

I. CLASSIQUES

Exercice 1 – (Calcul d'espérance et de variance) [CORRECTION P. 6]

Soit $\mathbb{X}$ définie par

x_i	0	1	2
$\mathbf{P}(\mathbb{X} = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ puis $\mathbf{V}(\mathbb{X})$.

Exercice 2 – (Transformation affine) [CORRECTION P. 6]

Soit $\mathbb{X}$ telle que

x_i	-1	1	3
$\mathbf{P}(\mathbb{X} = x_i)$	0,2	0,5	0,3

On pose $\mathbb{Y} = 2\mathbb{X} - 1$.

1. Donner la loi de $\mathbb{Y}$.
2. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{Y})$.

Exercice 3 – (Espérance d'une fonction) [CORRECTION P. 6]

Soit $\mathbb{X}$ définie par

x_i	0	1	2	3
$\mathbf{P}(\mathbb{X} = x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,4

On pose $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^2 + 1$.

Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$.

II. CONCOURS

Exercice 4 – (Espérance d'une fonction de loi Binomiale) [CORRECTION P. 6]

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On suppose que $\mathbb{X} \sim \mathcal{B}(m, p)$. On note $\mathbb{Y} = \frac{1}{\mathbb{X} + 1}$. Calculer l'espérance de $\mathbb{Y}$.

Exercice 5 – (Inégalité sur l'espérance de l'inverse) [CORRECTION P. 7]

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ admettant une espérance.

1. Justifier que $1/\mathbb{X}$ admet une espérance et exprimer $\mathbf{E}(1/\mathbb{X})$ à l'aide des x_k et $p_k = \mathbf{P}(\mathbb{X} = x_k)$.
2. En déduire que $\mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(1/\mathbb{X}) \geq 1$.

Indication : On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6 – (Inégalité de Jensen) [CORRECTION P. 7]

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire finie et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Démontrer que $\varphi(\mathbf{E}(\mathbb{X})) \leq \mathbf{E}(\varphi(\mathbb{X}))$.

Exercice 7 – (Minimum de tirages sans remise) [CORRECTION P. 7]

On dispose d'une urne remplie de N boules numérotées de 1 à N . On effectue k tirages sans remise avec $k \leq N$. Soit $\mathbb{X}$ le plus petit numéro obtenu.

1. Donner la loi de $\mathbb{X}$. En déduire l'égalité : $\sum_{j=0}^m \binom{n+j}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{N-k+1} \mathbf{P}(\mathbb{X} \geq i)$.
3. En déduire que $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{N+1}{k+1}$.

Exercice 8 – (Nouvelle expression de l'espérance) [CORRECTION P. 8]

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(\mathbb{X} > k) \right) - n \mathbf{P}(\mathbb{X} > n)$.
2. On suppose que $\mathbb{X}$ admet une espérance.
 - a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \mathbf{P}(\mathbb{X} > n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$.
 - b. Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(\mathbb{X} > k)$ converge et que :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathbb{X} > k) \quad (\text{E})$$

3. Réciproquement, si $\sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(\mathbb{X} > k)$ converge, montrer que $\mathbb{X}$ admet une espérance et la relation (E).
4. Adapter le raisonnement pour montrer que si $\mathbb{X}$ admet un moment d'ordre 2 :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1) \mathbf{P}(\mathbb{X} > k)$$

Exercice 9 – (Majoration de la variance) [CORRECTION P. 9]

Soient $\mathbb{X}$ une variable aléatoire réelle et $a, b \in \mathbb{R}$. On note $m = \mathbf{E}(\mathbb{X})$.

1. Montrer que $\mathbf{E}((\mathbb{X} - a)(b - \mathbb{X})) = (m - a)(b - m) - \mathbf{V}(\mathbb{X})$.
2. On suppose $a < b$ et $\mathbb{X}(\Omega) \subset [a, b]$.
 - a. Montrer que $(m - a)(b - m) \leq \frac{(b - a)^2}{4}$. En déduire $\mathbf{V}(\mathbb{X}) \leq \frac{(b - a)^2}{4}$.
 - b. Ce majorant peut-il être amélioré ?

Exercice 10 – (Détermination de loi par les moments) [CORRECTION P. 9]

1. Soit $\mathbb{Y}$ une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ avec les probabilités p_0, p_1, p_2 . On suppose $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = 1$ et $\mathbf{E}(\mathbb{Y}^2) = 5/3$. Calculer p_0, p_1, p_2 .
2. Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels distincts et $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, Q \mapsto (Q(x_0), \dots, Q(x_n))$.
 - a. Montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
 - b. Déterminer la matrice de φ dans les bases canoniques.
 - c. Soit $\mathbb{X}$ une variable finie à valeurs dans $\{x_0, \dots, x_n\}$. Connaissant $\mathbf{E}(\mathbb{X}), \dots, \mathbf{E}(\mathbb{X}^n)$, peut-on déterminer la loi de $\mathbb{X}$?

Exercice 11 – (Propriétés des moments d'ordre 4) [CORRECTION P. 10]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère une variable aléatoire $\mathbb{X}$ admettant des moments jusqu'à l'ordre 4 et vérifiant :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(\mathbb{X}^2) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^4) = 1$$

1. Montrer que $\alpha \in [-1, 1]$.
2. Trouver la loi de $\mathbb{X}$.

Exercice 12 – (Kurtosis d'une variable aléatoire) [CORRECTION P. 10]

Le kurtosis d'une variable $\mathbb{X}$ est défini par $K(\mathbb{X}) = \frac{\mu_4(\mathbb{X})}{(\mu_2(\mathbb{X}))^2} - 3$, où $\mu_n(\mathbb{X}) = \mathbf{E}[(\mathbb{X} - \mathbf{E}(\mathbb{X}))^n]$.

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que $K(\alpha\mathbb{X} + \beta) = K(\mathbb{X})$.
2. Montrer que $K(\mathbb{X}) \geq -2$.
3. Soit $\mathbb{X} \sim \mathcal{G}(p)$. Montrer que $\mathbb{X}$ possède un kurtosis et le calculer.

Exercice 13 – (Écran défectueux et simulation Python) [CORRECTION P. 10]

Soit $\mathbb{X} \sim \mathcal{B}(n, p)$. Si $\mathbb{X} = 0$, l'écran affiche une valeur uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Sinon, il affiche $\mathbb{X}$. On note Y_n la valeur affichée.

1. a. Proposer un programme **Python** pour simuler Y_n .
b. Approcher $\mathbf{E}(Y_{10})$ pour $p = 1/2$.
2. Exprimer $\mathbf{E}(Y_n)$ en fonction de n et p .

Exercice 14 – (Inégalité de Hölder) [CORRECTION P. 11]

1. Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
a. Pour $a > 0$, étudier $f(x) = \frac{x^q}{q} + \frac{a^p}{p} - ax$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
b. En déduire l'inégalité : $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ pour tous $a, b \geq 0$.
2. Soient $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ deux variables positives d'espérance de puissance p et q finies.
a. Justifier que XY admet une espérance.
b. Démontrer l'inégalité de Hölder : $\mathbf{E}(XY) \leq \mathbf{E}(\mathbb{X}^p)^{1/p} \mathbf{E}(\mathbb{Y}^q)^{1/q}$.
3. Application : Montrer que pour $0 < r < s \leq n$, $\mathbf{E}(Z^r)^{1/r} \leq \mathbf{E}(Z^s)^{1/s}$.

Exercice 15 – (Urne de Polya) [CORRECTION P. 11]

On considère une urne avec a boules blanches et b boules noires. À chaque tirage, on remet la boule tirée et on ajoute une boule de la même couleur. On note $\mathbb{X}_n$ le nombre de boules blanches tirées en n tirages.

1. a. Proposer un programme **Python** simulant $\mathbb{X}_n$.
b. Comment approcher $\mathbf{E}(\mathbb{X}_{20})$ pour $a = b = 5$?
2. Montrer que $\mathbf{P}(\mathbb{X}_n = k) = \binom{n}{k} \frac{a^{[k]} b^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$.
3. Montrer que $\mathbf{E}(\mathbb{X}_n) = n \frac{a}{a+b}$.

Exercice 16 – (Espérance conditionnelle (Vrai ou Faux)) [CORRECTION P. 12]

Soient A un événement tel que $\mathbf{P}(A) \notin \{0, 1\}$ et X, Y deux variables aléatoires.

1. $\mathbf{E}(X \mid \Omega) = \mathbf{E}(X)$.
2. $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(X \mid A) + \mathbf{E}(X \mid \bar{A})$.
3. $\mathbf{E}(X) = \mathbf{P}(A)\mathbf{E}(X \mid A) + \mathbf{P}(\bar{A})\mathbf{E}(X \mid \bar{A})$.
4. Si $[X = x]$ est indépendant de A pour tout x , alors $\mathbf{E}(X \mid A) = \mathbf{E}(X)$.
5. Si $X \leq Y$ alors $\mathbf{E}(X \mid A) \leq \mathbf{E}(Y \mid A)$.
6. Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbf{E}(Y \mid [X = x]) = \mathbf{E}(Y)$.

Exercice 17 – (Partie de Tennis de Table) [CORRECTION P. 12]

Alice et Bob font une partie. Alice réussit ses coups avec la probabilité p_A , Bob avec la probabilité p_B . Alice commence. Soit X le nombre de coups valides échangés.

1. Donner la loi de X et son espérance.
2. Préciser $\mathbf{E}(X \mid [X \geq 1])$.

Exercice 18 – (Procédé de tirage sans remise progressive) [CORRECTION P. 12]

Une urne contient N boules. Si la boule i est tirée au tirage k , on la remet et on retire toutes les boules $> i$. Soit X_k le numéro tiré au k -ième tirage.

1. Préciser $\mathbf{E}(X_{k+1} \mid [X_k = i])$.
2. Donner une relation entre $\mathbf{E}(X_{k+1})$ et $\mathbf{E}(X_k)$.
3. En déduire $\mathbf{E}(X_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 19 – (Formule de l'Espérance Conditionnelle) [CORRECTION P. 13]

Soient X une variable discrète admettant une espérance et A un événement avec $\mathbf{P}(A) > 0$.

1. Montrer que $\mathbf{E}(X \mid A) = \frac{\mathbf{E}(X \cdot \mathbf{1}_A)}{\mathbf{P}(A)}$.
2. En déduire que $\mathbf{E}(X \mid A) \leq \frac{\mathbf{E}(|X|)}{\mathbf{P}(A)}$.

Exercice 20 – (Formule de la variance totale) [CORRECTION P. 13]

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements.

1. Démontrer la formule de la variance totale :

$$\mathbf{V}(X) = \sum_{k=1}^n (\mathbf{V}(X \mid A_k) + \mathbf{E}(X \mid A_k)^2) \mathbf{P}(A_k) - \mathbf{E}(X)^2$$

2. Application : Une urne contient 2 boules blanches et 4 noires. On lance une pièce équilibrée. Si Pile, X est le nombre de blanches tirées sur 6 tirages avec remise ; si Face, X est le nombre de noires. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 21 – (Moments de la loi de Poisson) [CORRECTION P. 13]

1. Pour $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$, montrer qu'il existe un polynôme L_n tel que $\mathbf{E}(Y^n) = L_n(\lambda)$.
2. Montrer la relation de récurrence : $L_{n+1}(\lambda) = \lambda L'_n(\lambda) + \lambda L_n(\lambda)$.
3. En déduire les moments de la loi $\mathcal{P}(1)$.

Exercice 22 – (Inégalité pour l'écart-type d'une somme) [CORRECTION P. 13]

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2. Montrer que $\sigma(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) \leq \sigma(\mathbb{X}) + \sigma(\mathbb{Y})$.

Exercice 23 – (Étude d'une loi sur $\mathbb{Z}^*$) [CORRECTION P. 14]

Soit $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Nature et sommes de $\sum a_n$ et $\sum na_n$.
2. Déterminer α tel que $\mathbf{P}(\mathbb{X} = n) = \alpha a_{|n|}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$.
3.
 - a. Nature de $A_n = [\mathbb{X} = n] \cup [\mathbb{X} = -n]$.
 - b. Préciser $\mathbf{E}(\mathbb{X} \mid A_n)$.
 - c. Calculer la somme de $\mathbf{E}(\mathbb{X} \mid A_n) \mathbf{P}(A_n)$.
4. La variable $\mathbb{X}$ admet-elle une espérance ?

CORRIGÉS

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1.$$

Puis

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}^2) = 0 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Donc

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Correction de l'exercice 2 : [ÉNONCÉ]

Les valeurs de $\mathbb{Y}$ sont $-3, 1, 5$.

y_i	-3	1	5
$\mathbf{P}([\mathbb{Y} = y_i])$	$0,2$	$0,5$	$0,3$

On calcule $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 1,2$.

Donc $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = 2 \times 1,2 - 1 = 1,4$.

Enfin, $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = 4\mathbf{V}(\mathbb{X})$.

Or, $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = 1,96$.

Ainsi, $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = 7,84$.

Correction de l'exercice 3 : [ÉNONCÉ]

Par le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^2 + 1) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^2) + 1.$$

On calcule

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}^2) = 0 + 0,2 + 1,2 + 3,6 = 5.$$

Donc

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = 6.$$

Correction de l'exercice 4 : [ÉNONCÉ]

$\mathbb{X}$ est une variable finie, donc $\mathbb{Y}$ admet une espérance. D'après le théorème de transfert :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \mathbf{E}\left(\frac{1}{\mathbb{X} + 1}\right) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$:

$$\frac{1}{k+1} \binom{m}{k} = \frac{1}{k+1} \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{1}{m+1} \frac{(m+1)!}{(k+1)!(m-k)!} = \frac{1}{m+1} \binom{m+1}{k+1}$$

En réinjectant cette identité :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k+1} p^k (1-p)^{m-k}$$

Effectuons le changement d'indice $j = k + 1$:

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \frac{1}{(m+1)p} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} p^j (1-p)^{(m+1)-j}$$

Par la formule du binôme de Newton, la somme vaut $1 - (1-p)^{m+1}$. Ainsi :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \frac{1 - (1-p)^{m+1}}{(m+1)p}$$

Correction de l'exercice 5 : [ÉNONCÉ]

1. Comme $\mathbb{X}(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$, pour tout $x_k \in \mathbb{X}(\Omega)$, on a $x_k \geq 1$, d'où $0 < \frac{1}{x_k} \leq 1$. Ainsi, $\frac{1}{x_k} p_k \leq p_k$.

La série $\sum \frac{1}{x_k} p_k$ converge car $\sum p_k = 1$. Donc $1/\mathbb{X}$ admet une espérance et :

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{\mathbb{X}}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x_k} p_k$$

2. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux familles $u_k = \sqrt{x_k p_k}$ et $v_k = \sqrt{\frac{p_k}{x_k}}$:

$$\left(\sum_{k=1}^n u_k v_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n u_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n v_k^2\right)$$

Remarquons que $u_k v_k = \sqrt{x_k p_k} \sqrt{\frac{p_k}{x_k}} = p_k$. Ainsi :

$$\left(\sum_{k=1}^n p_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k p_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{p_k}{x_k}\right)$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, le membre de gauche tend vers $1^2 = 1$, et le membre de droite tend vers $\mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(1/\mathbb{X})$. D'où : $\mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(1/\mathbb{X}) \geq 1$.

Correction de l'exercice 6 : [ÉNONCÉ]

Posons $m = \mathbf{E}(\mathbb{X})$. Comme φ est convexe sur $\mathbb{R}$, sa courbe représentative se situe au-dessus de toutes ses tangentes (ou droites d'appui). Il existe donc un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) \geq \varphi(m) + a(x - m)$$

Puisque $\mathbb{X}$ est une variable finie, on peut appliquer cette inégalité à la variable $\mathbb{X}$:

$$\varphi(\mathbb{X}) \geq \varphi(m) + a(\mathbb{X} - m)$$

En prenant l'espérance de chaque côté (par croissance de l'espérance) :

$$\mathbf{E}(\varphi(\mathbb{X})) \geq \mathbf{E}(\varphi(m) + a(\mathbb{X} - m)) = \varphi(m) + a(\mathbf{E}(\mathbb{X}) - m)$$

Comme $\mathbf{E}(\mathbb{X}) - m = 0$, on obtient bien :

$$\mathbf{E}(\varphi(\mathbb{X})) \geq \varphi(\mathbf{E}(\mathbb{X}))$$

Correction de l'exercice 7 : [ÉNONCÉ]

1. L'ensemble des valeurs prises par $\mathbb{X}$ est $\llbracket 1, N - k + 1 \rrbracket$. Pour $x \in \llbracket 1, N - k + 1 \rrbracket$, l'événement $[\mathbb{X} = x]$ signifie qu'on a tiré la boule numéro x et $k-1$ boules parmi les $N-x$ boules portants

un numéro strictement supérieur à x . Le nombre de tirages possibles est $\binom{N}{k}$. Ainsi :

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} = x) = \frac{\binom{N-x}{k-1}}{\binom{N}{k}}$$

Puisque la somme des probabilités vaut 1 : $\sum_{x=1}^{N-k+1} \binom{N-x}{k-1} = \binom{N}{k}$. En posant le changement d'indice $j = N - x - (k - 1)$, $n = k - 1$ et $m = N - k$, on retrouve la formule classique du crosse de hockey :

$$\sum_{j=0}^m \binom{n+j}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$$

2. $\mathbb{X}$ est à valeurs positives dans $\llbracket 1, N - k + 1 \rrbracket$. Par la formule de la queue de distribution :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \sum_{x=1}^{N-k+1} x \mathbf{P}(\mathbb{X} = x) = \sum_{i=1}^{N-k+1} \mathbf{P}(\mathbb{X} \geq i)$$

3. L'événement $[\mathbb{X} \geq i]$ signifie que toutes les k boules tirées ont un numéro supérieur ou égal à i (choisies parmi $N - i + 1$ boules). Ainsi :

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} \geq i) = \frac{\binom{N-i+1}{k}}{\binom{N}{k}}$$

En utilisant l'identité précédente du crosse de hockey :

$$\sum_{i=1}^{N-k+1} \binom{N-i+1}{k} = \binom{N+1}{k+1}$$

D'où :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{\binom{N+1}{k+1}}{\binom{N}{k}} = \frac{\frac{(N+1)!}{(k+1)!(N-k)!}}{\frac{N!}{k!(N-k)!}} = \frac{N+1}{k+1}$$

Correction de l'exercice 8 : [ÉNONCÉ]

1. Réécrivons $k = \sum_{j=0}^{k-1} 1$:

$$\sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=0}^{k-1} 1 \right) \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=j+1}^n \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) \right)$$

Or $\sum_{k=j+1}^n \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \mathbf{P}(j < \mathbb{X} \leq n) = \mathbf{P}(\mathbb{X} > j) - \mathbf{P}(\mathbb{X} > n)$. D'où :

$$\sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{P}(\mathbb{X} > j) - n \mathbf{P}(\mathbb{X} > n)$$

2. a. $\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbf{P}(\mathbb{X} = k) \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} (n+1)\mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = (n+1)\mathbf{P}(\mathbb{X} > n) \geq n\mathbf{P}(\mathbb{X} > n).$
- b. La suite des restes d'une série convergente tend vers 0, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = 0$, ce qui implique par encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\mathbf{P}(\mathbb{X} > n) = 0$. En faisant tendre $n \rightarrow +\infty$ dans l'égalité de la question 1, on en déduit la convergence de la série et l'égalité $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathbb{X} > k).$
3. Si $\sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(\mathbb{X} > k)$ converge, les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(\mathbb{X} > k)$ sont majorées par S. D'après la question 1, $\sum_{k=0}^n k\mathbf{P}(\mathbb{X} = k) \leq S$. La série à termes positifs $\sum k\mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$ a ses sommes partielles majorées, donc elle converge : $\mathbb{X}$ admet une espérance.
4. On remarque que $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$. Par une interversion de sommes similaire :

$$\sum_{k=0}^n k^2 \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \sum_{j=0}^{n-1} (2j+1) \mathbf{P}(\mathbb{X} > j) - n^2 \mathbf{P}(\mathbb{X} > n)$$

Si $\mathbf{E}(\mathbb{X}^2)$ existe, $n^2 \mathbf{P}(\mathbb{X} > n) \rightarrow 0$, d'où la formule demandée.

Correction de l'exercice 9 : [ÉNONCÉ]

1. Développons le produit $(\mathbb{X} - a)(b - \mathbb{X})$:

$$(\mathbb{X} - a)(b - \mathbb{X}) = -\mathbb{X}^2 + (a + b)\mathbb{X} - ab$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}((\mathbb{X} - a)(b - \mathbb{X})) = -\mathbf{E}(\mathbb{X}^2) + (a + b)m - ab$$

Utilisons $\mathbf{E}(\mathbb{X}^2) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) + m^2$:

$$\mathbf{E}((\mathbb{X} - a)(b - \mathbb{X})) = -m^2 - \mathbf{V}(\mathbb{X}) + am + bm - ab = (m - a)(b - m) - \mathbf{V}(\mathbb{X})$$

2. a. Posons $x = m - a$ et $y = b - m$. On a $x + y = b - a$. Par l'inégalité $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$, on a :

$$(m - a)(b - m) \leq \frac{(b - a)^2}{4}$$

Puisque $\mathbb{X}(\Omega) \subset [a, b]$, la variable $(\mathbb{X} - a)(b - \mathbb{X})$ est presque sûrement positive, donc son espérance est positive : $\mathbf{E}((\mathbb{X} - a)(b - \mathbb{X})) \geq 0$. On en déduit que $\mathbf{V}(\mathbb{X}) \leq (m - a)(b - m) \leq \frac{(b - a)^2}{4}$.

- b. Ce majorant est atteint pour une variable de Bernoulli prenant les valeurs a et b avec probabilité $1/2$ chacune. On ne peut donc pas l'améliorer.

Correction de l'exercice 10 : [ÉNONCÉ]

1. Le système des probabilités s'écrit :

$$\begin{cases} p_0 + p_1 + p_2 = 1 \\ p_1 + 2p_2 = 1 \\ p_1 + 4p_2 = 5/3 \end{cases}$$

Par soustraction des lignes 2 et 3 : $2p_2 = 2/3 \Rightarrow p_2 = 1/3$. Puis $p_1 = 1 - 2(1/3) = 1/3$, et $p_0 = 1 - 1/3 - 1/3 = 1/3$. La loi est donc la loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$.

2. a. φ est clairement linéaire. De plus, $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$. Soit $Q \in \ker(\varphi)$. Q est un polynôme de degré $\leq n$ possédant $n + 1$ racines distinctes $x_0, \dots, x_n$. Donc

- $Q = 0$. φ est injective entre deux espaces de même dimension finie, c'est donc un automorphisme.
- b. La matrice de φ dans les bases canoniques est la matrice de Vandermonde $V(x_0, \dots, x_n)$ de taille $(n+1) \times (n+1)$ dont le coefficient (i, j) est x_j^i ($0 \leq i, j \leq n$).
- c. Oui. Les moments $\mathbf{E}(\mathbb{X}^k) = \sum_{j=0}^n p_j x_j^k$ forment un système linéaire d'inconnues $(p_0, \dots, p_n)$ dont la matrice est la transposée de la matrice de Vandermonde. Comme les x_j sont distincts, cette matrice est inversible, garantissant l'unicité de la loi $(p_0, \dots, p_n)$.

Correction de l'exercice 11 : [ÉNONCÉ]

- Par la propriété de la variance : $V(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^2) - \mathbf{E}(\mathbb{X})^2 = 1 - \alpha^2 \geq 0$, donc $\alpha^2 \leq 1 \Rightarrow \alpha \in [-1, 1]$.
- Considérons la variable aléatoire $(\mathbb{X}^2 - 1)^2 \geq 0$. Son espérance est :

$$\mathbf{E}((\mathbb{X}^2 - 1)^2) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^4 - 2\mathbb{X}^2 + 1) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^4) - 2\mathbf{E}(\mathbb{X}^2) + 1 = 1 - 2(1) + 1 = 0$$

Une variable aléatoire positive d'espérance nulle est presque sûrement nulle. Ainsi, $\mathbf{P}(\mathbb{X}^2 = 1) = 1$, ce qui signifie que $\mathbb{X}$ ne prend ses valeurs que dans $\{-1, 1\}$. Posons $p = \mathbf{P}(\mathbb{X} = 1)$ et $1 - p = \mathbf{P}(\mathbb{X} = -1)$.

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 1 \cdot p + (-1) \cdot (1 - p) = 2p - 1 = \alpha \Rightarrow p = \frac{1 + \alpha}{2}$$

La loi de $\mathbb{X}$ est donc : $\mathbf{P}(\mathbb{X} = 1) = \frac{1 + \alpha}{2}$ et $\mathbf{P}(\mathbb{X} = -1) = \frac{1 - \alpha}{2}$.

Correction de l'exercice 12 : [ÉNONCÉ]

- On a $\mathbf{E}(\alpha\mathbb{X} + \beta) = \alpha\mathbf{E}(\mathbb{X}) + \beta$. Donc $(\alpha\mathbb{X} + \beta) - \mathbf{E}(\alpha\mathbb{X} + \beta) = \alpha(\mathbb{X} - \mathbf{E}(\mathbb{X}))$. Ainsi $\mu_n(\alpha\mathbb{X} + \beta) = \alpha^n \mu_n(\mathbb{X})$. Le rapport devient : $\frac{\alpha^4 \mu_4(\mathbb{X})}{(\alpha^2 \mu_2(\mathbb{X}))^2} - 3 = \frac{\mu_4(\mathbb{X})}{(\mu_2(\mathbb{X}))^2} - 3 = K(\mathbb{X})$.
- Posons $Y = (\mathbb{X} - \mathbf{E}(\mathbb{X}))^2$. On a $V(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 \geq 0$. Or $\mathbf{E}(Y) = \mu_2(\mathbb{X})$ et $\mathbf{E}(Y^2) = \mu_4(\mathbb{X})$. D'où $\mu_4(\mathbb{X}) - (\mu_2(\mathbb{X}))^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{\mu_4(\mathbb{X})}{(\mu_2(\mathbb{X}))^2} \geq 1$. Ainsi $K(\mathbb{X}) \geq 1 - 3 = -2$.
- Pour une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, en calculant la centration et les moments centrés (ou via la fonction génératrice des moments), on obtient $\mu_2 = \frac{1-p}{p^2}$ et $\mu_4 = \frac{(1-p)(p^2 - 9p + 9)}{p^4}$.
Ainsi $K(\mathbb{X}) = 6 + \frac{p^2}{1-p}$.

Correction de l'exercice 13 : [ÉNONCÉ]

- a. Code Python :

```

1  import numpy.random as rd
2
3  def simu_Y(n, p):
4      X = rd.binomial(n, p)
5      if X == 0:
6          return rd.randint(1, n + 1)
7      else:
8          return X

```

- b. Pour obtenir une approximation de l'espérance par la loi des grands nombres :

```

1 N = 100000
2 moyenne = sum(simu_Y(10, 0.5) for _ in range(N))
  ↪ / N

```

2. Utilisons la formule de l'espérance totale avec le SCE ($[X = 0], [X \neq 0]$) :

$$\mathbf{E}(Y_n) = \mathbf{E}(Y_n \mid [X = 0])\mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{E}(Y_n \mid [X \neq 0])\mathbf{P}(X \neq 0)$$

— Sachant $[X = 0]$, $Y_n \sim \mathcal{U}([1, n])$, donc $\mathbf{E}(Y_n \mid [X = 0]) = \frac{n+1}{2}$.

— Sachant $[X \neq 0]$, $Y_n = X$. Remarquons que $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(X \mid [X = 0])\mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{E}(X \mid [X \neq 0])\mathbf{P}(X \neq 0)$. Puisque $\mathbf{E}(X \mid [X = 0]) = 0$, on a $\mathbf{E}(X \mid [X \neq 0])\mathbf{P}(X \neq 0) = \mathbf{E}(X) = np$.

D'où :

$$\mathbf{E}(Y_n) = \frac{n+1}{2}(1-p)^n + np$$

Correction de l'exercice 14 : [ÉNONCÉ]

- $f'(x) = x^{q-1} - a$. $f'(x) = 0 \iff x = a^{\frac{1}{q-1}}$. La fonction admet un minimum absolu en ce point qui vaut $f(a^{\frac{1}{q-1}}) = 0$ (car $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).
 - Puisque le minimum de f est 0, $f(x) \geq 0$ pour tout x . En posant $x = b$, on obtient $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.
- En posant $\tilde{X} = \frac{X}{\mathbf{E}(X^p)^{1/p}}$ et $\tilde{Y} = \frac{Y}{\mathbf{E}(Y^q)^{1/q}}$, on applique l'inégalité point par point :

$$\tilde{X}\tilde{Y} \leq \frac{\tilde{X}^p}{p} + \frac{\tilde{Y}^q}{q}$$

En prenant l'espérance :

$$\mathbf{E}(\tilde{X}\tilde{Y}) \leq \frac{\mathbf{E}(\tilde{X}^p)}{p} + \frac{\mathbf{E}(\tilde{Y}^q)}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Ce qui donne l'inégalité de Hölder en multipliant par les dénominateurs.

- Appliquer Hölder à $X = Z^r$ et $Y = 1$ avec $p' = s/r > 1$.

Correction de l'exercice 15 : [ÉNONCÉ]

- Code Python :

```

1 import numpy.random as rd
2
3 def polya(n, a, b):
4     blanches = a
5     noires = b
6     count_blanches = 0
7     for _ in range(n):
8         if rd.rand() < blanches / (blanches +
9             ↪ noires):
10             count_blanches += 1
11             blanches += 1
12         else:
13             noires += 1
14     return count_blanches

```

2. Chaque tirage individuel donnant k blanches et $n - k$ noires aura au dénominateur $(a + b)(a + b + 1) \dots (a + b + n - 1) = (a + b)^{[n]}$ et au numérateur $a^{[k]}b^{[n-k]}$, peu importe l'ordre. Comme il y a $\binom{n}{k}$ ordres possibles, la formule est vérifiée.
3. On montre par récurrence ou en utilisant les indicateurs I_j (variable indicatrice du tirage de la j -ième blanche) que $\mathbf{P}(I_j = 1) = \frac{a}{a + b}$. Par linéarité, $\mathbf{E}(\mathbb{X}_n) = n \frac{a}{a + b}$.

Correction de l'exercice 16 : [ÉNONCÉ]

1. ****Vrai**** : La conditionnement par l'univers entier ne modifie pas la loi de la variable.
2. ****Faux**** : Il manque les facteurs de probabilité $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(\bar{A})$.
3. ****Vrai**** : C'est la formule exacte de l'espérance totale.
4. ****Vrai**** : Si la variable est indépendante de l'événement conditionnant, sa loi conditionnelle est sa loi marginale.
5. ****Vrai**** : Propriété de monotonie de l'espérance conditionnelle (qui reste une espérance par rapport à une probabilité conditionnelle).
6. ****Vrai**** : Conséquence directe de l'indépendance des deux variables aléatoires.

Correction de l'exercice 17 : [ÉNONCÉ]

1. La partie s'arrête dès le premier échec. $\mathbb{X} + 1$ représente le rang du premier échec dans une suite d'épreuves à succès variables alternés (Alice aux coups impairs, Bob aux coups pairs). Pour $k \geq 0$, la probabilité que la partie atteigne au moins k coups valides fait intervenir une alternance de paramètres. Formellement, $\mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$ correspond à la probabilité de réussir les k premiers coups et de rater le $(k + 1)$ -ième.

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{p_A(1 + p_B)}{1 - p_A p_B}$$

2. Sachant $[\mathbb{X} \geq 1]$, Alice a réussi son premier coup. On repart sur un échange où Bob joue en premier :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X} \mid [\mathbb{X} \geq 1]) = 1 + \frac{p_B(1 + p_A)}{1 - p_A p_B}$$

Correction de l'exercice 18 : [ÉNONCÉ]

1. Sachant $[\mathbb{X}_k = i]$, au tirage $(k + 1)$, les boules restantes sont $1, \dots, i$. Le tirage est uniforme sur $\llbracket 1, i \rrbracket$. D'où :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}_{k+1} \mid [\mathbb{X}_k = i]) = \frac{i + 1}{2}$$

2. Par la formule de l'espérance totale :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}_{k+1}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}(\mathbb{X}_{k+1} \mid [\mathbb{X}_k = i]) \mathbf{P}(\mathbb{X}_k = i) = \sum_{i=1}^N \frac{i + 1}{2} \mathbf{P}(\mathbb{X}_k = i) = \frac{\mathbf{E}(\mathbb{X}_k) + 1}{2}$$

3. La suite $u_k = \mathbf{E}(\mathbb{X}_k)$ est arithmético-géométrique : $u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k + \frac{1}{2}$. Le point fixe est $L = 1$. La suite $(u_k - 1)$ est géométrique de raison $1/2$. Au premier tirage, $\mathbb{X}_1 \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$, donc $\mathbf{E}(\mathbb{X}_1) = \frac{N + 1}{2}$. Ainsi :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}_k) = 1 + \left(\frac{N - 1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1}$$

Correction de l'exercice 19 : [ÉNONCÉ]

1. La variable $\mathbb{X} \cdot \mathbf{1}_A$ vaut $\mathbb{X}(\omega)$ si $\omega \in A$ et 0 sinon. Par le théorème de transfert :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X} \cdot \mathbf{1}_A) = \sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} x \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap A)$$

Or par définition de la probabilité conditionnelle, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap A) = \mathbf{P}_A(\mathbb{X} = x) \mathbf{P}(A)$. D'où :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X} \cdot \mathbf{1}_A) = \mathbf{P}(A) \sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} x \mathbf{P}_A(\mathbb{X} = x) = \mathbf{P}(A) \mathbf{E}(\mathbb{X} | A)$$

2. Comme $\mathbb{X} \leq |\mathbb{X}|$, on a $\mathbb{X} \cdot \mathbf{1}_A \leq |\mathbb{X}| \cdot \mathbf{1}_A \leq |\mathbb{X}|$. Par croissance de l'espérance :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X} \cdot \mathbf{1}_A) \leq \mathbf{E}(|\mathbb{X}|) \implies \mathbf{E}(\mathbb{X} | A) \leq \frac{\mathbf{E}(|\mathbb{X}|)}{\mathbf{P}(A)}$$

Correction de l'exercice 20 : [ÉNONCÉ]

1. D'après la formule d'Koenig-Huygens, $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^2) - \mathbf{E}(\mathbb{X})^2$. Par la formule de l'espérance totale sur $\mathbb{X}^2$:

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}^2) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(\mathbb{X}^2 | A_k) \mathbf{P}(A_k)$$

Or $\mathbf{E}(\mathbb{X}^2 | A_k) = \mathbf{V}(\mathbb{X} | A_k) + \mathbf{E}(\mathbb{X} | A_k)^2$. En réinjectant, on obtient le résultat.

2. Soient $A_1 = [\text{Pile}]$ et $A_2 = [\text{Face}]$. $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = 1/2$.

— Sachant A_1 , $\mathbb{X} \sim \mathcal{B}(6, 1/3)$, donc $\mathbf{E}(\mathbb{X} | A_1) = 2$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X} | A_1) = 4/3$.

— Sachant A_2 , $\mathbb{X} \sim \mathcal{B}(6, 2/3)$, donc $\mathbf{E}(\mathbb{X} | A_2) = 4$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X} | A_2) = 4/3$.

Espérance totale : $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(4) = 3$. Variance totale :

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} + 4 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} + 16 \right) - 3^2 = \frac{4}{3} + 10 - 9 = \frac{7}{3}$$

Correction de l'exercice 21 : [ÉNONCÉ]

1. En utilisant la base des polynômes factoriels $Q_i(x) = x(x-1) \dots (x-i+1)$, on a $\mathbf{E}(Q_i(\mathbb{Y})) = \lambda^i$. Par changement de base, $\mathbf{E}(\mathbb{Y}^n)$ est une combinaison linéaire de λ^i , d'où l'existence de L_n .

2. $\psi(\lambda) = e^\lambda L_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{+\infty} i^n \frac{\lambda^i}{i!}$. En dérivant terme à terme :

$$\psi'(\lambda) = \sum_{i=1}^{+\infty} i^{n+1} \frac{\lambda^{i-1}}{i!} \implies \lambda \psi'(\lambda) = e^\lambda L_{n+1}(\lambda)$$

Or $\lambda \psi'(\lambda) = \lambda(e^\lambda L_n(\lambda) + e^\lambda L'_n(\lambda)) = e^\lambda(\lambda L_n(\lambda) + \lambda L'_n(\lambda))$. D'où la relation.

3. Pour $\lambda = 1$, $L_{n+1}(1) = L_n(1) + L'_n(1)$. On retrouve les nombres de Bell.

Correction de l'exercice 22 : [ÉNONCÉ]

Considérons l'espace vectoriel des variables aléatoires d'ordre 2 muni du produit scalaire $\langle U, V \rangle = \mathbf{Cov}(U, V)$. La norme associée est l'écart-type $\sigma(U) = \sqrt{\mathbf{V}(U)}$. L'inégalité demandée n'est autre que l'« inégalité triangulaire » de Minkowski appliquée à ce produit scalaire :

$$\sigma(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = \|\mathbb{X} + \mathbb{Y}\| \leq \|\mathbb{X}\| + \|\mathbb{Y}\| = \sigma(\mathbb{X}) + \sigma(\mathbb{Y})$$

Par récurrence, cette propriété se généralise à une somme de n variables aléatoires :

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{X}_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \sigma(\mathbb{X}_i)$$

Correction de l'exercice 23 : [ÉNONCÉ]

1. $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (série télescopique), donc $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$. $na_n = \frac{1}{n+1}$, dont la série diverge (série harmonique).
2. $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \mathbf{P}(\mathcal{X} = n) = 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2\alpha = 1 \implies \alpha = \frac{1}{2}$.
3.
 - a. Les $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ forment un système complet d'événements.
 - b. Par symétrie, $\mathbf{P}_{A_n}(\mathcal{X} = n) = \mathbf{P}_{A_n}(\mathcal{X} = -n) = 1/2$. Donc $\mathbf{E}(\mathcal{X} \mid A_n) = n(1/2) + (-n)(1/2) = 0$.
 - c. La somme vaut $\sum 0 \cdot \mathbf{P}(A_n) = 0$.
4. La série des valeurs absolues $\sum |n| \mathbf{P}(\mathcal{X} = n) = \sum na_n$ diverge. $\mathcal{X}$ n'admet donc pas d'espérance, ce qui explique pourquoi la formule de l'espérance totale ne s'applique pas directement.