
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. Vérifier que l'on a bien défini la loi d'un couple, puis déterminer les lois marginales.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer $E(X)$ et $E(Y)$.

Exercice 4 – (Loi d'une variable aléatoire définie à partir d'un couple) [CORRECTION P. 6]

On considère la loi conjointe du couple (X, Y) de l'exercice précédent.

Déterminer la loi de :

1. $Z_1 = X + Y$
2. $Z_2 = XY$
3. $Z_3 = \text{Max}(X, Y)$
4. $Z_4 = \text{Min}(X, Y)$.

Exercice 5 – (Loi d'un couple, lois marginales, indépendance) [CORRECTION P. 7]

1. Un dé B porte les nombres $-2, -1, 0, 1, 2, 3$. Ce dé n'est pas équilibré.

Les probabilités d'apparition de chaque face forment une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Quelles sont ces probabilités ?

Un dé A parfaitement équilibré porte les nombres 1 sur 4 faces et -2 sur les autres faces.

Soit X la variable aléatoire qui à un lancer du dé A associe le nombre obtenu.

On lance une fois simultanément les deux dés A et B et on désigne par S la variable aléatoire qui au lancer des deux dés associe la valeur absolue de la somme des nombres obtenus.

2.
 - a. Déterminer la loi du couple (X, S) .
 - b. Quelle est la loi marginale de S ?
 - c. X et S sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 – (Loi d'un couple, lois marginales, tirage sans remise) [CORRECTION P. 8]

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne contient une boule blanche, une boule verte et $n - 2$ boules rouges numérotées de 1 à $n - 2$. Ces boules sont indiscernables au toucher.

On tire successivement et sans remise les N boules de l'urne.

On note X_1 la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule blanche et X_2 la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule verte.

1. $\forall (i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, montrer que $\mathbf{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \begin{cases} \frac{1}{n(n-1)} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$
2. Déterminer les lois marginales des variables aléatoires X_1 et X_2 .

Exercice 7 – (Famille définissant un loi conjointe) [CORRECTION P. 9]

Soit $a \in \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi jointe :

$$\mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{2^{i+1}j!}.$$

1. Déterminer le réel a .
2.
 - a. Montrer que $X + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
 - b. En déduire l'espérance et la variance de X .
3.
 - a. Déterminer la loi de Y .
 - b. Déterminer l'espérance et la variance de Y .
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$.

Exercice 8 – (Loi d'une somme) [CORRECTION P. 10]

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n .

On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac.

On note T_1 le numéro du premier jeton tiré et T_2 le numéro du deuxième jeton tiré.

1. Déterminer la loi de T_1 .
2. Déterminer la loi du couple (T_1, T_2) .
3. En déduire la loi de T_2 .
4. Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont-elles indépendantes ?
5. Déterminer $\mathbf{E}(T_1 + T_2)$.

Exercice 9 – (Loi d'un min et d'un max) [CORRECTION P. 11]

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on tire au hasard deux boules, avec remise dans cette urne.

On note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule et Y la variable aléatoire au numéro de la deuxième boule.

1. Justifier que X et Y sont indépendantes.
2. On pose $S = \max(X, Y)$. Déterminer $P([S \leq k])$ puis donner la loi de S .
3. On pose $T = \min(X, Y)$. Déterminer $P([T > k])$ puis donner la loi de T .

Exercice 10 – (Loi d'un produit) [CORRECTION P. 12]

On considère B et G deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et une loi géométrique $\mathcal{G}(p')$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire BG .
2. Calculer $E(BG)$.

Exercice 11 [CORRECTION P. 12]

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires discrètes.

Vrai ou faux ?

1. Si X et Y sont indépendantes, et si X et Z sont indépendantes, alors X est indépendante de (Y, Z) .
2. Si (X, Y) et Z sont indépendantes, alors Y est indépendante de Z et X est indépendante de Z .
3. Si X et Y sont indépendantes et (X, Y) est indépendante de Z , alors X est indépendante de (Y, Z) .

Exercice 12 – (Loi conditionnelle) [CORRECTION P. 14]

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 , indépendantes et suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.

1. Donner la loi de $X_1 + X_2$.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant que l'évènement $(X_1 + X_2 = n)$ est réalisé.

CORRIGÉS

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

1. On a déjà $\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket 0; 3 \rrbracket$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \{0; 1\}$.

Les lois de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont connues :

$\mathbb{X}$	0	1	2	3
$\mathbf{P}(\mathbb{X} = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\mathbb{Y}$	0	1
$\mathbf{P}(\mathbb{Y} = y)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Par indépendance, $\forall (x; y) \in \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} = x \cap \mathbb{Y} = y) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = x) \times \mathbf{P}(\mathbb{Y} = y).$$

On en déduit la loi conjointe de $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$:

$\mathbb{Y} \backslash \mathbb{X}$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

2. Sur des lois connues, on sait que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbb{X}) &= \frac{3}{2} & \text{et} & \quad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{(3-0)(3-0+2)}{12} = \frac{5}{4}. \\ \mathbf{E}(\mathbb{Y}) &= \frac{1}{3} & \text{et} & \quad \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 : [ÉNONCÉ]

1. On a $\mathbb{X}(\Omega) = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \{0; 1; 4\}$. Remarquons déjà que

$$[\mathbb{X} = -2] \cap [\mathbb{Y} = 0] = [\mathbb{X} = -2] \cap [\mathbb{Y} = 1] = \emptyset = [\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 1] = [\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 4] = \emptyset.$$

$$[\mathbb{X} = 1] \cap [\mathbb{Y} = 0] = [\mathbb{X} = 1] \cap [\mathbb{Y} = 4] = [\mathbb{X} = 2] \cap [\mathbb{Y} = 0] = [\mathbb{X} = 2] \cap [\mathbb{Y} = 1] = \emptyset.$$

Les probabilités afférentes seront donc nulles.

Pour les autres,

$$- \mathbf{P}([\mathbb{X} = -2] \cap [\mathbb{Y} = 4]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = -2]) = \frac{1}{6}.$$

$$- \mathbf{P}([\mathbb{X} = -1] \cap [\mathbb{Y} = 1]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = -1]) = \frac{1}{4}.$$

$$- \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 0]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0]) = \frac{1}{6}.$$

$$- \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1] \cap [\mathbb{Y} = 1]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1]) = \frac{1}{4}.$$

$$- \mathbf{P}([\mathbb{X} = 2] \cap [\mathbb{Y} = 4]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = 2]) = \frac{1}{6}.$$

Ce que l'on résume dans le tableau ci-dessous :

$\mathbb{X} \backslash \mathbb{Y}$	0	1	4
-2	0	0	$\frac{1}{6}$
-1	0	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{6}$	0	0
1	0	$\frac{1}{4}$	0
2	0	0	$\frac{1}{6}$
$\mathbf{P}(\mathbb{Y} = y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

2. Par exemple, $\mathbf{P}(\mathbb{X} = -2 \cap \mathbb{Y} = 0) = 0 \neq \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \mathbf{P}(\mathbb{X} = -2)\mathbf{P}(\mathbb{Y} = 0)$ donc les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes.

Correction de l'exercice 3 : [ÉNONCÉ]

1. Toutes les valeurs dans le tableau sont positifs et leur somme fait 1 donc on a bien défini la loi d'un couple de variables aléatoires.

D'après la loi des probabilités totales on trouve rapidement les lois marginales :

$$\forall x \in \llbracket 0; 1 \rrbracket, \mathbf{P}(\mathbb{X} = x) = \sum_{y \in \llbracket 0; 2 \rrbracket} \mathbf{P}(\mathbb{X} = x \cap \mathbb{Y} = y),$$

et

$$\forall y \in \llbracket 0; 2 \rrbracket, \mathbf{P}(\mathbb{Y} = y) = \sum_{x \in \llbracket 0; 1 \rrbracket} \mathbf{P}(\mathbb{X} = x \cap \mathbb{Y} = y).$$

Ce que l'on résume dans deux tableaux :

$\mathbb{X}$	0	1
$\mathbf{P}(\mathbb{X} = x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$

Loi de $\mathbb{X}$

$\mathbb{Y}$	0	1	2
$\mathbf{P}(\mathbb{Y} = y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Loi de $\mathbb{Y}$

Remarque : Histoire de redonner son sens au terme « marginal », on peut aussi présenter ces probabilités à la « marge » du tableau précédent :

$\mathbb{X} \backslash \mathbb{Y}$	0	1	2	$\mathbf{P}(\mathbb{X} = x)$
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{10}$
$\mathbf{P}(\mathbb{Y} = y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

2. Comme $\mathbf{P}(\mathbb{X} = 0 \cap \mathbb{Y} = 0) = \frac{1}{20} \neq \frac{1}{10} = \mathbf{P}(\mathbb{X} = 0) \times \mathbf{P}(\mathbb{Y} = 0)$, les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes.

Idée
 $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{7}{10}\right)$.

3. $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ prenant un nombre fini de valeurs, elles admettent une espérance et on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbb{X}) &= \sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} x \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \\ &= 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{7}{10} = \frac{7}{10}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbb{Y}) &= \sum_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)} y \mathbf{P}([\mathbb{Y} = y]) \\ &= 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

Remarque

On retrouve l'espérance d'une loi de Bernoulli pour $\mathbb{X}$.

Correction de l'exercice 4 : [ÉNONCÉ]

1. $\mathbb{Z}_1(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.

$$\mathbf{P}([\mathbb{Z}_1 = 0]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 0]) = \frac{1}{20}$$

$$\mathbf{P}([\mathbb{Z}_1 = 1]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 1]) + \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1] \cap [\mathbb{Y} = 0]) = \frac{1}{4} + \frac{17}{60} = \frac{8}{15}$$

$$\mathbf{P}([\mathbb{Z}_1 = 2]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 2]) + \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1] \cap [\mathbb{Y} = 1]) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{P}([\mathbb{Z}_1 = 3]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1] \cap [\mathbb{Y} = 2]) = \frac{1}{6}.$$

Ainsi,

z	0	1	2	3
$\mathbf{P}([\mathbb{Z}_1 = z])$	$\frac{1}{20}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

2. $\mathbb{Z}_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{Z}_2 = 0]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 0]) + \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 1]) + \\ &\quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 2]) + \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1] \cap [\mathbb{Y} = 0]) \\ &= \frac{1}{20} + \frac{1}{4} + 0 + \frac{17}{60} = \frac{7}{12}\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}([\mathbb{Z}_2 = 1]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1] \cap [\mathbb{Y} = 1]) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{P}([\mathbb{Z}_2 = 2]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1] \cap [\mathbb{Y} = 2]) = \frac{1}{6}.$$

Ainsi,

z	0	1	2
$\mathbf{P}([\mathbb{Z}_2 = z])$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

3. $\mathbb{Z}_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

$$\mathbf{P}([\mathbb{Z}_3 = 0]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 0]) = \frac{1}{20}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{Z}_3 = 1]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 1]) + \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1] \cap [\mathbb{Y} = 0]) + \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1] \cap [\mathbb{Y} = 1]) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{17}{60} + \frac{1}{4} = \frac{47}{60}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{Z}_3 = 2]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 2]) + \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1] \cap [\mathbb{Y} = 2]) \\ &= 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Ainsi,

z	0	1	2
$\mathbf{P}([\mathbb{Z}_3 = z])$	$\frac{1}{20}$	$\frac{47}{60}$	$\frac{1}{6}$

$$4. \mathbb{Z}_4(\Omega) = \{0, 1\}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Z_4 = 1]) &= \mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) + \mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Par complémentarité,

$$\mathbf{P}([Z_4 = 0]) = 1 - \mathbf{P}([Z_4 = 1]) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}.$$

Ainsi,

z	0	1
$\mathbf{P}([Z_4 = z])$	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$

Correction de l'exercice 5 : [ÉNONCÉ]

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Notons Y le nombre obtenu à partir du dé B. La loi de Y est

k	-2	-1	0	1	2	3	Total
$\mathbf{P}([Y = k])$	a	$a\frac{1}{2}$	$a\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$a\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$a\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$a\left(\frac{1}{2}\right)^5$	1

La somme des probabilités devant faire 1, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^k a = 1 &\Leftrightarrow a \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \Leftrightarrow a \times \frac{63}{32} = 1 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{32}{63}. \end{aligned}$$

Conclusion,

k	-2	-1	0	1	2	3
$\mathbf{P}([Y = k])$	$\frac{32}{63}$	$\frac{16}{63}$	$\frac{8}{63}$	$\frac{4}{63}$	$\frac{2}{63}$	$\frac{1}{63}$

2. a. $X(\Omega) = \{-2; 1\}$. Dénombrons les valeurs de S .

$Y \backslash X$	-2	-1	0	1	2	3
-2	4	3	2	1	0	1
1	1	0	1	2	3	4

Donc $S(\Omega) = [0; 4]$.

Par indépendance de X et Y , on en déduit la loi de (X, S) :

$$\begin{aligned} - \mathbf{P}([X = -2] \cap [S = 0]) &= \mathbf{P}([X = -2] \cap [Y = 2]) \\ &= \mathbf{P}([X = -2])\mathbf{P}([Y = 2]) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{63} \\ &= \frac{2}{189}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - \mathbf{P}([X = -2] \cap [S = 1]) &= \mathbf{P}([X = -2] \cap [Y = 1]) + \mathbf{P}([X = -2] \cap [Y = 3]) \\
 &= \mathbf{P}([X = -2])\mathbf{P}([Y = 1]) + \mathbf{P}([X = -2])\mathbf{P}([Y = 3]) \\
 &= \frac{1}{3} \times \frac{4}{63} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{63} \\
 &= \frac{5}{189}.
 \end{aligned}$$

— ...

On résume tous ces calculs dans un tableau :

$\begin{array}{c} S \\ \backslash \\ X \end{array}$	0	1	2	3	4
-2	$\frac{2}{189}$	$\frac{5}{189}$	$\frac{8}{189}$	$\frac{16}{189}$	$\frac{32}{189}$
1	$\frac{32}{189}$	$\frac{80}{189}$	$\frac{8}{189}$	$\frac{4}{189}$	$\frac{2}{189}$

b. D'après la loi des probabilités totales, $\forall s \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$, on a :

$$\mathbf{P}([S = s]) = \mathbf{P}([X = -2] \cap [S = s]) + \mathbf{P}([X = 1] \cap [S = s]).$$

Ce qui s'écrit :

S	0	1	2	3	4
$\mathbf{P}([S = s])$	$\frac{34}{189}$	$\frac{85}{189}$	$\frac{16}{189}$	$\frac{20}{189}$	$\frac{34}{189}$

c. Considérons l'événement $[X = -2] \cap [S = 0]$. On a :

$$\mathbf{P}([X = -2] \cap [S = 0]) = \frac{2}{189} = \frac{6}{567} \neq \frac{34}{567} = \frac{1}{3} \times \frac{34}{189} = \mathbf{P}([X = -2])\mathbf{P}([S = 0]).$$

Les variables X et S ne sont pas indépendantes.

Correction de l'exercice 6 : [ÉNONCÉ]

1. Soient $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

— Si $i = j$, la boule blanche et la boule verte ne peuvent pas être tirées au même rang.

Ainsi,

$$\mathbf{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = 0.$$

— Supposons maintenant que $i \neq j$.

Les $n!$ ordres possibles de tirage des n boules sont équiprobables.

Pour que l'événement $[X_1 = i] \cap [X_2 = j]$ soit réalisé, il suffit de fixer la boule blanche au rang i et la boule verte au rang j .

Les $n-2$ boules rouges peuvent alors être disposées arbitrairement sur les $n-2$ positions restantes.

Il y a donc $(n-2)!$ tirages favorables.

Par conséquent,

$$\mathbf{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Finalement,

$$\mathbf{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \begin{cases} \frac{1}{n(n-1)} & \text{si } i \neq j, \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

2. Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

En utilisant la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X_1 = i]) &= \sum_{j=1}^n \mathbf{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{n(n-1)} \\ &= (n-1) \times \frac{1}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Le même raisonnement conduit à

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbf{P}([X_2 = j]) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \frac{1}{n}.$$

Les variables aléatoires X_1 et X_2 suivent donc toutes deux la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$.

Correction de l'exercice 7 : [ÉNONCÉ]

1. La somme de toutes les probabilités doit être égale à 1. On écrit donc

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = 1$$

En remplaçant par l'expression donnée,

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a}{2^{i+1} j!} = 1$$

Comme tous les termes sont positifs, on peut séparer les deux sommes :

$$\begin{aligned} a \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \right) &= 1 \\ a \underbrace{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right)}_{=1} \times e &= 1 \\ a e &= 1 \\ a &= \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

2. a. $X(\Omega) = \mathbb{N}$ ($X+1$)(Ω) = $\mathbb{N}^*$.

D'après la loi des probabilités totales, avec le sce $([Y = j])_{j \in \mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(X+1 = i) &= \mathbf{P}(X = i-1) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = i-1] \cap [Y = j]) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{e 2^i j!} = \frac{1}{e 2^i} \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}}_{=e} \\ &= \frac{1}{2^i}. \end{aligned}$$

On reconnaît une loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $p = \frac{1}{2}$.

b. On en déduit que $\mathbf{E}(\mathbb{X} + 1) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ puis, par linéarité, $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 2 - 1 = 1$.

De même, $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{V}(\mathbb{X} + 1) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

3. a. De même, $\mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}$ et, à travers le sce $([\mathbb{X} = i])_{i \in \mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(\mathbb{Y} = j) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{e 2^{i+1} j!} = \frac{1}{e j!} \underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+1}}}_{=1} \\ &= \frac{1}{e j!}. \end{aligned}$$

On reconnaît une loi de Poisson de paramètre 1.

b. Comme $\mathbb{Y} \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$, on a $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = 1$.

4. Soient $i, j \in \mathbb{N}$. On a :

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} = i) \mathbf{P}(\mathbb{Y} = j) = \frac{1}{2^{i+1}} \times \frac{1}{e j!} = \frac{1}{e 2^{i+1} j!} = \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]).$$

Par conséquent, $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes.

5. On remarque que $[\mathbb{X} = \mathbb{Y}] = \bigcup_{i=0}^{+\infty} ([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = i])$, réunion dont les événements sont incompatibles.

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([\mathbb{X} = \mathbb{Y}]) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} ([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = i])\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = i]) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{2^{i+1} i!} = \frac{e^{-1}}{2} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^i}{i!} \\ &= \frac{e^{-1}}{2} \times e^{\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{e}} \end{aligned}$$

Remarque

On reconnaît une somme exponentielle.

Correction de l'exercice 8 : [ÉNONCÉ]

1. Lors du premier tirage, chacun des n jetons a la même probabilité d'être obtenu.

Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $\mathbf{P}(\mathbb{T}_1 = i) = \frac{1}{n}$.

La variable aléatoire $\mathbb{T}_1$ suit donc la loi uniforme sur $\llbracket 1 ; n \rrbracket$.

2. Considérons deux entiers $i, j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$.

— Si $i = j$, il est impossible d'obtenir deux fois le même jeton puisque le tirage est sans remise.

Donc, $\mathbf{P}(\mathbb{T}_1 = i, \mathbb{T}_2 = i) = 0$.

— Si $i \neq j$, on utilise la formule des probabilités composées :

$$\mathbf{P}([\mathbb{T}_1 = i] \cap [\mathbb{T}_2 = j]) = \mathbf{P}([\mathbb{T}_1 = i]) \mathbf{P}_{[\mathbb{T}_1 = i]}([\mathbb{T}_2 = j]).$$

Or, $\mathbf{P}(\mathbb{T}_1 = i) = \frac{1}{n}$ et, une fois le jeton i retiré, il reste $n-1$ jetons, tous équiprobables :

$$\mathbf{P}_{\mathbb{T}_1=i}(\mathbb{T}_2 = j) = \frac{1}{n-1}.$$

Par conséquent, $\mathbf{P}(\mathbb{T}_1 = i \cap \mathbb{T}_2 = j) = \frac{1}{n(n-1)}.$

Conclusion,

$$\mathbf{P}(\mathbb{T}_1 = i \cap \mathbb{T}_2 = j) = \begin{cases} \frac{1}{n(n-1)} & \text{si } i \neq j, \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

3. $\mathbb{T}_2(\Omega) = \mathbb{N}$ et, d'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbf{P}(\mathbb{T}_2 = j) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(\mathbb{T}_1 = i \cap \mathbb{T}_2 = j) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{n(n-1)} \\ &= (n-1) \times \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

La variable $\mathbb{T}_2$ suit également la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$.

4. Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On a :

$$\mathbf{P}(\mathbb{T}_1 = i \cap \mathbb{T}_2 = i) = 0 \neq \mathbf{P}(\mathbb{T}_1 = i)\mathbf{P}(\mathbb{T}_2 = i) = \frac{1}{n^2} > 0.$$

Les variables $\mathbb{T}_1$ et $\mathbb{T}_2$ ne sont pas indépendantes.

5. Par linéarité de l'espérance avec deux lois suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$, on a :

$$\mathbf{E}(\mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_2) = \mathbf{E}(\mathbb{T}_1) + \mathbf{E}(\mathbb{T}_2) = \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} = n+1.$$

Remarque

Le résultat est naturel : connaître le premier tirage modifie les probabilités du second puisque le tirage est effectué sans remise.

Correction de l'exercice 9 : [ÉNONCÉ]

- Comme le deuxième tirage est effectué avec remise, il n'est pas influencé par le premier. Ainsi, $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes.
- Tout d'abord $\mathbb{S}(\Omega) = \mathbb{N}$ puis, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $[\mathbb{S} \leq k] = [\mathbb{X} \leq k] \cap [\mathbb{Y} \leq k]$.

Comme $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes, $\mathbf{P}([\mathbb{S} \leq k]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} \leq k])\mathbf{P}([\mathbb{Y} \leq k])$.

Or, parmi les n valeurs possibles de $\mathbb{X}$ ou de $\mathbb{Y}$, exactement k sont inférieures ou égales à k . Ainsi,

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} \leq k]) = \frac{k}{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([\mathbb{Y} \leq k]) = \frac{k}{n}.$$

On en déduit

$$\mathbf{P}([\mathbb{S} \leq k]) = \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

Pour obtenir la loi de $\mathbb{S}$, il suffit de remarquer que $[\mathbb{S} = k] = [\mathbb{S} \leq k] \setminus [\mathbb{S} \leq k-1]$.

D'où,

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbf{P}([\mathbb{S} = k]) &= \mathbf{P}([\mathbb{S} \leq k]) - \mathbf{P}([\mathbb{S} \leq k-1]) \\ &= \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} \\ &= \frac{2k-1}{n^2}. \end{aligned}$$

3. Le raisonnement est identique :

Tout d'abord $\mathbb{T}(\Omega) = \mathbb{N}$.

Puis, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $[\mathbb{T} > k] = [\mathbb{X} > k] \cap [\mathbb{Y} > k]$.

Comme $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes, $\mathbf{P}([\mathbb{T} > k]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} > k]) \mathbf{P}([\mathbb{Y} > k])$.

Parmi les n valeurs possibles de $\mathbb{X}$ ou $\mathbb{Y}$, il y en a $n - k$ qui sont strictement supérieures à k . Ainsi,

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} > k]) = \mathbf{P}([\mathbb{Y} > k]) = \frac{n - k}{n}.$$

Par conséquent, $\mathbf{P}([\mathbb{T} > k]) = \left(\frac{n - k}{n}\right)^2$.

Pour obtenir la loi de $\mathbb{T}$, on remarque que $[\mathbb{T} = k] = [\mathbb{T} > k - 1] \setminus [\mathbb{T} > k]$.

D'où,

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbf{P}([\mathbb{T} = k]) &= \mathbf{P}([\mathbb{T} > k - 1]) - \mathbf{P}([\mathbb{T} > k]) \\ &= \frac{(n - k + 1)^2 - (n - k)^2}{n^2} \\ &= \frac{2(n - k) + 1}{n^2}. \end{aligned}$$

Rappel

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Correction de l'exercice 10 : [ÉNONCÉ]

1. Comme $\mathbb{B}$ suit un loi de Bernoulli, $\mathbb{B}(\Omega) = \{0, 1\}$ et $(\mathbb{B}\mathbb{G})(\Omega) = \mathbb{N}$.

— Comme $\mathbb{G} \geq 1$, $[\mathbb{B}\mathbb{G} = 0] = [\mathbb{B} = 0]$ puis

$$\mathbf{P}([\mathbb{B}\mathbb{G} = 0]) = 1 - p.$$

— Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Il est clair que $[\mathbb{B}\mathbb{G} = k] = [\mathbb{B} = 1] \cap [\mathbb{G} = k]$.

Les variables aléatoires $\mathbb{B}$ et $\mathbb{G}$ étant indépendantes, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([\mathbb{B}\mathbb{G} = k]) &= \mathbf{P}([\mathbb{B} = 1] \cap [\mathbb{G} = k]) \\ &= \mathbf{P}([\mathbb{B} = 1]) \mathbf{P}([\mathbb{G} = k]) \\ &= p p' (1 - p')^{k-1}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{cases} \mathbf{P}([\mathbb{B}\mathbb{G} = 0]) = 1 - p, \\ \forall k \geq 1, \mathbf{P}([\mathbb{B}\mathbb{G} = k]) = p p' (1 - p')^{k-1}. \end{cases}$$

2. Les variables aléatoires $\mathbb{B}$ et $\mathbb{G}$ étant indépendantes,

$$\mathbf{E}(\mathbb{B}\mathbb{G}) = \mathbf{E}(\mathbb{B})\mathbf{E}(\mathbb{G}) = p \times \frac{1}{p'} = \frac{p}{p'}.$$

Remarque : On pouvait également calculer cette espérance à la main à l'aide de la série géométrique dérivée :

$$\mathbf{E}(\mathbb{B}\mathbb{G}) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbf{P}([\mathbb{B}\mathbb{G} = k]) = p p' \sum_{k=1}^{+\infty} k (1 - p')^{k-1} = \frac{p p'}{(p')^2} = \frac{p}{p'}.$$

Correction de l'exercice 11 : [ÉNONCÉ]

1. **Faux.**

Il suffit de construire un contre-exemple.

Rappel

$$\begin{aligned} \forall |x| < 1, \\ \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} &= \frac{1}{(1 - x)^2}. \end{aligned}$$

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que

$$\mathbf{P}([X = -1]) = \mathbf{P}([X = 1]) = \mathbf{P}([Y = -1]) = \mathbf{P}([Y = 1]) = \frac{1}{2}.$$

Posons $Z = XY$.

La loi conjointe du couple (X, Z) est donnée par le tableau ci-dessous :

$X \backslash Z$	$Z = -1$	$Z = 1$
$X = -1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$X = 1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Ainsi, pour tous $i, j \in \{-1, 1\}$, $\mathbf{P}([X = i] \cap [Z = j]) = \frac{1}{4} = \mathbf{P}([X = i]) \mathbf{P}([Z = j])$.

Donc X et Z sont indépendantes.

En revanche, $\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1] \cap [Z = 1]) = \frac{1}{4}$, alors que

$$\mathbf{P}([X = 1]) \mathbf{P}([Y = 1] \cap [Z = 1]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Donc, $\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1] \cap [Z = 1]) \neq \mathbf{P}([X = 1]) \mathbf{P}([Y = 1] \cap [Z = 1])$, ce qui montre que X n'est pas indépendante du couple (Y, Z) .

2. Vrai.

Supposons que (X, Y) et Z soient indépendantes.

Alors, pour tous $i, j, k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j] \cap [Z = k]) = \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) \mathbf{P}([Z = k]).$$

En sommant sur toutes les valeurs possibles de X , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y = j] \cap [Z = k]) &= \sum_{i \geq 0} \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j] \cap [Z = k]) \\ &= \sum_{i \geq 0} \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) \mathbf{P}([Z = k]) \\ &= \mathbf{P}([Z = k]) \sum_{i \geq 0} \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\ &= \mathbf{P}([Y = j]) \mathbf{P}([Z = k]). \end{aligned}$$

Donc Y et Z sont indépendantes.

De même, $\mathbf{P}([X = i] \cap [Z = k]) = \mathbf{P}([X = i]) \mathbf{P}([Z = k])$, ce qui montre que X et Z sont indépendantes.

3. Vrai.

Supposons que X et Y soient indépendantes et que (X, Y) soit indépendante de Z .

Pour tous $i, j, k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j] \cap [Z = k]) &= \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) \mathbf{P}([Z = k]) \\ &= \mathbf{P}([X = i]) \mathbf{P}([Y = j]) \mathbf{P}([Z = k]) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, l'indépendance de (X, Y) et Z entraîne l'indépendance de Y et Z , donc

$$= \mathbf{P}([X = i]) \mathbf{P}([Y = j] \cap [Z = k]).$$

Conclusion, X est indépendante du couple (Y, Z) .

Correction de l'exercice 12 : [ÉNONCÉ]

1. Posons $S = X_1 + X_2$. Comme X_1 et X_2 sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a

$$S(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \rrbracket.$$

Soit $n \geq 2$. Par indépendance de X_1 et X_2 ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}([X_1 = k] \cap [X_2 = n - k]) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}([X_1 = k])\mathbf{P}([X_2 = n - k]) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p(1-p)^{k-1} \times p(1-p)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2} \\ &= (n-1)p^2(1-p)^{n-2}. \end{aligned}$$

2. Soit $n \geq 2$. Déterminons la loi conditionnelle de X_1 sachant $[X_1 + X_2 = n]$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, d'après la loi des probabilités conditionnelles, on a :

$$\mathbf{P}_{[X_1+X_2=n]}([X_1 = k]) = \frac{\mathbf{P}([X_1 = k] \cap [X_1 + X_2 = n])}{\mathbf{P}([X_1 + X_2 = n])}.$$

Or, $[X_1 = k] \cap [X_1 + X_2 = n] = [X_1 = k] \cap [X_2 = n - k]$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{[X_1+X_2=n]}([X_1 = k]) &= \frac{\mathbf{P}([X_1 = k] \cap [X_2 = n - k])}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} \\ &= \frac{\mathbf{P}([X_1 = k])\mathbf{P}([X_2 = n - k])}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} \\ &= \frac{p(1-p)^{k-1} \times p(1-p)^{n-k-1}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} \\ &= \frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

La loi conditionnelle de X_1 sachant $[X_1 + X_2 = n]$ est donc la loi uniforme sur $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

k	1	2	...	$n-1$
$\mathbf{P}_{[X_1+X_2=n]}([X_1 = k])$	$\frac{1}{n-1}$	$\frac{1}{n-1}$	...	$\frac{1}{n-1}$