

Programme

Compléments sur les suites et séries réelles

CE QUE DIT LE PROGRAMME EN ECG2 :

L'objectif de ce paragraphe est d'introduire de nouveaux outils d'étude des suites et des séries, en particulier les critères de comparaison, tout en consolidant les acquis de première année.

1 – Comparaison des suites réelles

Suite négligeable devant une suite, suites équivalentes.

Notations $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$.

On réécrira les croissances comparées de première année.

On pratiquera des études du comportement asymptotique de suites.

CE QUE DISAIT LE PROGRAMME EN ECG1 :

Suites de nombres réels

L'étude des suites numériques au premier semestre permet aux étudiants de consolider la notion de suite réelle et de convergence abordée en classe terminale. Tout exposé trop théorique sur ces notions est à exclure.

Cette première approche des suites élargit la conception de la notion de fonction.

Les calculs d'intérêts, d'amortissement ou de multiplicateurs keynesiens peuvent les mettre en situation. L'étude des suites classiques pourra être motivée puis se faire en lien étroit avec la partie probabilités pour mettre en avant l'utilité de cet outil numérique.

On utilisera autant que possible la représentation graphique des suites pour illustrer ou conjecturer leur comportement, en particulier pour illustrer la notion de convergence.

1 – Généralités sur les suites réelles

Définitions, notations.

Exemples de définitions : par formules récursives ou explicites, par restriction d'une fonction de variable réelle aux entiers.

2 – Suites usuelles : formes explicites

Suite arithmétique, suite géométrique.

Suite arithmético-géométrique.

Formule donnant $\sum_{k=0}^n q^k$.

Calculs de sommes portant sur les suites arithmétiques et géométriques.

Les étudiants devront savoir se ramener au cas d'une suite géométrique.

3 – Convergence d'une suite réelle

Aucune démonstration concernant les résultats de cette section n'est exigible.

Limite d'une suite, suites convergentes.

Généralisation aux limites infinies.

Unicité de la limite.

Opérations algébriques sur les suites convergentes.

Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.

Existence d'une limite par encadrement.

Suites monotones.

Théorème de la limite monotone.

Suites adjacentes.

Si les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes vers une même limite ℓ , la suite (u_n) converge vers ℓ .

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , élément de $\mathbb{R}$, si tout intervalle ouvert contenant ℓ , contient les termes u_n pour tous les indices n , hormis un nombre fini d'entre eux.

Aucune technicité sur ces opérations ne sera exigée.

Toute suite croissante (respectivement décroissante) et majorée (respectivement minorée) converge. Toute suite croissante (respectivement décroissante) non majorée (respectivement non minorée) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

4 – Comportement asymptotique des suites usuelles

Croissances comparées.

Comparaison des suites (n^a) , (q^n) , $((\ln(n))^b)$.
Résultats admis.

Étude élémentaire des séries

Ce chapitre fait suite au chapitre sur les suites numériques réelles du premier semestre, une série étant introduite comme une suite de sommes partielles. Aucune technicité n'est exigible en première année. L'étude des variables aléatoires discrètes sera l'occasion d'une mise en œuvre naturelle de ces premières connaissances sur les séries. L'étude des séries sera complétée en seconde année par les techniques de comparaison sur les séries à termes positifs.

5 – Séries numériques à termes réels

Série de terme général u_n .

Sommes partielles associées.

Définition de la convergence.

Combinaison linéaire de séries convergentes.

Série à termes positifs.

Convergence absolue.

La convergence absolue implique la convergence

$\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge si $\sum_{k=n_0}^n u_k$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

On pratiquera, sur des exemples simples, l'étude des séries (convergence, calcul exact ou approché de la somme). On soulignera l'intérêt de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ pour l'étude de la suite (u_n) .

En première année, cette notion est abordée uniquement pour permettre une définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

Résultat admis.

6 – Séries numériques usuelles

Étude des séries $\sum q^n$, $\sum nq^{n-1}$, $\sum n(n-1)q^{n-2}$
et calcul de leurs sommes.

Convergence et somme de la série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$.

Résultats admis.