Remédiation 25 — Loi d'un max

Méthode 1 – Loi d'un maximum :

Pour déterminer la loi de $\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ dans le cas où $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont **indépendantes** à valeurs dans $\mathbb{N}$, il faudra donc :

(*i*) calculer pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\mathbb{X}\leqslant n)=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(\mathbb{X}=k)$, et de même pour $\mathbf{P}(\mathbb{Y}>n)$;

(*ii*) montrer que $\mathbf{P}(\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})\leqslant n)=\mathbf{P}(\mathbb{X}\leqslant n)\times\mathbf{P}(\mathbb{Y}\leqslant n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$;

(*iii*) conclure en utilisant que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})=n)=\mathbf{P}(\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})\leqslant n)-\mathbf{P}(\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})\leqslant n-1).$$

Exercice 1 – (Maximum de deux variables uniformes) [Correction p. 2]

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes, suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[\![1\,;n]\!]$.

On pose $\mathbb{T}=\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

1. Déterminer $\mathbb{T}(\Omega)$.
2. Pour tout $k\in[\![0\,;n]\!]$, calculer $\mathbf{P}(\mathbb{T}\leqslant k)$.
3. En déduire la loi de $\mathbb{T}$.
4. Vérifier que $\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(\mathbb{T}=k)=1$.

Exercice 2 – (Maximum de deux variables géométriques) [Correction p. 2]

Soient p_1 et p_2 deux réels de $]0,1[$. On pose $q_1=1-p_1$ et $q_2=1-p_2$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes, avec $\mathbb{X}\rightsquigarrow\mathcal{G}(p_1)$ et $\mathbb{Y}\rightsquigarrow\mathcal{G}(p_2)$.

On pose $\mathbb{T}=\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

1. Déterminer $\mathbb{T}(\Omega)$.
2. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, calculer $\mathbf{P}(\mathbb{T}\leqslant k)$.
3. En déduire la loi de $\mathbb{T}$.
4. Calculer $\mathbf{P}(\mathbb{T}=1)$ et $\mathbf{P}(\mathbb{T}=2)$ lorsque $p_1=p_2=\dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 – (Maximum de deux variables uniformes de supports différents) [Correction p. 3]

Soient n et m deux entiers tels que $1 \leqslant n \leqslant m$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes, avec $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1\,;n]\!])$ et $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1\,;m]\!])$.

On pose $\mathbb{T} = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

1. Déterminer $\mathbb{T}(\Omega)$.
2. Pour tout $k \in [\![0\,;m]\!]$, calculer $\mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k)$. On distinguera les cas $k \leqslant n$ et $k \geqslant n$.
3. En déduire la loi de $\mathbb{T}$.
4. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = 1$.

Correction de l'exercice 1 : [Énoncé]

1. $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ prennent leurs valeurs dans $[\![1\,;n]\!]$, donc leur maximum aussi, et toutes ces valeurs sont atteintes (par exemple $\mathbb{T} = k$ si $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = k$).
   Ainsi $\mathbb{T}(\Omega) = [\![1\,;n]\!]$.

Méthode
Pour un maximum, passer par $\mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k)$: l'événement $(\max(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \leqslant k)$ est l'intersection
$$(\mathbb{X} \leqslant k) \cap (\mathbb{Y} \leqslant k),$$
ce qui permet d'utiliser l'indépendance.
On retrouve ensuite la loi par différence :
$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k) - \mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k-1)$.

2. Soit $k \in [\![0\,;n]\!]$.
   Le maximum de deux nombres est inférieur ou égal à k si et seulement si les deux le sont :
   $$(\mathbb{T} \leqslant k) = (\mathbb{X} \leqslant k) \cap (\mathbb{Y} \leqslant k).$$
   Par indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$:
   $$\mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k) = \mathbf{P}(\mathbb{X} \leqslant k)\,\mathbf{P}(\mathbb{Y} \leqslant k).$$
   Or $\mathbb{X}$ suit la loi uniforme, donc
   $$\mathbf{P}(\mathbb{X} \leqslant k) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{k} [\mathbb{X} = j]\right) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n},$$
   et de même pour $\mathbb{Y}$.
   Ainsi,
   $$\mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$
3. Pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, on a
   $$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k) - \mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k-1).$$
   Ainsi,
   $$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \frac{k^2 - (k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}.$$

Piège
Ne pas écrire
$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = k)\,\mathbf{P}(\mathbb{Y} = k)$.
L'événement $(\mathbb{T} = k)$ contient aussi les cas où l'une des deux variables vaut k et l'autre est strictement plus petite.

4. On calcule :
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbb{T} = k) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{1}{n^2}\left(2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n\right)\\ &= \frac{n^2+n-n}{n^2} = \frac{n^2}{n^2}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 : [Énoncé]

1. $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$, donc leur maximum aussi.
   De plus, toutes ces valeurs sont atteintes : pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(\mathbb{X} = \mathbb{Y} = k)$ est de probabilité non nulle et il implique $\mathbb{T} = k$.

Ainsi $\mathbb{T}(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $(\mathbb{T} \leqslant k) = (\mathbb{X} \leqslant k) \cap (\mathbb{Y} \leqslant k)$, donc par indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$:
$$\mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k) = \mathbf{P}(\mathbb{X} \leqslant k)\,\mathbf{P}(\mathbb{Y} \leqslant k).$$
Or $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p_1)$, donc en passant par l'événement contraire :
$$\mathbf{P}(\mathbb{X} \leqslant k) = 1 - \mathbf{P}(\mathbb{X} > k) = 1 - \sum_{j=k+1}^{+\infty} q_1^{j-1} p_1 = 1 - p_1 \frac{q_1^k}{1-q_1} = 1 - q_1^k,$$
et de même $\mathbf{P}(\mathbb{Y} \leqslant k) = 1 - q_2^k$.
Ainsi,
$$\mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k) = \left(1 - q_1^k\right)\left(1 - q_2^k\right).$$

3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k) - \mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k-1).$$
En développant :
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) &= \left(1 - q_1^k - q_2^k + (q_1 q_2)^k\right) - \left(1 - q_1^{k-1} - q_2^{k-1} + (q_1 q_2)^{k-1}\right) \\ &= \left(q_1^{k-1} - q_1^k\right) + \left(q_2^{k-1} - q_2^k\right) - \left((q_1 q_2)^{k-1} - (q_1 q_2)^k\right).\end{aligned}$$
Ainsi,
$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = q_1^{k-1} p_1 + q_2^{k-1} p_2 - (q_1 q_2)^{k-1}\left(1 - q_1 q_2\right).$$

Remarque
La loi du max de deux lois géométriques n'est pas géométrique.

4. Si $p_1 = p_2 = \dfrac{1}{2}$, alors $q_1 = q_2 = \dfrac{1}{2}$ et $q_1 q_2 = \dfrac{1}{4}$. Donc
$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4},$$
$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{16}.$$

Correction de l'exercice 3 : [Énoncé]

1. $\mathbb{X}$ prend ses valeurs dans $[\![1\,;n]\!] \subset [\![1\,;m]\!]$ et $\mathbb{Y}$ dans $[\![1\,;m]\!]$, donc $\mathbb{T}$ prend ses valeurs dans $[\![1\,;m]\!]$.
Toutes ces valeurs sont atteintes : pour $k \in [\![1\,;m]\!]$, l'événement $(\mathbb{X} = 1) \cap (\mathbb{Y} = k)$ est de probabilité non nulle et il implique $\mathbb{T} = k$.
Ainsi $\mathbb{T}(\Omega) = [\![1\,;m]\!]$.

2. Soit $k \in [\![0\,;m]\!]$. On a $(\mathbb{T} \leqslant k) = (\mathbb{X} \leqslant k) \cap (\mathbb{Y} \leqslant k)$, donc par indépendance :
$$\mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k) = \mathbf{P}(\mathbb{X} \leqslant k)\,\mathbf{P}(\mathbb{Y} \leqslant k).$$
Comme $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1\,;m]\!])$, on a $\mathbf{P}(\mathbb{Y} \leqslant k) = \dfrac{k}{m}$.

Attention
La valeur de $\mathbf{P}(\mathbb{X} \leqslant k)$ dépend de la position de k par rapport à n : pour $k \geqslant n$, l'événement $(\mathbb{X} \leqslant k)$ est certain.

— Si $k \in [\![0\,;n]\!]$, alors $\mathbf{P}(\mathbb{X} \leqslant k) = \dfrac{k}{n}$, donc
$$\mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k) = \frac{k}{n} \times \frac{k}{m} = \frac{k^2}{nm}.$$

— Si $k \in [\![n\,;m]\!]$, alors $\mathbf{P}(\mathbb{X} \leqslant k) = 1$, donc
$$\mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k) = \frac{k}{m}.$$

Les deux formules coïncident pour $k = n$: on trouve $\dfrac{n}{m}$.

Remarque

Si $n = m$, on retrouve la loi de l' exercice (1) :

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \frac{2k-1}{n^2}.$$

3. Pour $k \in [\![1\,;m]\!]$, on a

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k) - \mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k-1).$$

— Si $k \in [\![1\,;n]\!]$, alors $k-1 \in [\![0\,;n]\!]$ et

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \frac{k^2-(k-1)^2}{nm} = \frac{2k-1}{nm}.$$

— Si $k \in [\![n+1\,;m]\!]$, alors $k-1 \in [\![n\,;m]\!]$ et

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \frac{k}{m} - \frac{k-1}{m} = \frac{1}{m}.$$

4. On sépare la somme selon les deux cas :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}(\mathbb{T} = k) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{nm} + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{m} \\ &= \frac{1}{nm}\left(n(n+1)-n\right) + \frac{m-n}{m} \\ &= \frac{n}{m} + \frac{m-n}{m} \\ &= 1.\end{aligned}$$