

Exercice 1 – (Loi d'un couple, lois marginales, espérance et variance)

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère n urnes numérotées de 1 à n .

On suppose que : $\forall k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, l'urne numéro k contient k boules numérotées de 1 à k .

On choisit au hasard une urne parmi les n et dans cette urne on tire au hasard une boule.

On note $\mathbb{X}_n$ la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et $\mathbb{N}_n$ la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule obtenue.

1. Déterminer la loi du couple $(\mathbb{N}_n, \mathbb{X}_n)$.
2. En déduire la loi de la variable aléatoire $\mathbb{N}_n$ sous forme de somme.
3. Calculer l'espérance et la variance de $\mathbb{N}_n$.

Exercice 2

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac.

On note $\mathbb{X}$ le numéro du premier jeton et $\mathbb{Y}$ le numéro du second jeton tiré.

Déterminer la covariance des variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.

Exercice 3 – (Non indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{X}^2$)

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $\llbracket -1 ; 1 \rrbracket$. On note $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^2$.

1. Montrer que les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes.
2. Calculer $\text{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Commenter.

Exercice 4 – (Formule des queues)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{X}$ une variable aléatoire discrète telle que $\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket 0 ; n \rrbracket$.

Montrer que $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}([\mathbb{X} > k])$.

Exercice 5

On considère trois variables aléatoires $\mathbb{U}$, $\mathbb{V}$, et $\mathbb{W}$, indépendantes et telles que $\mathbb{U}$ et $\mathbb{W}$ suivent la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $\mathbb{V}$ suit la loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$.

On pose $\mathbb{X} = \mathbb{U} + \mathbb{V}$ et $\mathbb{Y} = \mathbb{V} + \mathbb{W}$.

1. Rappeler les lois de $\mathbb{X}$ et de $\mathbb{Y}$.
2. a. Montrer que $\text{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ existe et la calculer.
b. En déduire le coefficient de corrélation linéaire de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.

Exercice 6

Un auto-stoppeur attend au péage d'une autoroute pendant une certaine période.

On admet que le nombre de véhicules franchissant le péage pendant cette période est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

À chaque fois qu'un véhicule franchit le péage, il lance une pièce truquée qui donne Pile avec la probabilité p . On pose $q = 1 - p$.

On note $\mathbb{N}$, $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ respectivement le nombre de lancers, le nombre de Piles obtenus et le nombre de Faces obtenues.

1.
 - a. Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels, calculer la probabilité $\mathbf{P}_{[\mathbb{N}=j]}([\mathbb{X} = i])$.
 - b. En déduire la loi du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{N})$.
 - c. Montrer que $\mathbb{X}$ suit une loi de Poisson de paramètre λp .
2. Expliquer sans aucun calcul pourquoi $\mathbb{Y}$ suit une loi de Poisson de paramètre λq .
3. Montrer que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes.
4.
 - a. Montrer que : $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{N}) + \mathbf{V}(\mathbb{X}) - 2 \mathbf{Cov}(\mathbb{N}, \mathbb{X})$.
 - b. En déduire $\mathbf{Cov}(\mathbb{N}, \mathbb{X})$.
 - c. Donner de même $\mathbf{Cov}(\mathbb{N}, \mathbb{Y})$.

Exercice 7

Soit $(\mathbb{X}_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que les $\mathbb{X}_n$ prennent des valeurs strictement positives.

On pose $\mathbf{E}(\mathbb{X}_k) = a$, ($a < +\infty$), $\mathbf{E}\left(\frac{1}{\mathbb{X}_k}\right) = b$, ($b < +\infty$) et $\mathbb{S}_n = \mathbb{X}_1 + \dots + \mathbb{X}_n$.

1. Montrer que $\mathbf{E}\left(\frac{1}{\mathbb{S}_n}\right)$ est fini et que $\mathbf{E}\left(\frac{\mathbb{X}_k}{\mathbb{S}_n}\right) = \frac{1}{n}$, pour $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$.
2. Calculer $\mathbf{E}\left(\frac{\mathbb{S}_m}{\mathbb{S}_n}\right)$ pour $n, m \geq 1$.

Exercice 8 – (Espérance conditionnelle)

1. Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, telles que $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{Y}(\Omega) = \llbracket 1 ; n \rrbracket$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on appelle espérance conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant l'événement $[\mathbb{X} = k]$ réalisé le réel $\mathbf{E}_{[\mathbb{X}=k]}(\mathbb{Y})$ défini par :

$$\mathbf{E}_{[\mathbb{X}=k]}(\mathbb{Y}) = \sum_{i=1}^n i \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}([\mathbb{Y} = i]).$$

Démontrer l'égalité $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}_{[\mathbb{X}=k]}(\mathbb{Y}) \mathbf{P}([\mathbb{X} = k])$.

On dispose de n urnes $\mathbb{U}_1, \dots, \mathbb{U}_n$. Pour tout $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, l'urne $\mathbb{U}_k$ contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit une urne au hasard, puis on tire une boule dans cette urne.

On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

2. Quelle est la loi de X ?
3.
 - a. Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$. Préciser l'espérance conditionnelle de Y sachant $[X = k]$, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.
 - b. Dédurre de la question 1. l'espérance de Y .
4. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .
5.
 - a. Déterminer la loi de Y sous forme d'une somme.
 - b. Déterminer la variance $V(Y)$ de Y en fonction de n .

Exercice 9

Le nombre de voitures vendues par un concessionnaire chaque jour est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Lorsqu'un client se présente pour acheter une voiture, on admet que la probabilité qu'il demande un crédit est égale à p , avec $0 < p < 1$.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients qui dans la journée demande un crédit pour acheter une voiture.

1. Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer $P_{[X=n]}([Y = k])$.
2. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .
3. Déterminer la loi de Y , puis calculer l'espérance et la variance de Y .
4. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de clients qui achètent dans la journée une voiture au comptant.
 - a. Déterminer la loi de Z .
 - b. Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 10 – (Variables décorrélées non indépendantes)

Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p \in]0; 1[$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V) .
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de U et V .
3. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 11 – (Loi d'une suite suivant une loi de Bernoulli)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi définie par :

$$P([X_n = 0]) = 1 - p, \quad P([X_n = 1]) = p, \quad \text{avec } 0 < p < 1.$$

On pose

$$Y_n = X_n X_{n+1}, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n \quad \text{et} \quad V_n = Y_1 + \dots + Y_n.$$

1. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{S}_n)$ et $\mathbf{V}(\mathbb{S}_n)$.
2. a. Déterminer la loi de $\mathbb{Y}_n$.
b. En déduire $\mathbf{E}(\mathbb{V}_n)$, $\mathbf{V}(\mathbb{V}_n)$.
3. Calculer $\mathbf{Cov}(\mathbb{S}_n, \mathbb{V}_n)$.

Exercice 12 – (Min et Max)

Soient n et N des entiers supérieurs ou égaux à 2 et $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes et distribuées uniformément sur l'ensemble $\llbracket 1 ; N \rrbracket$ i.e.

$$\mathbf{P}(\mathbb{X}_i = k) = \frac{1}{N} \text{ pour } k \in \llbracket 1 ; N \rrbracket.$$

On désigne par $\mathbb{U}_n$ leur minimum et par $\mathbb{V}_n$ leur maximum.

1. Calculer la loi de $\mathbb{V}_n$.
2. Calculer la loi jointe de $\mathbb{U}_n$ et $\mathbb{V}_n$ puis $\mathbf{P}(\mathbb{U}_n = \mathbb{V}_n)$.
3. Trouver un équivalent lorsque N tend vers $+\infty$ (n fixé) de $\mathbf{E}(\mathbb{V}_n)$ et $\mathbf{V}(\mathbb{V}_n)$.
On pourra utiliser la formule de l' [exercice \(??\)](#).
4. a. $(\star)$ Calculer la probabilité des événements $[\mathbb{X}_1 = j] \cap [\mathbb{X}_2 = k]$ et $[\mathbb{X}_1 = j]$ sachant $[\mathbb{U}_n = r]$ pour $j, k \in \llbracket 1 ; N \rrbracket$.
b. Sous le conditionnement, $[\mathbb{U}_n = r]$, les variables $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ restent-elle indépendantes ?

Exercice 13 – (Covariance, suite de variables aléatoires)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n .

On tire les boules successivement sans remise.

On dit qu'il y a rencontre au i -ème tirage si la boule tirée porte le numéro i .

On note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire égale au nombre de rencontres.

1. Donner l'espace probabilisé de cette expérience.
2. On définit, pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ la variable aléatoire $\mathbb{X}_i$ indicatrice de l'évènement « il y a rencontre au i -ème tirage ».
 - a. Calculer $\mathbf{P}([\mathbb{X}_i = 1])$, puis $\mathbf{E}(\mathbb{X}_i)$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$.
 - b. En déduire $\mathbf{E}(\mathbb{X})$.
3. a. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, i \neq j$, calculer $\mathbf{P}([\mathbb{X}_i = 1] \cap [\mathbb{X}_j = 1])$.
b. En déduire $\mathbf{Cov}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j)$.
c. Déterminer $\mathbf{V}(\mathbb{X})$.

Exercice 14 – (Loi du maximum d'une suite de variables indépendante suivant une loi uniforme)

Soit un entier $n \geq 2$.

Soient $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n$ variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $\llbracket 1 ; n \rrbracket$.

On note $\mathbb{Y}$ la variable aléatoire définie par $\mathbb{Y} = \max(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n)$.

1. a. Déterminer la fonction de répartition de $\mathbb{Y}$.
- b. En déduire la loi de $\mathbb{Y}$.

2. Montrer que $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

Exercice 15 – (Min et Max d'une suite de variables indépendantes suivant une loi géométrique)

Soit un entier $n \geq 2$.

On considère n variables aléatoires $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n$ indépendantes et de même loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.

On pose $\mathbb{I}_n$ la variable aléatoire définie par $\mathbb{I}_n = \min(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n)$ et $\mathbb{S}_n$ la variable aléatoire définie par $\mathbb{S}_n = \max(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n)$.

1. Montrer que, $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbf{P}(\mathbb{X}_i > k) = (1 - p)^k$.
2. a. Déterminer, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}(\mathbb{I}_n > k)$, puis en déduire la loi de $\mathbb{I}_n$.
- b. En déduire l'espérance de $\mathbb{I}_n$.
3. a. Déterminer, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}(\mathbb{S}_n \leq k)$, puis en déduire la loi de $\mathbb{S}_n$.
- b. En déduire, en utilisant la formule du binôme, que $\mathbf{E}(\mathbb{S}_n) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{1 - q^k}$, où $q = 1 - p$.

Exercice 16 – (Loi conditionnelle et lois usuelles)

Soit m est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2.

On considère une suite de variables aléatoires $(\mathbb{U}_n)_{n \geq 1}$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $\mathbb{U}_n$ suit la loi uniforme sur $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}$.

On considère également une suite de variables aléatoires $(\mathbb{X}_n)_{n \geq 1}$ définies elles aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, et telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, et pour tout k de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la loi de $\mathbb{X}_n$ conditionnellement à l'événement $\left[\mathbb{U}_n = \frac{k}{n}\right]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$.

1. On considère une variable aléatoire $\mathbb{Y}$ suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$.
Rappeler la valeur de l'espérance de $\mathbb{Y}$ puis montrer que $\mathbf{E}(\mathbb{Y}(\mathbb{Y} - 1)) = m(m - 1)p^2$.
2. Donner la loi de $\mathbb{X}_1$.

Dans toute la suite, on suppose n supérieur ou égal à 2.

3. a. Déterminer $\mathbb{X}_n(\Omega)$, puis montrer que, pour tout i de $\mathbb{X}_n(\Omega)$, on a :

$$\mathbf{P}(\mathbb{X}_n = i) = \frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

- b. Utiliser la première question pour donner sans calcul la valeur de la somme

$$\sum_{i=1}^m i \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

Montrer alors que $\mathbf{E}(\mathbb{X}_n) = \frac{m(n-1)}{2n}$.

- c. En utilisant toujours la première question, donner sans calcul la valeur de la somme

$$\sum_{i=1}^m i(i-1) \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

Montrer alors que $\mathbf{E}(\mathbb{X}_n(\mathbb{X}_n - 1)) = \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

- d. En déduire finalement que $\mathbf{V}(\mathbb{X}_n) = \frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}$.