Remédiation 25 — Loi d'un max

Méthode 1 – Loi d'un maximum :

Pour déterminer la loi de $\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ dans le cas où $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont **indépendantes** à valeurs dans $\mathbb{N}$, il faudra donc :

(*i*) calculer pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\mathbb{X}\leqslant n)=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(\mathbb{X}=k)$, et de même pour $\mathbf{P}(\mathbb{Y}>n)$;

(*ii*) montrer que $\mathbf{P}(\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})\leqslant n)=\mathbf{P}(\mathbb{X}\leqslant n)\times\mathbf{P}(\mathbb{Y}\leqslant n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$;

(*iii*) conclure en utilisant que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})=n)=\mathbf{P}(\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})\leqslant n)-\mathbf{P}(\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})\leqslant n-1).$$

Exercice 1 – (Maximum de deux variables uniformes)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes, suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[\![1\,;n]\!]$.

On pose $\mathbb{T}=\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

1. Déterminer $\mathbb{T}(\Omega)$.
2. Pour tout $k\in[\![0\,;n]\!]$, calculer $\mathbf{P}(\mathbb{T}\leqslant k)$.
3. En déduire la loi de $\mathbb{T}$.
4. Vérifier que $\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(\mathbb{T}=k)=1$.

Exercice 2 – (Maximum de deux variables géométriques)

Soient p_1 et p_2 deux réels de $]0,1[$. On pose $q_1=1-p_1$ et $q_2=1-p_2$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes, avec $\mathbb{X}\rightsquigarrow\mathcal{G}(p_1)$ et $\mathbb{Y}\rightsquigarrow\mathcal{G}(p_2)$.

On pose $\mathbb{T}=\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

1. Déterminer $\mathbb{T}(\Omega)$.
2. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, calculer $\mathbf{P}(\mathbb{T}\leqslant k)$.
3. En déduire la loi de $\mathbb{T}$.
4. Calculer $\mathbf{P}(\mathbb{T}=1)$ et $\mathbf{P}(\mathbb{T}=2)$ lorsque $p_1=p_2=\dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 – (Maximum de deux variables uniformes de supports différents)

Soient n et m deux entiers tels que $1 \leqslant n \leqslant m$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes, avec $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1\,;n]\!])$ et $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1\,;m]\!])$.

On pose $\mathbb{T} = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

1. Déterminer $\mathbb{T}(\Omega)$.
2. Pour tout $k \in [\![0\,;m]\!]$, calculer $\mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k)$. On distinguera les cas $k \leqslant n$ et $k \geqslant n$.
3. En déduire la loi de $\mathbb{T}$.
4. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = 1$.