Remédiation 8 — Nature d'une série et somme -- Séries alternées

Commentaires : *C'est un grand classique des concours en marge du programme. À savoir faire donc !*

Exercice 1

On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle.

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k, \qquad v_n = \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k \quad \text{et} \quad s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_0 \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant u_0$.
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite s et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet la même limite s.
3. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ est convergente de somme s.
4. **Application :** Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente. On note $\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{k+1}$ sa somme.