Remédiation 1

Inverse d'une matrice -- par un polynôme annulateur

Exercice 1

On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(\mathrm{A}+\mathrm{I})^2$.

2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Remédiation 2

Montrer qu'un espace est un SEV -- par un Vect

Exercice 1

On considère $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et on note $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.

Remédiation 3

Inverse d'une matrice -- par les opérations élémentaires

Exercice 1

On note $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

Remédiation 4

Puissance d'une matrice -- par un dia ou trigonalisation

Exercice 1

On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Méthode
Une propriété qui dépend de $n \in \mathbb{N}$doit tout de suite vous faire penser à une démonstration par récurrence.

2. Démontrer $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P^{-1}A^nP = T^n$ et en déduire $\forall\, n \in \mathbb{N}$, A^n.

Remédiation 5

Puissance d'une matrice -- par la formule du binôme

Exercice 1

On note $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Exhiber une matrice $\mathrm{N} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $\mathrm{T} = -\mathrm{I} + \mathrm{N}$.
2. Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Remédiation 6 — Nature d'une série -- par équivalence

Exercice 1

Quelle est la nature des séries :

1. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1}$?

2. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)^2}$?

Remédiation 7 — Continuité d'une fonction

Exercice 1

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Rappel :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in$ I.

- f est continue en x_0 si, et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- f est dérivable en x_0 si, et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ou $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existent.
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si, et seulement si elle est dérivable et sa dérivée est continue sur I.
- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si, et seulement si elle est dérivable à tout ordre sur I.

Remarque
« existe » veut dire « qu'on peut trouver un réel ».

Méthode 1 :

La notion de continuité, dérivabilité, $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^\infty$, …

- fonctionne bien avec les sommes et les produit et il suffira d'écrire :

  f est la somme (ou le produit) de fonction continues (dérivables, …) sur I *donc est continue (dérivable, …) sur* I.

- fonctionne moins bien avec les quotients. Il suffira juste de vérifier que le dénominateur ne s'annule pas et d'écrire :

  f est le quotient de fonction continues (dérivables, …) dont le dénominateur ne s'annule pas sur I *donc est continue (dérivable, …) sur* I.

- fonctionne avec les fonctions ln et $\sqrt{\ }$ mais en faisant attention :

  f est continue (dérivable, …) et à valeurs strictement positives sur I *donc* $\ln(f)$ *(ou* $\sqrt{f}$*) est continue (dérivable, …) sur* I *d'après les théorèmes sur les composées.*

Remarque
Dans le cas de $\sqrt{f}$, on pourra se contenter de « valeurs positives ou nulles » mais seulement pour la continuité.