Remédiation 24 — Loi d'un min

Méthode 1 – Loi d'un minimum :

Pour déterminer la loi de $\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ dans le cas où $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont **indépendantes** à valeurs dans $\mathbb{N}$, il faudra donc :

(*i*) calculer pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\mathbb{X}>n)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathbf{P}(\mathbb{X}=k)$, et de même pour $\mathbf{P}(\mathbb{Y}>n)$;

(*ii*) montrer que $\mathbf{P}(\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})>n)=\mathbf{P}(\mathbb{X}>n)\times\mathbf{P}(\mathbb{Y}>n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$;

(*iii*) conclure en utilisant que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})=n)=\mathbf{P}(\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})>n-1)-\mathbf{P}(\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})>n).$$

Exercice 1 – (Loi du minimum de deux variables) [Correction p. 2]

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes, suivant toutes les deux la loi uniforme sur $\{1,2,\dots,n\}$.

On pose $\mathbb{T}=\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

1. Déterminer $\mathbb{T}(\Omega)$.
2. Pour tout $k\in\mathbb{T}(\Omega)$, calculer $\mathbf{P}(\mathbb{T}>k)$.
3. En déduire la loi de $\mathbb{T}$.
4. Vérifier que $\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(\mathbb{T}=k)=1$.

Exercice 2 – (Minimum de deux variables géométriques) [Correction p. 2]

Soient p_1 et p_2 deux réels de $]0,1[$. On pose $q_1=1-p_1$ et $q_2=1-p_2$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes, avec $\mathbb{X}\rightsquigarrow\mathcal{G}(p_1)$ et $\mathbb{Y}\rightsquigarrow\mathcal{G}(p_2)$.

On pose $\mathbb{T}=\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

1. Déterminer $\mathbb{T}(\Omega)$.
2. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, calculer $\mathbf{P}(\mathbb{T}>k)$.
3. En déduire la loi de $\mathbb{T}$. La reconnaître.
4. Que devient ce résultat si $p_1=p_2$?

Exercice 3 – (Minimum d'une variable uniforme et d'une géométrique) [Correction p. 3]

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in]0,1[$. On pose $q=1-p$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes, avec $\mathbb{X}\rightsquigarrow\mathcal{U}(\llbracket 1\,;n\rrbracket)$ et $\mathbb{Y}\rightsquigarrow\mathcal{G}(p)$.

On pose $\mathbb{T}=\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

1. Déterminer $\mathbb{T}(\Omega)$.
2. Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, calculer $\mathbf{P}(\mathbb{T} > k)$.
3. En déduire la loi de $\mathbb{T}$.
4. Écrire la loi de $\mathbb{T}$ lorsque $n = 2$ et vérifier que la somme des probabilités vaut 1.

Correction de l'exercice 1 : [Énoncé]

1. $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ prennent leurs valeurs dans $\{1, 2, \dots, n\}$, donc leur minimum aussi, et toutes ces valeurs sont atteintes (par exemple $\mathbb{T} = k$ si $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = k$).
   Ainsi $\mathbb{T}(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$.

Méthode
Pour un minimum, passer par $\mathbf{P}(\mathbb{T} > k)$: l'événement $(\min(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) > k)$ est l'intersection $(\mathbb{X} > k) \cap (\mathbb{Y} > k)$, ce qui permet d'utiliser l'indépendance.
On retrouve ensuite la loi par différence :
$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{T} > k-1) - \mathbf{P}(\mathbb{T} > k)$.

2. Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$.
   Le minimum de deux nombres est supérieur à k si et seulement si les deux le sont :
   $$(\mathbb{T} > k) = (\mathbb{X} > k) \cap (\mathbb{Y} > k).$$
   Par indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$:
   $$\mathbf{P}(\mathbb{T} > k) = \mathbf{P}(\mathbb{X} > k)\,\mathbf{P}(\mathbb{Y} > k).$$
   Or $\mathbb{X}$ suit la loi uniforme, donc
   $$\mathbf{P}(\mathbb{X} > k) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=k+1}^{n} [\mathbb{X} = k]\right) = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n-k}{n}.$$
   et de même pour $\mathbb{Y}$.
   Ainsi,
   $$\mathbf{P}(\mathbb{T} > k) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^2.$$

3. Pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, on a
   $$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{T} > k-1) - \mathbf{P}(\mathbb{T} > k).$$
   Ainsi,
   $$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \frac{(n-k+1)^2 - (n-k)^2}{n^2} = \frac{2(n-k)+1}{n^2} = \frac{2n-2k+1}{n^2}.$$

Piège
Ne pas écrire $\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = k)\,\mathbf{P}(\mathbb{Y} = k)$.
L'événement $(\mathbb{T} = k)$ contient aussi les cas où l'une des deux variables vaut k et l'autre est strictement plus grande.

4. On calcule :
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbb{T} = k) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1) = \frac{1}{n^2}\left(2n^2 - 2\times\frac{n(n+1)}{2} + n\right)\\ &= \frac{1}{n^2}\times 2n^2 - n^2 - n + n) = \frac{n^2}{n^2}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 : [Énoncé]

1. $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$, donc leur minimum aussi. De plus, toutes ces valeurs sont atteintes : pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(\mathbb{X} = \mathbb{Y} = k)$ est de probabilité non nulle et il implique $\mathbb{T} = k$.
   Ainsi $\mathbb{T}(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$.
   Le minimum de deux nombres est strictement supérieur à k si et seulement si les deux le sont :
   $$(\mathbb{T} > k) = (\mathbb{X} > k) \cap (\mathbb{Y} > k).$$

Par indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} > k) = \mathbf{P}(\mathbb{X} > k)\,\mathbf{P}(\mathbb{Y} > k).$$

Or $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p_1)$, donc

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} > k) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=k+1}^{+\infty} [\mathbb{X} = j]\right) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} q_1^{j-1} p_1 = p_1 \frac{q_1^k}{1-q_1} = q_1^k,$$

et de même $\mathbf{P}(\mathbb{Y} > k) = q_2^k$.
Ainsi,

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} > k) = (q_1 q_2)^k.$$

3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) &= \mathbf{P}(\mathbb{T} > k-1) - \mathbf{P}(\mathbb{T} > k)\\ &= (q_1 q_2)^{k-1} - (q_1 q_2)^k\\ &= (q_1 q_2)^{k-1}(1 - q_1 q_2).\end{aligned}$$

Posons $r = 1 - q_1 q_2 = p_1 + p_2 - p_1 p_2$.

On a $r \in]0,1[$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = (1-r)^{k-1} r.$$

À retenir
Le min de deux variables suivant une loi géométrique suit encore une loi géométrique.

On reconnaît la loi géométrique de paramètre r :

$$\mathbb{T} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p_1 + p_2 - p_1 p_2).$$

4. Si $p_1 = p_2 = p$, alors $q_1 = q_2 = 1 - p$ et $r = 1 - (1-p)^2 = p(2-p)$, donc

$$\mathbb{T} \rightsquigarrow \mathcal{G}\left(p(2-p)\right).$$

Correction de l'exercice 3 : [Énoncé]

1. $\mathbb{X}$ prend ses valeurs dans $[\![1\,;n]\!]$ et $\mathbb{Y}$ dans $\mathbb{N}^*$, donc $\mathbb{T}$ prend ses valeurs dans $[\![1\,;n]\!]$.
Toutes ces valeurs sont atteintes : pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, l'événement $(\mathbb{X} = \mathbb{Y} = k)$ est de probabilité non nulle et il implique $\mathbb{T} = k$.
Ainsi $\mathbb{T}(\Omega) = [\![1\,;n]\!]$.

2. Soit $k \in [\![0\,;n]\!]$.
Le minimum de deux nombres est strictement supérieur à k si et seulement si les deux le sont :

$$(\mathbb{T} > k) = (\mathbb{X} > k) \cap (\mathbb{Y} > k).$$

Par indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} > k) = \mathbf{P}(\mathbb{X} > k)\,\mathbf{P}(\mathbb{Y} > k).$$

Or $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1\,;n]\!])$, donc

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} > k) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=k+1}^{n} [\mathbb{X} = j]\right) = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n-k}{n}.$$

Et $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$, donc

$$\mathbf{P}(\mathbb{Y} > k) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{j-1} p = p\,\frac{q^k}{1-q} = q^k.$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} > k) = \frac{n-k}{n}\,q^k.$$

3. Pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, on a
$$\mathbf{P}(\mathbb{T}=k)=\mathbf{P}(\mathbb{T}>k-1)-\mathbf{P}(\mathbb{T}>k).$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbb{T}=k)&=\frac{n-k+1}{n}\,q^{k-1}-\frac{n-k}{n}\,q^k\\&=\frac{q^{k-1}}{n}\left((n-k+1)-(n-k)(1-p)\right)\\&=\frac{q^{k-1}}{n}\left(1+(n-k)p\right).\end{aligned}$$

4. Pour $n=2$:
$$\mathbf{P}(\mathbb{T}=1)=\frac{1+p}{2},\qquad \mathbf{P}(\mathbb{T}=2)=\frac{q}{2}=\frac{1-p}{2}.$$
On vérifie :
$$\mathbf{P}(\mathbb{T}=1)+\mathbf{P}(\mathbb{T}=2)=\frac{1+p+1-p}{2}=1.$$