

Exercice 1 – (Loi d'un couple, lois marginales, espérance et variance) [CORRECTION P. 7]

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère n urnes numérotées de 1 à n .

On suppose que : $\forall k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, l'urne numéro k contient k boules numérotées de 1 à k .

On choisit au hasard une urne parmi les n et dans cette urne on tire au hasard une boule.

On note $\mathbb{X}_n$ la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et $\mathbb{N}_n$ la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule obtenue.

1. Déterminer la loi du couple $(\mathbb{N}_n, \mathbb{X}_n)$.
2. En déduire la loi de la variable aléatoire $\mathbb{N}_n$ sous forme de somme.
3. Calculer l'espérance et la variance de $\mathbb{N}_n$.

Exercice 2 [CORRECTION P. 8]

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac.

On note $\mathbb{X}$ le numéro du premier jeton et $\mathbb{Y}$ le numéro du second jeton tiré.

Déterminer la covariance des variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.

Exercice 3 – (Non indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{X}^2$) [CORRECTION P. 9]

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $\llbracket -1 ; 1 \rrbracket$. On note $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^2$.

1. Montrer que les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes.
2. Calculer $\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Commenter.

Exercice 4 – (Formule des queues) [CORRECTION P. 9]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{X}$ une variable aléatoire discrète telle que $\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket 0 ; n \rrbracket$.

Montrer que $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}([\mathbb{X} > k])$.

Exercice 5 [CORRECTION P. 10]

On considère trois variables aléatoires $\mathbb{U}$, $\mathbb{V}$, et $\mathbb{W}$, indépendantes et telles que $\mathbb{U}$ et $\mathbb{W}$ suivent la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $\mathbb{V}$ suit la loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$.

On pose $\mathbb{X} = \mathbb{U} + \mathbb{V}$ et $\mathbb{Y} = \mathbb{V} + \mathbb{W}$.

1. Rappeler les lois de $\mathbb{X}$ et de $\mathbb{Y}$.
2. a. Montrer que $\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ existe et la calculer.
b. En déduire le coefficient de corrélation linéaire de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.

Exercice 6 [CORRECTION P. 10]

Un auto-stoppeur attend au péage d'une autoroute pendant une certaine période.

On admet que le nombre de véhicules franchissant le péage pendant cette période est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

À chaque fois qu'un véhicule franchit le péage, il lance une pièce truquée qui donne Pile avec la probabilité p . On pose $q = 1 - p$.

On note $\mathbb{N}$, $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ respectivement le nombre de lancers, le nombre de Piles obtenus et le nombre de Faces obtenues.

1. a. Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels, calculer la probabilité $\mathbf{P}_{[\mathbb{N}=j]}([\mathbb{X} = i])$.
b. En déduire la loi du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{N})$.
c. Montrer que $\mathbb{X}$ suit une loi de Poisson de paramètre λp .
2. Expliquer sans aucun calcul pourquoi $\mathbb{Y}$ suit une loi de Poisson de paramètre λq .
3. Montrer que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes.
4. a. Montrer que : $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{N}) + \mathbf{V}(\mathbb{X}) - 2 \mathbf{Cov}(\mathbb{N}, \mathbb{X})$.
b. En déduire $\mathbf{Cov}(\mathbb{N}, \mathbb{X})$.
c. Donner de même $\mathbf{Cov}(\mathbb{N}, \mathbb{Y})$.

Exercice 7 [CORRECTION P. 12]

Soit $(\mathbb{X}_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que les $\mathbb{X}_n$ prennent des valeurs strictement positives.

On pose $\mathbf{E}(\mathbb{X}_k) = a$, ($a < +\infty$, $\mathbf{E}\left(\frac{1}{\mathbb{X}_k}\right) = b$, $b < +\infty$ et $\mathbb{S}_n = \mathbb{X}_1 + \dots + \mathbb{X}_n$.

1. Montrer que $\mathbf{E}\left(\frac{1}{\mathbb{S}_n}\right)$ est fini et que $\mathbf{E}\left(\frac{\mathbb{X}_k}{\mathbb{S}_n}\right) = \frac{1}{n}$, pour $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$.
2. Calculer $\mathbf{E}\left(\frac{\mathbb{S}_m}{\mathbb{S}_n}\right)$ pour $n, m \geq 1$.

Exercice 8 – (Espérance conditionnelle) [CORRECTION P. 13]

1. Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, telles que $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{Y}(\Omega) = \llbracket 1 ; n \rrbracket$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on appelle espérance conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant l'événement $[\mathbb{X} = k]$ réalisé le réel $\mathbf{E}_{[\mathbb{X}=k]}(\mathbb{Y})$ défini par :

$$\mathbf{E}_{[\mathbb{X}=k]}(\mathbb{Y}) = \sum_{i=1}^n i \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}([\mathbb{Y} = i]).$$

Démontrer l'égalité $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}_{[\mathbb{X}=k]}(\mathbb{Y}) \mathbf{P}([\mathbb{X} = k])$.

On dispose de n urnes $\mathbb{U}_1, \dots, \mathbb{U}_n$. Pour tout $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, l'urne $\mathbb{U}_k$ contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit une urne au hasard, puis on tire une boule dans cette urne.

On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

2. Quelle est la loi de X ?
3.
 - a. Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$. Préciser l'espérance conditionnelle de Y sachant $[X = k]$, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.
 - b. Dédurre de la question 1. l'espérance de Y .
4. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .
5.
 - a. Déterminer la loi de Y sous forme d'une somme.
 - b. Déterminer la variance $V(Y)$ de Y en fonction de n .

Exercice 9 [CORRECTION P. 14]

Le nombre de voitures vendues par un concessionnaire chaque jour est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Lorsqu'un client se présente pour acheter une voiture, on admet que la probabilité qu'il demande un crédit est égale à p , avec $0 < p < 1$.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients qui dans la journée demande un crédit pour acheter une voiture.

1. Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer $P_{[X=n]}([Y = k])$.
2. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .
3. Déterminer la loi de Y , puis calculer l'espérance et la variance de Y .
4. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de clients qui achètent dans la journée une voiture au comptant.
 - a. Déterminer la loi de Z .
 - b. Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 10 – (Variables décorréélées non indépendantes) [CORRECTION P. 16]

Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p \in]0; 1[$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V) .
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de U et V .
3. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 11 – (Loi d'une suite suivant une loi de Bernoulli) [CORRECTION P. 16]

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi définie par :

$$P([X_n = 0]) = 1 - p, \quad P([X_n = 1]) = p, \quad \text{avec } 0 < p < 1.$$

On pose

$$Y_n = X_n X_{n+1}, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n \quad \text{et} \quad V_n = Y_1 + \dots + Y_n.$$

1. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{S}_n)$ et $\mathbf{V}(\mathbb{S}_n)$.
2. a. Déterminer la loi de $\mathbb{Y}_n$.
b. En déduire $\mathbf{E}(\mathbb{V}_n)$, $\mathbf{V}(\mathbb{V}_n)$.
3. Calculer $\mathbf{Cov}(\mathbb{S}_n, \mathbb{V}_n)$.

Exercice 12 – (Min et Max) [CORRECTION P. 18]

Soient n et N des entiers supérieurs ou égaux à 2 et $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes et distribuées uniformément sur l'ensemble $\llbracket 1 ; N \rrbracket$ i.e.

$$\mathbf{P}(\mathbb{X}_i = k) = \frac{1}{N} \text{ pour } k \in \llbracket 1 ; N \rrbracket.$$

On désigne par $\mathbb{U}_n$ leur minimum et par $\mathbb{V}_n$ leur maximum.

1. Calculer la loi de $\mathbb{V}_n$.
2. Calculer la loi jointe de $\mathbb{U}_n$ et $\mathbb{V}_n$ puis $\mathbf{P}(\mathbb{U}_n = \mathbb{V}_n)$.
3. Trouver un équivalent lorsque N tend vers $+\infty$ (n fixé) de $\mathbf{E}(\mathbb{V}_n)$ et $\mathbf{V}(\mathbb{V}_n)$.
On pourra utiliser la formule de l' [exercice \(??\)](#).
4. a. $(\star)$ Calculer la probabilité des événements $[\mathbb{X}_1 = j] \cap [\mathbb{X}_2 = k]$ et $[\mathbb{X}_1 = j]$ sachant $[\mathbb{U}_n = r]$ pour $j, k \in \llbracket 1 ; N \rrbracket$.
b. Sous le conditionnement, $[\mathbb{U}_n = r]$, les variables $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ restent-elle indépendantes ?

Exercice 13 – (Covariance, suite de variables aléatoires) [CORRECTION P. 20]

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n .

On tire les boules successivement sans remise.

On dit qu'il y a rencontre au i -ème tirage si la boule tirée porte le numéro i .

On note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire égale au nombre de rencontres.

1. Donner l'espace probabilisé de cette expérience.
2. On définit, pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ la variable aléatoire $\mathbb{X}_i$ indicatrice de l'évènement « il y a rencontre au i -ème tirage ».
 - a. Calculer $\mathbf{P}(\mathbb{X}_i = 1)$, puis $\mathbf{E}(\mathbb{X}_i)$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$.
 - b. En déduire $\mathbf{E}(\mathbb{X})$.
3. a. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, i \neq j$, calculer $\mathbf{P}(\mathbb{X}_i = 1 \cap \mathbb{X}_j = 1)$.
b. En déduire $\mathbf{Cov}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j)$.
c. Déterminer $\mathbf{V}(\mathbb{X})$.

Exercice 14 – (Loi du maximum d'une suite de variables indépendante suivant une loi uniforme) [CORRECTION P. 21]

Soit un entier $n \geq 2$.

Soient $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n$ variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $\llbracket 1 ; n \rrbracket$.

On note $\mathbb{Y}$ la variable aléatoire définie par $\mathbb{Y} = \max(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n)$.

1. a. Déterminer la fonction de répartition de $\mathbb{Y}$.

b. En déduire la loi de $\mathbb{Y}$.

2. Montrer que $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

Exercice 15 – (Min et Max d'une suite de variables indépendantes suivant une loi géométrique) [CORRECTION P. 22]

Soit un entier $n \geq 2$.

On considère n variables aléatoires $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n$ indépendantes et de même loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.

On pose $\mathbb{I}_n$ la variable aléatoire définie par $\mathbb{I}_n = \min(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n)$ et $\mathbb{S}_n$ la variable aléatoire définie par $\mathbb{S}_n = \max(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n)$.

1. Montrer que, $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbf{P}(\mathbb{X}_i > k) = (1 - p)^k$.

2. a. Déterminer, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}(\mathbb{I}_n > k)$, puis en déduire la loi de $\mathbb{I}_n$.

b. En déduire l'espérance de $\mathbb{I}_n$.

3. a. Déterminer, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbf{P}(\mathbb{S}_n \leq k)$, puis en déduire la loi de $\mathbb{S}_n$.

b. En déduire, en utilisant la formule du binôme, que $\mathbf{E}(\mathbb{S}_n) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{1 - q^k}$, où $q = 1 - p$.

Exercice 16 – (Loi conditionnelle et lois usuelles) [CORRECTION P. 23]

Soit m est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2.

On considère une suite de variables aléatoires $(\mathbb{U}_n)_{n \geq 1}$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $\mathbb{U}_n$ suit la loi uniforme sur $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}$.

On considère également une suite de variables aléatoires $(\mathbb{X}_n)_{n \geq 1}$ définies elles aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, et telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, et pour tout k de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la loi de $\mathbb{X}_n$ conditionnellement à l'événement $\left[\mathbb{U}_n = \frac{k}{n}\right]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$.

1. On considère une variable aléatoire $\mathbb{Y}$ suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$.

Rappeler la valeur de l'espérance de $\mathbb{Y}$ puis montrer que $\mathbf{E}(\mathbb{Y}(\mathbb{Y} - 1)) = m(m - 1)p^2$.

2. Donner la loi de $\mathbb{X}_1$.

Dans toute la suite, on suppose n supérieur ou égal à 2.

3. a. Déterminer $\mathbb{X}_n(\Omega)$, puis montrer que, pour tout i de $\mathbb{X}_n(\Omega)$, on a :

$$\mathbf{P}(\mathbb{X}_n = i) = \frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

- b. Utiliser la première question pour donner sans calcul la valeur de la somme

$$\sum_{i=1}^m i \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

Montrer alors que $\mathbf{E}(\mathbb{X}_n) = \frac{m(n-1)}{2n}$.

- c. En utilisant toujours la première question, donner sans calcul la valeur de la somme

$$\sum_{i=1}^m i(i-1) \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

Montrer alors que $\mathbf{E}(\mathbb{X}_n(\mathbb{X}_n - 1)) = \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

- d. En déduire finalement que $\mathbf{V}(\mathbb{X}_n) = \frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}$.

CORRIGÉS

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

1. On a déjà $\mathbb{X}_n(\Omega) = \mathbb{N}_n(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$.

Soient $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$.

L'événement $[\mathbb{N}_n = i] \cap [\mathbb{X}_n = j]$ est réalisé si et seulement si l'urne numéro j est choisie puis que la boule numéro i est tirée dans cette urne.

— Si $i > j$, cette boule n'existe pas dans l'urne j , donc

$$\mathbf{P}([\mathbb{N}_n = i] \cap [\mathbb{X}_n = j]) = 0.$$

— Si $i \leq j$, alors, d'après la loi des probabilités conditionnelles,

$$\mathbf{P}([\mathbb{N}_n = i] \cap [\mathbb{X}_n = j]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}_n = j]) \times \mathbf{P}_{[\mathbb{X}_n = j]}([\mathbb{N}_n = i]).$$

Or l'urne est choisie uniformément parmi les n urnes, donc $\mathbf{P}([\mathbb{X}_n = j]) = \frac{1}{n}$.

Sachant que l'urne j est choisie, les j boules sont équiprobables donc $\mathbf{P}_{[\mathbb{X}_n = j]}([\mathbb{N}_n = i]) = \frac{1}{j}$.

Ainsi,

$$\mathbf{P}([\mathbb{N}_n = i] \cap [\mathbb{X}_n = j]) = \begin{cases} \frac{1}{nj} & \text{si } i \leq j, \\ 0 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

2. Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. D'après la loi des probabilités totales,

$$\mathbf{P}([\mathbb{N}_n = i]) = \sum_{j=1}^n \mathbf{P}([\mathbb{N}_n = i] \cap [\mathbb{X}_n = j]) = \sum_{j=i}^n \mathbf{P}([\mathbb{N}_n = i] \cap [\mathbb{X}_n = j]) = \frac{1}{n} \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}.$$

$$\begin{aligned} 3. \mathbf{E}(\mathbb{N}_n) &= \sum_{i=1}^n i \mathbf{P}([\mathbb{N}_n = i]) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i \quad (\text{en permutant les sommes finies}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n (j+1) \\ &= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) \\ &= \frac{n+3}{4}. \end{aligned}$$

Pour la variance, on utilise la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbf{V}(\mathbb{N}_n) = \mathbf{V}(\mathbb{N}_n^2) - (\mathbf{E}(\mathbb{N}_n))^2.$$

D'après la formule de transfert, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}(\mathbb{N}_n^2) &= \sum_{i=1}^n i^2 \mathbf{P}([\mathbb{N}_n = i]) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i^2}{j} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i^2 \quad (\text{en permutant les sommes finies}) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)(2j+1)}{6} = \frac{1}{6n} \sum_{j=1}^n (2j^2 + 3j + 1) \\
 &= \frac{1}{6n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n \right) \\
 &= \frac{2(n+1)(2n+1) + 9(n+1) + 6}{36} \\
 &= \frac{4n^2 + 15n + 17}{36}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } \mathbf{V}(\mathbb{N}_n) &= \frac{4n^2 + 15n + 17}{36} - \left(\frac{n+3}{4} \right)^2 \\
 &= \frac{7n^2 + 6n - 13}{144}.
 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 : [ÉNONCÉ]

Par symétrie et d'après l' [exercice \(??\)](#) , on a :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \frac{n+1}{2}.$$

$$\text{Calculons } \mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) \text{ avec } \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = \begin{cases} \frac{1}{n(n-1)} & \text{si } i \neq j, \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) &= \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2 \\ i \neq j}} ij \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) \\
 &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} ij = \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij - \sum_{i=1}^n i^2 \right) \\
 &= \frac{1}{n(n-1)} \left(\left(\sum_{i=1}^n i \right)^2 - \sum_{i=1}^n i^2 \right) \\
 &= \frac{1}{n(n-1)} \left(\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\
 &= \frac{1}{n(n-1)} \times \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{12} \\
 &= \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.
 \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) &= \mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) - \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y}) \\
 &= \frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 \\
 &= -\frac{n+1}{12}.
 \end{aligned}$$

Remarque : La covariance est négative, ce qui traduit le fait que tirer une grande valeur au premier tirage rend moins probable le fait de tirer une grande valeur au second (effet de tirage sans remise). Pour $n = 11$, les variables X et Y sont en dépendance linéaire.

Correction de l'exercice 3 : [ÉNONCÉ]

1. La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[-1, 1]$, donc

$$\mathbf{P}([X = -1]) = \mathbf{P}([X = 0]) = \mathbf{P}([X = 1]) = \frac{1}{3}.$$

Comme $Y = X^2$, la variable aléatoire Y prend les valeurs 0 et 1 avec

$$\mathbf{P}([Y = 0]) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}([Y = 1]) = \frac{2}{3}.$$

On a alors $\mathbf{P}([X = 0])\mathbf{P}([Y = 1]) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.

Or, $[X = 0] \cap [Y = 1] = \emptyset$ puisque si $X = 0$, alors $Y = X^2 = 0$.

Ainsi, $\mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 1]) = 0 \neq \frac{2}{9}$ et les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

2. Par définition, $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$.

Or,

$$\mathbf{E}(X) = \frac{-1+0+1}{3} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X^2) = \frac{1+0+1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Et, } \mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X^3) = \frac{(-1)^3 + 0^3 + 1^3}{3} = \frac{-1+0+1}{3} = 0.$$

Donc, $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$.

On retiendra que les variables aléatoires X et Y sont décorrélées mais ne sont pas indépendantes.

À retenir

Cet exemple montre que la réciproque de « indépendant » $\Rightarrow$

Remarque

Cette formule s'appelle parfois « formule des queues » pour une variable aléatoire entière positive.

Correction de l'exercice 4 : [ÉNONCÉ]

1^{ère} méthode : En écrivant, $\forall k \in [0; n]$, $k = \sum_{i=0}^{k-1} 1$:

Par définition de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}([X = k]) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^{k-1} 1 \right) \mathbf{P}([X = k]).$$

Les sommes étant finies, on peut permuter les sommations :

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n \mathbf{P}([X = k]) \\ &\quad \underbrace{= \mathbf{P}([X \geq i+1]) = \mathbf{P}([X > i])} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{P}([X > i]). \end{aligned}$$

Enfin, comme $X(\Omega) = [0; n]$, $\mathbf{P}([X > n]) = 0$ et on peut le rajouter

$$= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}([X > k]).$$

2^{ème} méthode : Avec une série télescopique.

$$\forall k \in [1; n], \quad \mathbf{P}([X = k]) = \mathbf{P}([X > k-1]) - \mathbf{P}([X > k]).$$

D'où,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbb{X}) &= \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) \\
 &= \sum_{k=1}^n k (\mathbf{P}([\mathbb{X} > k-1]) - \mathbf{P}([\mathbb{X} > k])) \\
 &= \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}([\mathbb{X} > k-1]) - \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}([\mathbb{X} > k]) \quad (\text{les sommes étant finies}) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \mathbf{P}([\mathbb{X} > k]) - \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}([\mathbb{X} > k]) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}([\mathbb{X} > k]) - \underbrace{\mathbf{P}([\mathbb{X} > n])}_{=0} \\
 &= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}([\mathbb{X} > k]).
 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5 : [ÉNONCÉ]

1. Les variables aléatoires $\mathbb{U}$ et $\mathbb{W}$ sont indépendantes et suivent respectivement les lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. La variable $\mathbb{V}$ suit la loi $\mathcal{P}(\mu)$.

La somme de variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson est encore une loi de Poisson, de paramètre somme des paramètres.

Ainsi,

$$\mathbb{X} = \mathbb{U} + \mathbb{V} \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu) \quad \text{et} \quad \mathbb{Y} = \mathbb{V} + \mathbb{W} \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu).$$

2. a. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ admettent une covariance car elles admettent des moments d'ordre 2 (lois de Poisson).

Par bilinéarité,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) &= \mathbf{Cov}(\mathbb{U} + \mathbb{V}, \mathbb{V} + \mathbb{W}) \\
 &= \mathbf{Cov}(\mathbb{U}, \mathbb{V}) + \mathbf{Cov}(\mathbb{U}, \mathbb{W}) + \mathbf{Cov}(\mathbb{V}, \mathbb{V}) + \mathbf{Cov}(\mathbb{V}, \mathbb{W}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Par indépendance de } \mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W}, \quad \mathbf{Cov}(\mathbb{U}, \mathbb{V}) &= \mathbf{Cov}(\mathbb{U}, \mathbb{W}) = \mathbf{Cov}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) = 0, \\
 &= \mathbf{Cov}(\mathbb{V}, \mathbb{V}) \\
 &= \mathbf{V}(\mathbb{V}) = \mu.
 \end{aligned}$$

$$\text{b. Par définition, } \rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \frac{\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})}{\sqrt{\mathbf{V}(\mathbb{X}) \mathbf{V}(\mathbb{Y})}}.$$

Or,

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \lambda + \mu \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \lambda + \mu.$$

$$\text{Donc } \rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

i Remarque

Comme $0 < \rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) < 1$, cela traduit une corrélation positive due à la variable commune $\mathbb{V}$.

Correction de l'exercice 6 : [ÉNONCÉ]

1. a. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, conditionnellement à $[\mathbb{N} = j]$, la variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit une loi binomiale de paramètre j et p :

$$\mathbb{X} \mid (\mathbb{N} = j) \sim \mathcal{B}(j, p).$$

$$\text{Donc, pour } 0 \leq i \leq j, \mathbf{P}_{[\mathbb{N}=j]}([\mathbb{X} = i]) = \binom{j}{i} p^i q^{j-i}.$$

- b. D'après la loi des probabilités composées, $\forall i, j \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{N} = j]) = \mathbf{P}([\mathbb{N} = j]) \mathbf{P}_{[\mathbb{N}=j]}([\mathbb{X} = i]).$$

Donc, pour $0 \leq i \leq j$,

$$\mathbf{P}([X = i] \cap [N = j]) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \binom{j}{i} p^i q^{j-i}.$$

c. D'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N}, \mathbf{P}([X = i]) &= \sum_{j=i}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \binom{j}{i} p^i q^{j-i} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \sum_{j=i}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{j-i}}{(j-i)!} \end{aligned}$$

On pose $k = j - i$:

$$\begin{aligned} &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda(1-q)} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \\ &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!}. \end{aligned}$$

La variable X suit donc une loi de Poisson de paramètre λp .

2. Par symétrie et sans calcul, $Y \sim \mathcal{P}(\lambda q)$.

3. On sait que $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Conditionnellement à $[N = n]$, chaque véhicule donne indépendamment :

- un Pile avec probabilité p ,
- un Face avec probabilité $q = 1 - p$.

Donc, conditionnellement à $[N = n]$, les variables X et Y vérifient :

$$X + Y = n, \quad X \sim \mathcal{B}(n, p) \quad \text{et} \quad Y = n - X.$$

On calcule la loi jointe d'après la loi des probabilités totales avec le sce $([N = n])_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) &= \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j] \cap [N = n]) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}_{[N=n]}([X = i] \cap [Y = j]) \mathbf{P}([N = n]). \end{aligned}$$

Mais l'événement $[X = i] \cap [Y = j]$ impose nécessairement $n = i + j$, donc tous les autres termes sont nuls :

$$\begin{aligned} &= \mathbf{P}_{[N=i+j]}([X = i] \cap [Y = j]) \mathbf{P}([N = i + j]) \\ &= \mathbf{P}_{[N=i+j]}([X = i]) \mathbf{P}([N = i + j]) \\ &= \underbrace{\binom{i+j}{i} p^i q^j \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}}_{\text{(d'après A.)}} \\ &= \frac{\cancel{(i+j)!}}{i!j!} p^i q^j \times e^{-\lambda(p+q)} \frac{\lambda^i \lambda^j}{\cancel{(i+j)!}} \\ &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \times e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^j}{j!} \\ &= \mathbf{P}([X = i]) \mathbf{P}([Y = j]). \end{aligned}$$

Les variables X et Y sont indépendantes.

4. a. Comme $Y = N - X$, on a :

$$V(Y) = V(N) + V(X) - 2 \operatorname{Cov}(N, X).$$

- b. D'après l'énoncé et les questions précédentes, on sait que $V(N) = \lambda$, $V(X) = \lambda p$ et $V(Y) = \lambda q$.

En se rappelant que $p + q = 1$, l'égalité précédente s'écrit alors :

$$\lambda q = \lambda + \lambda p - 2 \operatorname{Cov}(N, X) \iff \operatorname{Cov}(N, X) = \lambda p.$$

- c. Le même raisonnement conduit successivement à De même :

$$V(X) = V(N) + V(Y) - 2 \operatorname{Cov}(N, Y),$$

puis à $\operatorname{Cov}(N, Y) = \lambda q$.

Correction de l'exercice 7 : [ÉNONCÉ]

1. Comme les X_k sont presque sûrement strictement positives,

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \geq X_1 \implies \frac{1}{S_n} \leq \frac{1}{X_1}.$$

Comme $E\left(\frac{1}{X_1}\right) = b < +\infty$, par comparaison, $E\left(\frac{1}{S_n}\right) < +\infty$.

D'autre part, $\sum_{k=1}^n \frac{X_k}{S_n} = \frac{S_n}{S_n} = 1$ entraîne par linéarité de l'espérance :

$$\sum_{k=1}^n E\left(\frac{X_k}{S_n}\right) = 1.$$

Les variables $X_1, \dots, X_n$ jouant des rôles symétriques et ayant même loi, les quantités $E\left(\frac{X_k}{S_n}\right)$ sont toutes égales et on a :

$$E\left(\frac{X_k}{S_n}\right) = \frac{1}{n} \quad (1 \leq k \leq n).$$

2. Distinguons deux cas.

— Si $m \leq n$: $\frac{S_m}{S_n} = \sum_{k=1}^m \frac{X_k}{S_n}$ entraîne

Ainsi,

$$E\left(\frac{S_m}{S_n}\right) = \sum_{k=1}^m E\left(\frac{X_k}{S_n}\right) = \frac{m}{n}.$$

— Si $m \geq n$: $\frac{S_m}{S_n} = 1 + \frac{X_{n+1} + \dots + X_m}{S_n}$.

Comme $X_{n+1}, \dots, X_m$ sont indépendantes de S_n ,

$$\forall k > n, E\left(\frac{X_k}{S_n}\right) = E(X_k) E\left(\frac{1}{S_n}\right) = a E\left(\frac{1}{S_n}\right).$$

$$\text{Donc, } E\left(\frac{S_m}{S_n}\right) = 1 + (m - n) a E\left(\frac{1}{S_n}\right).$$

Finalement,

$$E\left(\frac{S_m}{S_n}\right) = \begin{cases} \frac{m}{n}, & \text{si } m \leq n, \\ 1 + (m - n) a E\left(\frac{1}{S_n}\right), & \text{si } m \geq n. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 8 : [ÉNONCÉ]

1. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, les événements $[\mathbb{X} = 1], \dots, [\mathbb{X} = n]$ forment un système complet d'événements.

Ainsi,

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y} = i]) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}([\mathbb{Y} = i] \cap [\mathbb{X} = k]).$$

$$\begin{aligned} \text{D'où, } \mathbf{E}(\mathbb{Y}) &= \sum_{i=1}^n i \mathbf{P}([\mathbb{Y} = i]) \\ &= \sum_{i=1}^n i \sum_{k=1}^n \mathbf{P}([\mathbb{Y} = i] \cap [\mathbb{X} = k]) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n i \mathbf{P}([\mathbb{Y} = i] \cap [\mathbb{X} = k]) \quad \text{en permutant les sommes finies} \\ &= \sum_{k=1}^n \underbrace{\sum_{i=1}^n i \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}([\mathbb{Y} = i])}_{\mathbf{E}_{[\mathbb{X}=k]}(\mathbb{Y})} \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbf{E}_{[\mathbb{X}=k]}(\mathbb{Y}) \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]). \end{aligned}$$

2. Toutes les urnes étant équiprobables, $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = \frac{1}{n}$.

Ainsi, $\mathbb{X}$ suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$.

3. a. Sachant $[\mathbb{X} = k]$, on tire une boule uniformément dans l'urne $\mathbb{U}_k$ contenant les boules numérotées de 1 à k .

Donc, $\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket$, $\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}([\mathbb{Y} = i]) = \frac{1}{k}$. La loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = k]$ est donc la loi uniforme sur $\llbracket 1; k \rrbracket$.

Son espérance vaut

$$\mathbf{E}_{[\mathbb{X}=k]}(\mathbb{Y}) = \frac{1 + 2 + \dots + k}{k} = \frac{k+1}{2}.$$

- b. D'après la question 1,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbb{Y}) &= \sum_{k=1}^n \mathbf{E}_{[\mathbb{X}=k]}(\mathbb{Y}) \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2} = \frac{1}{2n} \left(\sum_{k=1}^n k + n \right) \\ &= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) \\ &= \frac{n+3}{4}. \end{aligned}$$

4. Pour $1 \leq i \leq k \leq n$,

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = k] \cap [\mathbb{Y} = i]) = \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}([\mathbb{Y} = i]) \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = \frac{1}{k} \times \frac{1}{n}.$$

Pour $i > k$, cette probabilité est nulle.

5. a. Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

D'après la loi des probabilités totales,

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y} = i]) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}([\mathbb{X} = k] \cap [\mathbb{Y} = i]) = \frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \frac{1}{k}.$$

- b. Calculons d'abord $\mathbf{E}(\mathbb{Y}^2)$.

Pour tout k , d'après le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbb{Y}^2) &= \sum_{i=1}^n i^2 \mathbf{P}([\mathbb{Y} = i]) \\
 &= \sum_{i=1}^n i^2 \frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \frac{1}{k} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k i^2 \quad (\text{on permute les sommes finies}) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \times \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)(2k+1)}{6} \\
 &= \frac{1}{6n} \sum_{k=1}^n (2k^2 + 3k + 1) \\
 &= \frac{1}{6n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{3}{2}n(n+1) + n \right) \\
 &= \frac{1}{6} \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{3}{2}(n+1) + 1 \right) \\
 &= \frac{1}{6} \frac{4n^2 + 15n + 17}{6} \\
 &= \frac{4n^2 + 15n + 17}{36}.
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}(\mathbb{Y}) &= \mathbf{E}(\mathbb{Y}^2) - \mathbf{E}(\mathbb{Y})^2 \\
 &= \frac{4n^2 + 15n + 17}{36} - \left(\frac{n+3}{4} \right)^2 \\
 &= \frac{4(4n^2 + 15n + 17) - 9(n+3)^2}{9 \times 4 \times 4} \\
 &= \frac{7n^2 + 6n - 13}{144}.
 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 9 : [ÉNONCÉ]

1. Soient $n, k \in \mathbb{N}$.

Conditionnellement à l'événement $[\mathbb{X} = n]$, il y a n clients achetant une voiture. Chacun demande un crédit avec la probabilité p , indépendamment des autres clients. Ainsi, sachant $[\mathbb{X} = n]$, la variable $\mathbb{Y}$ suit une loi binomiale de paramètres (n, p) . Par conséquent,

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=n]}([\mathbb{Y} = k]) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Soient $n, k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités composées,

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = n] \cap [\mathbb{Y} = k]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = n]) \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=n]}([\mathbb{Y} = k]).$$

Comme $\mathbb{X} \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = n]) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$.

Ainsi,

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}([X = n] \cap [Y = k]) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y = k]) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbf{P}([X = n] \cap [Y = k]) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!} \quad (\text{en posant } m = n - k) \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} \quad (\text{en reconnaissant une série exponentielle}) \\ &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Donc, $Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$.

Par conséquent, $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{V}(Y) = \lambda p$.

4. a. On a $Z = X - Y$.

Conditionnellement à $[X = n]$, chaque client paie comptant avec la probabilité $1 - p$ i.e. conditionnellement à $[X = n]$, $Z \sim \mathcal{B}(n, 1 - p)$.

Le même raisonnement que précédemment montre alors que

$$Z \sim \mathcal{P}(\lambda(1-p)).$$

b. Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$.

Comme $[Y = k] \cap [Z = \ell] = [Y = k] \cap [X = k + \ell]$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y = k] \cap [Z = \ell]) &= \mathbf{P}([X = k + \ell] \cap [Y = k]) \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!} \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \frac{(\lambda(1-p))^\ell}{\ell!}. \end{aligned}$$

Or, $e^{-\lambda} = e^{-\lambda p} e^{-\lambda(1-p)}$,

$$\begin{aligned} &= \left(e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \right) \left(e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^\ell}{\ell!} \right) \\ &= \mathbf{P}([Y = k]) \mathbf{P}([Z = \ell]). \end{aligned}$$

Ainsi, les variables Y et Z sont indépendantes.

Correction de l'exercice 10 : [ÉNONCÉ]

1. $\mathbb{X}(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$ On dresse le tableau des valeurs possibles, les autres étant impossibles :

$(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$	$\mathbb{U}$	$\mathbb{V}$	$\mathbf{P}$
$(0, 0)$	0	0	$(1-p)^2$
$(1, 0)$	1	1	$p(1-p)$
$(0, 1)$	1	-1	$p(1-p)$
$(1, 1)$	2	0	p^2

Par exemple, $[\mathbb{U} = 0] \cap [\mathbb{V} = 0] = ([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 0]) \cap ([\mathbb{X} = \mathbb{Y}] = [\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 0])$ et $[\mathbb{U} = 0] \cap [\mathbb{V} = -1] = ([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 0]) \cap ([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 1]) = \emptyset$.

Ainsi la loi du couple $(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ est :

$\mathbb{U} \backslash \mathbb{V}$	-1	0	1
0	0	$(1-p)^2$	0
1	$p(1-p)$	0	$p(1-p)$
2	0	p^2	0

2. Par bilinéarité, on a :

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{U}, \mathbb{V}) = \mathbf{Cov}(\mathbb{X} + \mathbb{Y}, \mathbb{X} - \mathbb{Y})$$

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{X}) - \mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) + \mathbf{Cov}(\mathbb{Y}, \mathbb{X}) - \mathbf{Cov}(\mathbb{Y}, \mathbb{Y}).$$

Or $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes donc $\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 0$,
 $= \mathbf{V}(\mathbb{X}) - \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = 0$.

En particulier, $\rho(\mathbb{U}, \mathbb{V}) = \frac{\mathbf{Cov}(\mathbb{U}, \mathbb{V})}{\sqrt{\mathbf{Var}(\mathbb{U})\mathbf{Var}(\mathbb{V})}} = 0$.

Les variables $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ sont donc décorréliées.

3. On a déjà calculé $\mathbf{P}([\mathbb{U} = 0, \mathbb{V} = 0]) = (1-p)^2$.
 Or, $\mathbf{P}([\mathbb{U} = 0]) = (1-p)^2$ et $\mathbf{P}([\mathbb{V} = 0]) = (1-p)^2 + p^2$ donnent

$$\mathbf{P}([\mathbb{U} = 0])\mathbf{P}([\mathbb{V} = 0]) = (1-p)^2((1-p)^2 + p^2) \neq (1-p)^2.$$

Les variables $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$, décorréliées, ne sont pourtant pas indépendantes.

Correction de l'exercice 11 : [ÉNONCÉ]

1. Les variables $(\mathbb{X}_n)_{n \geq 1}$ sont indépendantes et suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre p donc

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}_n) = p \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{X}_n) = p(1-p).$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(\mathbb{S}_n) = \mathbf{E}(\mathbb{X}_1 + \dots + \mathbb{X}_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(\mathbb{X}_k) = \sum_{k=1}^n p = np.$$

Comme les variables $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ sont indépendantes, la variance de leur somme est la somme de leur variance :

$$\mathbf{V}(\mathbb{S}_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(\mathbb{X}_k) = \sum_{k=1}^n p(1-p) = np(1-p).$$

2. a. Comme $\mathbb{X}_n$ et $\mathbb{X}_{n+1}$ ne prennent que les valeurs 0 ou 1, $\mathbb{Y}_n$ vaut 1 si et seulement si $\mathbb{X}_n = \mathbb{X}_{n+1} = 1$.
 Par indépendance, $\mathbf{P}([\mathbb{Y}_n = 1]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}_n = 1] \cap [\mathbb{X}_{n+1} = 1]) = p^2$.

Ainsi $\mathbb{Y}_n$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p^2 :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}_n) = p^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{Y}_n) = p^2(1 - p^2).$$

b. Par linéarité on a encore :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}_n) = \mathbf{E}(\mathbb{Y}_1 + \dots + \mathbb{Y}_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(\mathbb{Y}_k) = \sum_{k=1}^n p^2 = np^2.$$

Les variables $\mathbb{Y}_1, \dots, \mathbb{Y}_n$ ne sont pas indépendantes, car $\mathbb{Y}_i$ et $\mathbb{Y}_{i+1}$ contiennent toutes deux la variable $\mathbb{X}_{i+1}$.

On utilise donc la formule générale :

$$\mathbf{V}(\mathbb{Y}_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(\mathbb{Y}_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{Cov}(\mathbb{Y}_i, \mathbb{Y}_j).$$

— Si $|i - j| \geq 2$, les variables $\mathbb{Y}_i = \mathbb{X}_i \mathbb{X}_{i+1}$ et $\mathbb{Y}_j = \mathbb{X}_j \mathbb{X}_{j+1}$ font intervenir des familles de variables indépendantes. Elles sont donc indépendantes et

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{Y}_i, \mathbb{Y}_j) = 0.$$

— Il reste seulement le cas $j = i + 1$.

$$\text{Or, } \mathbb{Y}_i \mathbb{Y}_{i+1} = \mathbb{X}_i \mathbb{X}_{i+1}^2 \mathbb{X}_{i+2}.$$

$$\text{Comme } \mathbb{X}_{i+1} \text{ vaut } 0 \text{ ou } 1, \mathbb{X}_{i+1}^2 = \mathbb{X}_{i+1}.$$

$$\text{D'où, } \mathbb{Y}_i \mathbb{Y}_{i+1} = \mathbb{X}_i \mathbb{X}_{i+1} \mathbb{X}_{i+2}.$$

$$\text{Par indépendance, } \mathbf{E}(\mathbb{Y}_i \mathbb{Y}_{i+1}) = p^3.$$

$$\text{Par ailleurs, } \mathbf{E}(\mathbb{Y}_i) \mathbf{E}(\mathbb{Y}_{i+1}) = p^2 \times p^2 = p^4.$$

Finalement,

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{Y}_i, \mathbb{Y}_{i+1}) = \mathbf{E}(\mathbb{Y}_i \mathbb{Y}_{i+1}) - \mathbf{E}(\mathbb{Y}_i) \mathbf{E}(\mathbb{Y}_{i+1}) = p^3 - p^4 = p^3(1 - p).$$

Revenons à notre formule en remarquant qu'il y a exactement $n - 1$ couples consécutifs.

$$\mathbf{V}(\mathbb{Y}_n) = np^2(1 - p^2) + 2(n - 1)p^3(1 - p).$$

3. On utilise la bilinéarité de la covariance :

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{S}_n, \mathbb{Y}_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{Cov}(\mathbb{X}_i, \mathbb{Y}_j).$$

Comme $\mathbb{Y}_j = \mathbb{X}_j \mathbb{X}_{j+1}$, la variable $\mathbb{X}_i$ est indépendante de $\mathbb{Y}_j$ dès que $i \notin \{j, j + 1\}$ et toutes ces covariances sont donc nulles.

$$\text{— Premier cas : } i = j : \mathbf{E}(\mathbb{X}_j \mathbb{Y}_j) = \mathbf{E}(\mathbb{X}_j^2 \mathbb{X}_{j+1}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}_j \mathbb{X}_{j+1}) = p^2.$$

Par conséquent,

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{X}_j, \mathbb{Y}_j) = p^2 - p^3 = p^2(1 - p).$$

— Deuxième cas : $i = j + 1$. De la même manière,

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{X}_{j+1}, \mathbb{Y}_j) = p^2(1 - p).$$

Comme il y a n covariances du type $\mathbf{Cov}(\mathbb{X}_j, \mathbb{Y}_j)$ et $n - 1$ du type $\mathbf{Cov}(\mathbb{X}_{j+1}, \mathbb{Y}_j)$, on trouve

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{S}_n, \mathbb{Y}_n) = (2n - 1)p^2(1 - p).$$

Correction de l'exercice 12 : [ÉNONCÉ]

1. $\mathbb{V}_n(\Omega) = \llbracket 1; N \rrbracket$ et, pour tout $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$,

$$[\mathbb{V}_n \leq k] = [X_1 \leq k] \cap \dots \cap [X_n \leq k].$$

Les variables étant indépendantes, $\mathbf{P}([\mathbb{V}_n \leq k]) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}([X_i \leq k]) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$.

On en déduit,

$$\forall k \in \llbracket 1; N \rrbracket, \mathbf{P}([\mathbb{V}_n = k]) = \mathbf{P}([\mathbb{V}_n \leq k]) - \mathbf{P}([\mathbb{V}_n \leq k-1]) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}.$$

2. — Premier cas : $r = s$.

L'événement $[\mathbb{U}_n = r] \cap [\mathbb{V}_n = r]$ signifie que toutes les variables valent r :

Par indépendance, on a alors :

$$\mathbf{P}([\mathbb{U}_n = r] \cap [\mathbb{V}_n = r]) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = r]\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}([X_i = r]) = \frac{1}{N^n}.$$

- Deuxième cas : $r < s$.

$$\text{L'événement } [\mathbb{U}_n = r] \cap [\mathbb{V}_n = s] \text{ équivaut à } \begin{cases} \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, X_i \in \llbracket r; s \rrbracket \\ \text{Au moins un } X_i = r, \\ \text{Au moins un } X_i = s. \end{cases}$$

Reste à dénombrer cet ensemble :

- Si $X_i \in \llbracket r; s \rrbracket$ alors, elle peut prendre $s - r + 1$ valeurs. Au nombre de n , il y a $(s - r + 1)^n$ choix possibles.
- Il faut retirer celles qui ne prennent pas la valeur r , soit $s - r$ valeurs possibles. Il y a $(s - r)^n$ n -uplets possibles.
- De même, il faut retirer celles qui ne prennent pas la valeur s . Il y a aussi $(s - r)^n$ choix possibles.
- Enfin, il faut rajouter celles qu'on a enlevé deux fois *i.e.* celles qui ne prennent ni la valeur r , ni la valeur s . Il y a $(s - r - 1)^n$ n -uplets possibles.

Par conséquent, avec la loi uniforme, on trouve :

$$\mathbf{P}([\mathbb{U}_n = r] \cap [\mathbb{V}_n = s]) = \frac{(s - r + 1)^n - 2(s - r)^n + (s - r - 1)^n}{N^n}.$$

En résumé, la loi du couple $(\mathbb{U}_n, \mathbb{V}_n)$ est

$$\mathbf{P}([\mathbb{U}_n = r] \cap [\mathbb{V}_n = s]) = \begin{cases} \frac{1}{N^n} & \text{si } r = s, \\ \frac{(s - r + 1)^n - 2(s - r)^n + (s - r - 1)^n}{N^n} & \text{si } r < s. \end{cases}$$

On en déduit

$$\mathbf{P}([\mathbb{U}_n = \mathbb{V}_n]) = \sum_{r=1}^N \mathbf{P}([\mathbb{U}_n = r] \cap [\mathbb{V}_n = r]) = \sum_{r=1}^N \frac{1}{N^n} = \frac{1}{N^{n-1}}.$$

3. On utilise la formule des queues :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbb{V}_n) &= \sum_{k=1}^N \mathbf{P}([\mathbb{V}_n \geq k]) \\ &= \sum_{k=1}^N 1 - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n \\ &= N - \frac{1}{N^n} \sum_{j=0}^{N-1} j^n \\ &\underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{n+1} N. \end{aligned}$$

À retenir

$$\sum_{j=0}^{N-1} j^n \underset{F. RÜCCI}{\sim} \frac{N^{n+1}}{n+1}.$$

4. Commençons par déterminer $\mathbf{P}([U_n = r])$.

On a $\mathbf{P}([U_n \geq r]) = \left(\frac{N-r+1}{N}\right)^n$ donc, classiquement,

$$\mathbf{P}([U_n = r]) = \mathbf{P}([U_n \geq r]) - \mathbf{P}([U_n \geq r+1]) = \frac{(N-r+1)^n - (N-r)^n}{N^n}.$$

a. i. Pour le calcul de $\mathbf{P}_{[U_n=r]}([X_1 = j] \cap [X_2 = k])$, il y a plusieurs cas à envisager :

Si $\min(j, k) < r$: Par définition du min,

$$\mathbf{P}_{[U_n=r]}([X_1 = j] \cap [X_2 = k]) = 0.$$

Si $j = k = r$: Il suffit que $X_3, \dots, X_n \geq r$, donc

$$\mathbf{P}_{[U_n=r]}([X_1 = r] \cap [X_2 = r]) = \frac{(N-r+1)^{n-2}}{(N-r+1)^n - (N-r)^n}.$$

Si $r = j < k$ ou $r = k < j$: Il suffit encore d'avoir $X_3, \dots, X_n \geq r$, donc

$$\mathbf{P}_{[U_n=r]}([X_1 = r] \cap [X_2 = r]) = \frac{(N-r+1)^{n-2}}{(N-r+1)^n - (N-r)^n}.$$

Si $j > r$ et $k > r$: Il faut que parmi $X_3, \dots, X_n$ apparaisse au moins une valeur égale à r , donc

$$\mathbf{P}_{[U_n=r]}([X_1 = j] \cap [X_2 = k]) = \frac{(N-r+1)^{n-2} - (N-r)^{n-2}}{(N-r+1)^n - (N-r)^n}.$$

ii. Même chose en plus simple pour $\mathbf{P}_{[U_n=r]}([X_1 = j])$:

Si $j < r$: $\mathbf{P}_{[U_n=r]}([X_1 = j]) = 0$.

Si $j = r$: Il suffit que $X_2, \dots, X_n \geq r$, d'où

$$\mathbf{P}([X_1 = r] \cap [U_n = r]) = \frac{1}{N} \left(\frac{(N-r+1)^{n-1}}{N} \right) \text{ et}$$

$$\mathbf{P}_{[U_n=r]}([X_1 = r]) = \frac{(N-r+1)^{n-1}}{(N-r+1)^n - (N-r)^n}.$$

Si $r < j$: Il suffit encore d'avoir $X_2, \dots, X_n \geq r$ mais pas tous strictement supérieurs à r . Le nombre de possibilités est $(N-r+1)^{n-1} - (N-r)^{n-1}$ donc

$$\mathbf{P}_{[U_n=r]}([X_1 = j]) = \frac{(N-r+1)^{n-1} - (N-r)^{n-1}}{(N-r+1)^n - (N-r)^n}.$$

b. D'après la question précédente, prenons le cas $j = k = r$. On a :

$$\mathbf{P}_{[U_n=r]}([X_1 = r] \cap [X_2 = r]) = \frac{(N-r+1)^{n-2}}{(N-r+1)^n - (N-r)^n}.$$

Mais

$$\mathbf{P}_{[U_n=r]}([X_1 = r])\mathbf{P}_{[U_n=r]}([X_2 = r]) = \left(\frac{(N-r+1)^{n-1}}{(N-r+1)^n - (N-r)^n} \right)^2.$$

Ces probabilités ne sont pas égales donc X_1 et X_2 ont perdu leur indépendance sous le conditionnement $[U_n = r]$.

Pour le non intérêt de le prouver :

$$\begin{aligned}\frac{(N-r+1)^{n-2}}{(N-r+1)^n - (N-r)^n} &= \left(\frac{(N-r+1)^{n-1}}{(N-r+1)^n - (N-r)^n} \right)^2 \\ (N-r+1)^{n-2} &= \frac{(N-r+1)^{2n-2}}{(N-r+1)^n - (N-r)^n} \\ 1 &= \frac{(N-r+1)^n}{(N-r+1)^n - (N-r)^n} \\ (N-r+1)^n - (N-r)^n &= (N-r+1)^n \\ (N-r)^n &= 0 \\ N &= r.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 13 : [ÉNONCÉ]

1. L'univers est l'ensemble des permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$: $\Omega = \mathfrak{S}_n$.

Chaque permutation est obtenue avec la même probabilité, donc

$$\forall \sigma \in \Omega, \quad \mathbf{P}(\{\sigma\}) = \frac{1}{n!}.$$

2. a. Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Par définition, on a $[\mathbb{X}_i = 1] = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(i) = i\}$.

Reste à trouver son cardinal.

Or, pour construire une permutation vérifiant $\sigma(i) = i$, il suffit de fixer l'image de i , puis de permuter librement les $n-1$ autres éléments.

Ainsi, $\text{Card}([\mathbb{X}_i = 1]) = (n-1)!$.

$$\text{D'où, } \mathbf{P}([\mathbb{X}_i = 1]) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Comme $\mathbb{X}_i$ est une variable indicatrice,

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}_i) = 0 \times \mathbf{P}([\mathbb{X}_i = 0]) + 1 \times \mathbf{P}([\mathbb{X}_i = 1]) = \frac{1}{n},$$

et, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\mathbb{X}_i) &= \mathbf{E}(\mathbb{X}_i^2) - \mathbf{E}(\mathbb{X}_i)^2 \\ &= 0^2 \times \mathbf{P}([\mathbb{X}_i = 0]) + 1^2 \times \mathbf{P}([\mathbb{X}_i = 1]) - \left(\frac{1}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{n-1}{n^2}.\end{aligned}$$

- b. Comme $\mathbb{X} = \sum_{i=1}^n \mathbb{X}_i$, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(\mathbb{X}_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1.$$

3. a. Soient $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tels que $i \neq j$.

L'événement $[\mathbb{X}_i = 1] \cap [\mathbb{X}_j = 1]$ signifie que les positions i et j sont fixes.

Il reste alors à permuter librement les $n-2$ autres éléments.

Par conséquent, $\text{Card}([\mathbb{X}_i = 1] \cap [\mathbb{X}_j = 1]) = (n-2)!$.

Donc,

$$\mathbf{P}([\mathbb{X}_i = 1] \cap [\mathbb{X}_j = 1]) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

- b. Considérons la variable $\mathbb{X}_i \mathbb{X}_j$.

On a $\mathbb{X}_i \mathbb{X}_j(\Omega) = \{0; 1\}$ et $[\mathbb{X}_i \mathbb{X}_j = 1] = [\mathbb{X}_i = 1] \cap [\mathbb{X}_j = 1]$.

D'où $\mathbf{E}(\mathbb{X}_i \mathbb{X}_j) = \mathbf{P}([\mathbb{X}_i = 1] \cap [\mathbb{X}_j = 1])$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j) &= \mathbf{E}(\mathbb{X}_i \mathbb{X}_j) - \mathbf{E}(\mathbb{X}_i) \mathbf{E}(\mathbb{X}_j) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2(n-1)}. \end{aligned}$$

c. D'après la formule de König-Huygens,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbb{X}) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(\mathbb{X}_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \text{Cov}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j) \\ &= n \times \frac{n-1}{n^2} + n(n-1) \times \frac{1}{n^2(n-1)} \\ &= \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 14 : [ÉNONCÉ]

1. a. Par définition, $\forall y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbf{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbf{P}(\max(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n) \leq y) \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (\mathbb{X}_i \leq y)\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(\mathbb{X}_i \leq y) \quad \text{par indépendance des variables aléatoires } \mathbb{X}_i. \end{aligned}$$

Or, $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathbb{X}_i$ suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$ donc

$$\mathbf{P}(\mathbb{X}_i \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 1 \\ \sum_{1 \leq k \leq y} \mathbf{P}(\mathbb{X}_i = k) & \text{si } 1 \leq y \leq n \\ 1 & \text{si } y > n \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 1 \\ \sum_{1 \leq k \leq \lfloor y \rfloor} \frac{1}{n} = \frac{\lfloor y \rfloor}{n} & \text{si } 1 \leq y \leq n \\ \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{n} = 1 & \text{si } y > n \end{cases}.$$

Il vient alors que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 1 \\ \left(\frac{\lfloor y \rfloor}{n}\right)^n & \text{si } 1 \leq y \leq n \\ 1 & \text{si } y > n. \end{cases}$$

b. Comme chaque variable $\mathbb{X}_i$ prend ses valeurs dans $\llbracket 1; n \rrbracket$, a fortiori, $Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbf{P}(Y = k) &= \mathbf{P}(Y \leq k) - \mathbf{P}(Y \leq k-1) \\ &= F_Y(k) - F_Y(k-1) \\ &= \left(\frac{k}{n}\right)^n - \left(\frac{k-1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

2. Comme $\mathbb{Y}$ prend un nombre fini de valeurs alors $\mathbb{Y}$ admet une espérance et on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbb{Y}) &= \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}(\mathbb{Y} = k) \\
 &= \sum_{k=1}^n k \left[\left(\frac{k}{n}\right)^n - \left(\frac{k-1}{n}\right)^n \right] \\
 &= \sum_{k=1}^n k \left(\frac{k}{n}\right)^n - \sum_{k=1}^n k \left(\frac{k-1}{n}\right)^n \quad \text{par linéarité sur des sommes finies} \\
 &= \sum_{k=1}^n k \left(\frac{k}{n}\right)^n - \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \left(\frac{i}{n}\right)^n \quad \text{en posant } i = k-1 \\
 &= \sum_{k=1}^n k \left(\frac{k}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n-1} k \left(\frac{k}{n}\right)^n - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{k}{n}\right)^n + n \left(\frac{n}{n}\right)^n - 0 \left(\frac{0}{n}\right)^n - \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{k}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n \\
 &= n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n.
 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 15 : [ÉNONCÉ]

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(X_i > k) &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X_i = j) \\
 &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} pq^{j-1} = pq^k \sum_{j=0}^{+\infty} q^j \\
 &= pq^k \frac{1}{1-q} = q^k \\
 &= (1-p)^k.
 \end{aligned}$$

2. a. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $[\mathbb{I}_n > k] = \bigcap_{i=1}^n [\mathbb{X}_i > k]$.

Par indépendance des variables $\mathbb{X}_i$, on a alors :

$$\mathbf{P}(\mathbb{I}_n > k) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(\mathbb{X}_i > k) = (q^k)^n = q^{nk}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc, } \mathbf{P}(\mathbb{I}_n = k) &= \mathbf{P}(\mathbb{I}_n > k-1) - \mathbf{P}(\mathbb{I}_n > k) \\
 &= q^{n(k-1)} - q^{nk} = q^{n(k-1)}(1 - q^n) \\
 &= (1 - q^n) (q^n)^{k-1}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{I}_n \sim \mathcal{G}(1 - q^n)$.

b. D'après la question précédente, on a alors

$$\mathbf{E}(\mathbb{I}_n) = \frac{1}{1 - q^n}.$$

3. a. Le raisonnement est identique. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $[\mathbb{S}_n \leq k] = \bigcap_{i=1}^n [\mathbb{X}_i \leq k]$ avec $\mathbf{P}(\mathbb{X}_i \leq k) = 1 - q^k$.

Par indépendance, on a alors

$$\mathbf{P}(\mathbb{S}_n \leq k) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(\mathbb{X}_i \leq k) = (1 - q^k)^n.$$

b. On utilise la formule des queues :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbb{S}_n) &= \sum_{k \geq 1} \mathbf{P}(\mathbb{S}_n \geq k) \\ &= \sum_{k \geq 1} [1 - (1 - q^{k-1})^n]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Or, par la formule du binôme, } (1 - q^{k-1})^n &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j q^{j(k-1)}, \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^j q^{j(k-1)}\end{aligned}$$

On permute les sommes finies :

$$= \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^{j-1} \sum_{k \geq 1} q^{j(k-1)}.$$

$$\text{Or, } \sum_{k \geq 1} q^{j(k-1)} = \frac{1}{1 - q^j},$$

$$= \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \frac{(-1)^{j-1}}{1 - q^j}.$$

Correction de l'exercice 16 : [ÉNONCÉ]

1. D'après le cours, on sait $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = mp$ et $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = mp(1 - p)$.

Or, d'après la formule de Koenig-Huygens, $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{Y}^2) - (\mathbf{E}(\mathbb{Y}))^2$.

D'où, $\mathbf{E}(\mathbb{Y}^2) = mp(1 - p) + (mp)^2 = mp(mp + 1 - p)$.

Par linéarité de l'espérance, on obtient alors :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}(\mathbb{Y} - 1)) = \mathbf{E}(\mathbb{Y}^2) - \mathbf{E}(\mathbb{Y}) = mp(mp + 1 - p) - mp = m(m - 1)p^2.$$

2. On a $\mathbb{X}_1(\Omega) = \llbracket 0; m \rrbracket$.

Soit $i \in \llbracket 0; m \rrbracket$. D'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbb{X}_1 = i) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}\left(\left[\mathbb{U}_1 = \frac{k}{n}\right]\right) \times \mathbf{P}_{[\mathbb{U}_1 = \frac{k}{n}]}(\mathbb{X}_1 = i) \\ &= \mathbf{P}([\mathbb{U}_1 = 0]) \times \mathbf{P}_{[\mathbb{U}_1 = 0]}(\mathbb{X}_1 = i)\end{aligned}$$

Or, pour $n = 1$, l'ensemble $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}$ se réduit à $\{0\}$ i.e. $\mathbf{P}([\mathbb{U}_1 = 0]) = 1$:

$$= \mathbf{P}_{[\mathbb{U}_1 = 0]}(\mathbb{X}_1 = i)$$

Avec $\mathbb{X}_1|_{[\mathbb{U}_1 = 0]} \rightsquigarrow \mathcal{B}(m, 0)$, on obtient :

$$= \binom{m}{i} 0^i 1^{m-i} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc $\mathbb{X}_1 = 0$ p.s.

3. a. On a $\mathbb{X}_n(\Omega) = \llbracket 0; m \rrbracket$.

Le raisonnement est identique :

$$\begin{aligned}\forall i \in \llbracket 0; m \rrbracket, \mathbf{P}(\mathbb{X}_n = i) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}\left(\left[\mathbb{U}_n = \frac{k}{n}\right]\right) \times \mathbf{P}_{[\mathbb{U}_n = \frac{k}{n}]}(\mathbb{X}_n = i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}_{[\mathbb{U}_n = \frac{k}{n}]}(\mathbb{X}_n = i)\end{aligned}$$

i Remarque

La variable $\mathbb{U}_1$ est presque sûrement égale à 0.

Avec $\mathbb{X}_n | \left[\mathbb{U}_n = \frac{k}{n} \right] \rightsquigarrow \mathcal{B} \left(m, \frac{k}{n} \right)$, on obtient :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n} \right)^i \left(1 - \frac{k}{n} \right)^{m-i} \\ &= \frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n} \right)^i \left(1 - \frac{k}{n} \right)^{m-i}. \end{aligned}$$

- b. D'après l'énoncé, conditionnellement à l'événement $\left[\mathbb{U}_n = \frac{k}{n} \right]$ la loi $\mathbb{X}_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B} \left(m, \frac{k}{n} \right)$.

$$\text{Donc } \mathbf{E} \left(\mathbb{X}_n | \mathbb{U}_n = \frac{k}{n} \right) = \sum_{k=1}^m i \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n} \right)^i \left(1 - \frac{k}{n} \right)^{m-i} = m \times \frac{k}{n}.$$

Finalement,

$$\sum_{i=1}^m i \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n} \right)^i \left(1 - \frac{k}{n} \right)^{m-i} = m \frac{k}{n}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbb{X}_n) &= \sum_{i=1}^m i \mathbf{P}([\mathbb{X}_n = i]) \\ &= \sum_{i=1}^m i \frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n} \right)^i \left(1 - \frac{k}{n} \right)^{m-i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m i \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n} \right)^i \left(1 - \frac{k}{n} \right)^{m-i} \quad \text{en permutant les sommes finies} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m \frac{k}{n} \\ &= \frac{m}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{m(n-1)}{2n}. \end{aligned}$$

- c. De même, pour une loi binomiale, on a montré que $\mathbf{E}(\mathbb{Y}(\mathbb{Y} - 1)) = m(m-1)p^2$.

En posant, $p = \frac{k}{n}$, conditionnellement à $\left[\mathbb{U}_n = \frac{k}{n} \right]$ et d'après le lemme de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\mathbb{X}_n(\mathbb{X}_n - 1) | \mathbb{U}_n = \frac{k}{n} \right) &= \sum_{i=1}^m i(i-1) \binom{m}{i} p^i (1-p)^{m-i} = m(m-1)p^2. \\ \sum_{i=1}^m i(i-1) \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n} \right)^i \left(1 - \frac{k}{n} \right)^{m-i} &= m(m-1) \frac{k^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbb{X}_n(\mathbb{X}_n - 1)) &= \sum_{i=1}^m i(i-1) \mathbf{P}([\mathbb{X}_n = i]) \\ &= \sum_{i=1}^m i(i-1) \frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n} \right)^i \left(1 - \frac{k}{n} \right)^{m-i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m i(i-1) \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n} \right)^i \left(1 - \frac{k}{n} \right)^{m-i} \quad \text{en permutant} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m(m-1) \frac{k^2}{n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Or, } \sum_{k=0}^{n-1} k^2 &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}.\end{aligned}$$

- d. On utilise la formule de Huygens et la linéarité de l'espérance en faisant intervenir les calculs précédents :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\mathbb{X}_n) &= \mathbf{E}(\mathbb{X}_n^2) - \mathbf{E}(\mathbb{X}_n)^2 \\ &= \mathbf{E}(\mathbb{X}_n(\mathbb{X}_n - 1)) + \mathbf{E}(\mathbb{X}_n) - \mathbf{E}(\mathbb{X}_n)^2 \\ &= \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2} + \frac{m(n-1)}{2n} - \frac{m^2(n-1)^2}{4n^2} \\ &= \frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}.\end{aligned}$$