Remédiation 24 — Loi d'un min

Méthode 1 – Loi d'un minimum :

Pour déterminer la loi de $\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ dans le cas où $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont **indépendantes** à valeurs dans $\mathbb{N}$, il faudra donc :

(*i*) calculer pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\mathbb{X}>n)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathbf{P}(\mathbb{X}=k)$, et de même pour $\mathbf{P}(\mathbb{Y}>n)$;

(*ii*) montrer que $\mathbf{P}(\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})>n)=\mathbf{P}(\mathbb{X}>n)\times\mathbf{P}(\mathbb{Y}>n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$;

(*iii*) conclure en utilisant que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})=n)=\mathbf{P}(\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})>n-1)-\mathbf{P}(\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})>n).$$

Exercice 1 – (Loi du minimum de deux variables)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes, suivant toutes les deux la loi uniforme sur $\{1,2,\dots,n\}$.

On pose $\mathbb{T}=\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

1. Déterminer $\mathbb{T}(\Omega)$.
2. Pour tout $k\in\mathbb{T}(\Omega)$, calculer $\mathbf{P}(\mathbb{T}>k)$.
3. En déduire la loi de $\mathbb{T}$.
4. Vérifier que $\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(\mathbb{T}=k)=1$.

Exercice 2 – (Minimum de deux variables géométriques)

Soient p_1 et p_2 deux réels de $]0,1[$. On pose $q_1=1-p_1$ et $q_2=1-p_2$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes, avec $\mathbb{X}\rightsquigarrow\mathcal{G}(p_1)$ et $\mathbb{Y}\rightsquigarrow\mathcal{G}(p_2)$.

On pose $\mathbb{T}=\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

1. Déterminer $\mathbb{T}(\Omega)$.
2. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, calculer $\mathbf{P}(\mathbb{T}>k)$.
3. En déduire la loi de $\mathbb{T}$. La reconnaître.
4. Que devient ce résultat si $p_1=p_2$?

Exercice 3 – (Minimum d'une variable uniforme et d'une géométrique)

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in]0,1[$. On pose $q=1-p$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes, avec $\mathbb{X}\rightsquigarrow\mathcal{U}(\llbracket 1\,;n\rrbracket)$ et $\mathbb{Y}\rightsquigarrow\mathcal{G}(p)$.

On pose $\mathbb{T}=\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

1. Déterminer $\mathbb{T}(\Omega)$.
2. Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, calculer $\mathbf{P}(\mathbb{T} > k)$.
3. En déduire la loi de $\mathbb{T}$.
4. Écrire la loi de $\mathbb{T}$ lorsque $n = 2$ et vérifier que la somme des probabilités vaut 1.