Remédiation 1 Calcul de sommes (et produits) fini(e)s

I. Sommes simples

Rappel – Sommes usuelles :

À retenir
Dans une somme télescopique, il ne reste que les deux extrêmes.

$$\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) = \cancel{u_1} - u_0 + \cancel{u_2} - \cancel{u_1} + \ldots + \cancel{u_n} - \cancel{u_{n-1}} + u_{n+1} - \cancel{u_n}$$
$$= u_{n+1} - u_0.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Remarque
Si $q \neq 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} q^k = q\,\frac{1-q^n}{1-q}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Exercice 1 – (Sommes télescopiques)

Calculer les sommes et les produits suivants :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.
4. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right)$.

Exercice 2

Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$.
3. Pour $p < n$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} 3^k$.

II. Sommes doubles

Exercice 3

Calculer les sommes et produits suivants :

1. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)$.
2. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j}$.

Exercice 4 – (Un produit)

Calculer le produits suivant :

$$\prod_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} ij.$$

Exercice 5 – (Somme triangulaire)

Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$.