

II

Rappels d'algèbre linéaire Espaces vectoriels

LA notion d'*espace vectoriel* est une structure fondamentale des mathématiques modernes comme on a commencé à l'entrevoir dans les chapitres précédents.

IL s'agit de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles pourtant très différents. Par exemple, on peut additionner deux vecteurs du plan, et aussi multiplier un vecteur par un réel (pour l'agrandir ou le rétrécir). Mais on peut aussi additionner deux fonctions, ou multiplier une fonction par un réel. Même chose avec les polynômes, les matrices, ...

$\vec{P}$	$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R}[X]$	$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
$3\vec{i} + 2\vec{j}$	$f - 2g$	$3P + 2Q$	$3A + 2B$	$3(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + 2(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$
$\vec{0}$	$x \mapsto 0_{\mathbb{R}}$	$0_{\mathbb{R}[X]}$	$(0)_{n,p}$	$(0)_{n \in \mathbb{N}}$

FIGURE II.1 : Exemples d'espaces vectoriels

Plan du chapitre

I ESPACES VECTORIELS	2
I.1 ESPACES VECTORIELS DE RÉFÉRENCE ET FONDAMENTAUX	4
I.2 SOUS-ESPACES VECTORIELS	6
II DIMENSION FINIE	11
II.1 FAMILLES LIBRES ET GÉNÉRATRICES	11
II.2 DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL	16

I. ESPACES VECTORIELS

Définition 1 – Structure d'espace vectoriel :

Soit E un ensemble non vide muni de deux lois :

D1 • Une loi de *composition interne* notée $+_E$ (l'addition) :

$$\begin{aligned}+_E : E \times E &\longrightarrow E \\(x; y) &\longmapsto x +_E y\end{aligned}$$

D2 • Une loi de *composition externe*, notée $\cdot_E$ (la multiplication par un scalaire) :

$$\begin{aligned}\cdot_E : \mathbb{R} \times E &\longrightarrow E \\(\lambda; x) &\longmapsto \lambda \cdot_E x\end{aligned}$$

On dit que $(E, +_E, \cdot_E)$ est un *espace vectoriel sur $\mathbb{R}$* ou *$\mathbb{R}$ -espace vectoriel* abrégé en $\mathbb{R}$ -ev lorsque :

1. $(E, +_E)$ est un groupe abélien, i.e.

- a. $+_E$ est *associative* : $\forall (x; y; z) \in E^3$,
 $(x +_E y) +_E z = x +_E (y +_E z) = x +_E y +_E z$.
- b. $+_E$ est *commutative* : $\forall (x; y) \in E^2$, $x +_E y = y +_E x$.
- c. $+_E$ admet un *élément neutre* noté 0_E et appelé *vecteur nul* :

$$\forall x \in E, \quad x +_E 0_E = 0_E +_E x = x.$$

d. Tout élément de E admet un *symétrique* pour $+_E$ appelé *opposé de x* et noté $-x$:

$$\forall x \in E, \quad x +_E (-x) = 0_E.$$

2. La loi de composition externe vérifie les axiomes suivants :

- a. $\forall x \in E, \forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \cdot_E (\mu \cdot_E x) = (\lambda \times_{\mathbb{R}} \mu) \cdot_E x$: *compatibilité avec $\times_{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$* .
- b. $\forall x \in E, \forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda +_{\mathbb{R}} \mu) \cdot_E x = \lambda \cdot_E x +_E \mu \cdot_E x$: *compatibilité $+_{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$* .
- c. $\forall (x; y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot_E (x +_E y) = \lambda \cdot_E x +_E \lambda \cdot_E y$: *compatibilité avec $+_E$ dans E* .
- d. $\forall x \in E$, $1_{\mathbb{R}} \cdot_E x = x$: $1_{\mathbb{R}}$ est l'élément neutre pour $\cdot_E$.

On appelle :

- *vecteurs* les éléments de E .
- *scalaires* les éléments de $\mathbb{R}$.

On dit que $\mathbb{R}$ est le *corps de base* de l'espace vectoriel E .

Ces conditions peuvent paraître complexes, mais on ne les vérifie jamais en pratique et on peut, en fait, les résumer simplement par le fait qu'il y a deux opérations sur notre ensemble E : une addition, et un produit extérieur, qui vérifient des conditions assez naturelles.

Remarques :

- S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera les lois $+$ et $\cdot$ au lieu de $+_E$ et $\cdot_E$.
- On notera que l'existence du vecteur nul implique que tout espace vectoriel E est non vide.
- Pour éviter des parenthèses, on définit une priorité de la loi externe sur la loi interne : $\lambda \cdot x + y$ signifie $(\lambda \cdot x) + y$.
- L'élément neutre de $(E; +)$ est unique.

En effet, supposant que l'on en ait deux e et e' alors :

$$e \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{def de } e'}}{=} e + e' \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{def de } e}}{=} e'.$$

C'est un fait général.

- De même, l'opposé d'un vecteur $x \in E$ est unique. En effet, supposant qu'il en existe deux x' et x'' alors on aurait :

$$x' \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{def de } 0_E}}{=} x' + 0_E \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{def de } x''}}{=} x' + (x + x'') \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{associativité de } +}}{=} (x' + x) + x'' \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{def de } x'}}{=} 0_E + x'' \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{def de } 0_E}}{=} x''.$$

C'est également un fait général.

- Si elle est non ambiguë, on allège en général l'écriture en notant λu plutôt que $\lambda \cdot \vec{u}$ pour λ un scalaire et $\vec{u}$ un vecteur, même si la notation avec des flèches pour les vecteurs peut être utilisée dans un premier temps pour ne pas mélanger les objets. Les lettres grecques $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \dots$ s'utilisent plutôt pour les scalaires que pour les vecteurs.

ATTENTION

- Ne pas confondre le zéro des scalaires $0_{\mathbb{R}}$ avec le vecteur nul 0_E : s'il y a une ambiguïté, préciser la notation en indice ou mettre une flèche sur le vecteur.
- La loi $\cdot$ est une loi de multiplication externe : ce n'est pas le produit de deux vecteurs.

Proposition 1 – Règles de calcul :

1. $\forall (x; x'; y) \in E^3, \quad x + y = x' + y \implies x = x'.$
2. $\forall (\lambda; x) \in \mathbb{R} \times E, \quad (-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x).$
- En particulier, $(-1_{\mathbb{R}}) \cdot x = -x.$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x; y) \in E^2, \quad \lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y.$
4. $\forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, \quad (\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x.$
5. $\forall x \in E, \quad 0_{\mathbb{R}} \cdot x = 0_E \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot 0_E = 0_E.$

Réciproquement, $\forall (\lambda; x) \in \mathbb{R} \times E,$

$$\lambda \cdot x = 0_E \implies \lambda = 0_{\mathbb{R}} \quad \text{ou} \quad x = 0_E.$$

En particulier,

6. Si $\lambda \neq 0$, alors $\forall (x; y) \in E^2, \quad \lambda \cdot x = \lambda \cdot y \implies x = y.$
7. Si $x \neq 0_E$, alors $\forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda \cdot x = \mu \cdot x \implies \lambda = \mu.$

Preuve :

1. Simple existence et définition du symétrique de y dans E .
2. Soit $(\lambda; x) \in \mathbb{R} \times E$.

On a :

$$(-\lambda).x + \lambda.x = (-\lambda + \lambda).x = 0_{\mathbb{R}}.x = 0_E \implies (-\lambda).x = -(\lambda.x),$$

et

$$\lambda.(-x) + \lambda.x = \lambda.(-x + x) = \lambda.0_E = 0_E \implies \lambda.(-x) = -(\lambda.x).$$

Enfin, pour $\lambda = 1_{\mathbb{R}}$, on a : $(-1_{\mathbb{R}}).x = -(1_{\mathbb{R}}.x) = -x$.

3. Conséquence de (2.).

4. Conséquence de (2.).

5. Soit $x \in E$. Alors $0_{\mathbb{R}}.x = (0_{\mathbb{R}} +_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}).x = 0_{\mathbb{R}}.x +_E 0_{\mathbb{R}}.x \implies 0_{\mathbb{R}}.x = 0_E$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a aussi $\lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E + \lambda.0_E \implies \lambda.0_E = 0_E$.

Réciproquement, soit $(\lambda; x) \in \mathbb{R} \times E$ tel que $\lambda.x = 0_E$.

Supposons que $\lambda \neq 0_{\mathbb{R}}$ et montrons que $x = 0_E$.

On a alors $x = 1_{\mathbb{R}}.x = (\lambda^{-1}\lambda).x = \lambda^{-1}.(\lambda.x) = \lambda^{-1}.0_E = 0_E$.

Remarque : Pour vous remémorer le premier chapitre de logique, afin de démontrer la relation $\mathcal{P} \implies (\mathcal{Q} \cup \mathcal{R})$ i.e. $\exists \mathcal{P} \cup (\mathcal{Q} \cup \mathcal{R})$, on a démontré ici $(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}) \implies \mathcal{R}$ i.e. $\exists (\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}) \cup \mathcal{R}$.

6. Conséquence de (3.) et (5.).

7. Conséquence de (4.) et (5.).



I.1 – Espaces vectoriels de référence et fondamentaux

Exemple 1 – $\mathbb{R} ::$

L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de son addition et de sa multiplication est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de vecteur nul $\overrightarrow{0_{\mathbb{R}}} = 0_{\mathbb{R}}$ et muni des lois :

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) &\longmapsto x + y = x +_{\mathbb{R}} y \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda; x) &\longmapsto \lambda \cdot x = \lambda \times_{\mathbb{R}} x. \end{aligned}$$

Proposition 2 :

$(\mathbb{R}; +; \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Remarque : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ne sont pas des $\mathbb{R}$ -ev.

Exemple 2 – $\mathbb{R}^n :$

De manière générale, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}^n$ les lois :

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ ((x_1, x_2, \dots, x_n); (y_1, y_2, \dots, y_n)) &\longmapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cdot : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\lambda; (x_1, x_2, \dots, x_n)) &\longmapsto (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \end{aligned}$$

Proposition 3 :

L'ensemble $(\mathbb{R}^n; +; \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, où le vecteur nul est $\overrightarrow{0_{\mathbb{R}^n}} = (0, 0, \dots, 0)$.

Exemple 3 – $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

On munit $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des lois :

$$\begin{aligned} + : \quad \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ \left((a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}; (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right) &\longmapsto (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cdot : \quad \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ (\lambda; (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}) &\longmapsto \lambda \cdot (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \end{aligned}$$

Ainsi doté,

Proposition 4 :

L'ensemble $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ des matrices à n lignes et p colonnes est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Le vecteur nul est la matrice nulle $\overrightarrow{0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}} = (0)_{n,p}$.

Exemple 4 – $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$:

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$, noté aussi $\mathbb{R}^I$ des fonctions de I à valeurs dans $\mathbb{R}$ peut être munis des lois :

$$\begin{aligned} + : \quad \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^I &\longrightarrow \mathbb{R}^I \\ (f; g) &\longmapsto f+g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) +_{\mathbb{R}} g(x) \end{array} \end{aligned}$$

et

⚠ Attention

Toutefois, l'ensemble de toutes les matrices (sans spécification de taille) n'est pas un espace vectoriel (on ne peut pas additionner deux matrices de taille différente).

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^I &\longrightarrow \mathbb{R}^I \\ (\lambda; f) &\longmapsto \lambda \cdot f : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\quad x \longmapsto \lambda \cdot_{\mathbb{R}} f(x) \end{aligned}$$

Proposition 5 – S :

I est non vide alors l'ensemble $(\mathbb{R}; \mathcal{F}(I; \mathbb{R})) + \cdot$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Le vecteur nul $\overrightarrow{0_{\mathcal{F}(I; \mathbb{R})}}$ est la fonction nulle $0_{\mathcal{F}(I; \mathbb{R})} : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
 $x \longmapsto 0_{\mathbb{R}}$

Corollaire 6 :

L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel dont le vecteur nul est la suite constante égale à $0_{\mathbb{R}}$.

Exemple 5 – $\mathbb{R}[X]$:

L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de vecteur nul le polynôme nul et muni des lois :

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ \left(\sum_{k \geq 0} a_k X^k ; \sum_{k \geq 0} b_k X^k \right) &\longmapsto \sum_{k \geq 0} (a_k + b_k) X^k \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ \left(\lambda ; \sum_{k \geq 0} a_k X^k \right) &\longmapsto \lambda \cdot \sum_{k \geq 0} a_k X^k = \sum_{k \geq 0} (\lambda a_k) X^k. \end{aligned}$$

En particulier, on a également vu que l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel.

I.2 – Sous-espaces vectoriels**Définition 2 – Combinaisons linéaires :**

Soit $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

— Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \dots, x_p \in E$.

On dit que $x \in E$ est *combinaison linéaire* des vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_p$ de E s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que :

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \dots + \lambda_p \cdot x_p = \sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot x_k.$$

⚠ Attention

L'ensemble des polynômes de degré exactement n n'est pas un espace vectoriel.

⚠ Attention

Il n'y a pas, a priori, unicité des coefficients sans hypothèses supplémentaires sur $(x_1, \dots, x_n)$:

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^p \mu_k x_k$$

~~F. PUCCI~~

$\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lambda_k = \mu_k.$



— Soit X une partie de E .

On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire de vecteurs de X si x est combinaison linéaire d'une famille *finie* de vecteurs de X .

Définition 3 – Sous-espaces vectoriels :

Soit $(E; +_E; \cdot_E)$ un $\mathbb{R}$ -ev et $F \subset E$.

On dit que F est un *sous-espace vectoriel* de E , abrégé souvent en *sev* lorsque :

- $F \neq \emptyset$
- $\forall (x; y) \in F^2, \quad x +_E y \in F$ (stabilité de F pour $+_E$)
- $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot_E x \in F$ (stabilité de F pour $\cdot_E$)

⚠ Attention

Aucun $\mathbb{R}$ -ev, $\mathbb{R}$ -ev, $\mathbb{C}$ -ev ou sev n'est vide!!!!

Exemple 6 – S :

E est un $\mathbb{R}$ -ev alors $\{0_E\}$ et E sont des sev de E (appelés sous-espaces vectoriels triviaux de E).

Ce sont, respectivement, le plus petit et le plus grand sev au sens de l'inclusion.

Remarque : Tout sous-espace F de E contient le vecteur 0_E : en effet, $F \neq \emptyset$ contient au moins un élément x et son symétrique d'où

$$0_E = \underbrace{x +_E (-x)}_{\in E} \in F.$$

En conséquence, pour montrer qu'un sev F de E est non vide, on cherchera souvent à montrer que $0_E \in F$. A contrario, une partie ne contenant pas 0_E ne pourra être un sev de E .

Corollaire 7 – Stabilité d'un sev par combinaisons linéaires :

$$F \text{ est un sev de } E \iff \begin{cases} 0_E \in F \\ \forall (x; y) \in F^2, \forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F. \end{cases}$$

✎ Preuve :

($\Rightarrow$) Assez simple à montrer.

($\Leftarrow$) Comme $0_E \in F$, on a $F \neq \emptyset$.

En prenant $\lambda = \mu = 1$, on obtient la stabilité par $+$.

En prenant $\mu = 0$, on obtient la stabilité par $\cdot$.



Remarque : Mieux, on vérifiera que montrer que F est stable par des combinaisons linéaires du type $\lambda \cdot x + y$ est équivalent à montrer que F est stable par combinaisons linéaires.

Le corollaire (7) nous entraîne à considérer les lois :

$$\begin{aligned} +_F : F \times F &\longrightarrow F & \text{et} & \quad \cdot_F : \mathbb{R} \times F \longrightarrow F \\ (x; y) &\longmapsto x +_E y & (\lambda; x) &\longmapsto \lambda \cdot_E x \end{aligned}$$

Ces lois s'appellent les *lois induites* sur F (par celles de E) ou les restrictions des lois de E à F . C'est un cas général de considérer de telles lois afin de faire hériter le sous-espace de la structure de l'espace parent.

Théorème 8 – Structure induite :

Soit F un sev d'un $\mathbb{R}$ -ev $(E; +_E; \cdot_E)$.

Alors, $(F; +_F; \cdot_F)$ muni des lois induites de E sur F est un $\mathbb{R}$ -ev.

Considérant une sous-partie F (non vide nécessairement) d'un $\mathbb{R}$ -ev E , une des grandes conséquences de ce théorème est qu'il ne nous sera plus nécessaire de montrer les 9 critères de la définition (1) mais seulement de démontrer que F est un sev de E .

Preuve :

- L'ensemble F est muni d'une addition et d'une loi externe.
- L'addition reste évidemment associative et commutative car ceci est vraie dans E contenant F .
- Comme $0_E \in F$, l'addition de F possède un élément neutre :

$$\forall x \in F, x +_F 0_E = x +_E 0_E = x.$$

- Soit $x \in F$. Alors $-x = (-1) \cdot_E x = (-1) \cdot_F x \in F$: tout élément de F admet un opposé qui est bien dans F .
- Les dernières propriétés, qui sont vraies lorsque x et y appartiennent à E , sont a fortiori vraies lorsque x et y appartiennent à F .



Exemples 7 – Dans les espaces de fonctions :

- L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Les ensembles $\mathcal{C}^\infty(I; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^k(I; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$ sont tous des sev de l'ensemble $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

Ils forment même une suite de sev pour l'inclusion.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est un sev du $\mathbb{R}$ ev vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

On retrouve une suite de sev pour l'inclusion :

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_0[X] \subset \mathbb{R}_1[X] \subset \dots \subset \mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}_{n+1}[X] \subset \dots \subset \mathbb{R}[X].$$

Exemples 8 – Dans les espaces de matrices :

Les ensembles

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales,

- $\mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures,
 - $\mathcal{T}_{n,I}(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires inférieures,
 - $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques,
 - $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques,
- sont des sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemples 9 – Dans l'espace des suites :

Notons $\mathcal{S}$ le Rev des suites réelles.

- L'ensemble $\mathcal{S}_b$ des suites bornées est un sev de $\mathcal{S}$.
- L'ensemble $\mathcal{S}_c$ des suites convergentes est un sev de $\mathcal{S}_b$.

Exemples 10 – Et bien d'autres :

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.
- L'ensemble des solutions sur un intervalle I , d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(I; \mathbb{R})$.

Plus précisément,

- $\left\{ y \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}) / y' + a(x)y = 0 \right\}$ est un sev de $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$.
- $\left\{ y \in \mathcal{C}^2(I; \mathbb{R}) / y'' + ay' + by = 0 \right\}$ est un sev de $\mathcal{C}^2(I; \mathbb{R})$.
- L'ensemble des suites récurrentes linéaires est un sev du Rev des suites réelles ou complexes.

Tout ceci pour dire que pour montrer qu'un ensemble E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, on montrera systématiquement qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'un des exemples de référence vus dans le [paragraphe \(I.1\)](#).

Définition 4 – Sev engendré par une partie :

Soit X une partie de E .

On note $\text{Vect}(X)$, le plus petit sous-espace vectoriel contenant X .

C'est l'intersection de tous les sev contenant X :

$$\text{Vect}(X) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev} \\ X \subset F}} F.$$

 **Preuve :** Soit X une partie de E et considérons $\bigcap_{\substack{F \text{ sev} \\ X \subset F}} F$, l'intersection de tous les sev contenant X (dont fait partie E).

Alors,

- $\bigcap_{\substack{F \text{ sev} \\ X \subset F}} F$ est bien un sous-espace vectoriel de E d'après la [proposition \(??\)](#).

— C'est bien le plus petit au sens de l'inclusion car pour tout sev G de E tel que $X \subset G$, on a :

$$\bigcap_{\substack{F \text{ sev} \\ X \subset F}} F = G \cap \bigcap_{\substack{F \text{ sev} \\ X \subset F}} F \subset G.$$



Tout d'abord deux propriétés simples mais importantes découlant de la définition par superlatif :

Proposition 9 – S :

Soit $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -ev.

1. F est un sev de E si, et seulement si $F = \text{Vect}(F)$.
2. Pour toutes parties X et Y de E , $X \subset Y \implies \text{Vect}(X) \subset \text{Vect}(Y)$.

Faisons enfin le lien avec l'intérêt majeur de la structure : les combinaisons linéaires.

Théorème 10 :

Soient $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -ev X une partie non vide de E .

$\text{Vect}(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies des vecteurs de X .

Quoi de plus naturel que de former toutes les combinaisons linéaires possibles des éléments de X pour obtenir le plus petit sous-ensemble stable par combinaisons linéaires d'éléments de X ?

Preuve : Nommons provisoirement $\mathcal{C}$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de X et montrons que $\text{Vect}(X) = \mathcal{C}$ par double inclusion.

$\supset$: $\text{Vect}(X)$ est un sev contenant X . Par stabilité, il contient donc toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de X i.e. $\mathcal{C} \subset \text{Vect}(X)$.

$\subset$: Montrons que $\mathcal{C}$ est un sev de E contenant X .

Remarquons tout d'abord que tout vecteur x de X est clairement une combinaison linéaire de lui-même donc élément de $\mathcal{C}$.

En clair, $X \subset \mathcal{C}$ et en particulier $\mathcal{C} \neq \emptyset$.

Soient maintenant $(x; y) \in \mathcal{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors x et y sont des combinaisons linéaires de vecteurs de X mais aussi $\lambda \cdot x + y$ donc $\lambda \cdot x + y \in \mathcal{C}$.

Ainsi $\mathcal{C}$ est un sev de E contenant X . Comme $\text{Vect}(X)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) de ceux-là, on obtient $\text{Vect}(X) \subset \mathcal{C}$.



Exemple 11 – IMPORTANT :

Si $X = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est finie, on note $\text{Vect}(\{e_1, e_2, \dots, e_n\})$ ou plus simplement $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

On a alors l'egalité :

$$\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \left\{ \lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \dots + \lambda_n \cdot e_n \mid (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

En particulier et à retenir,

$$x \in \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) \iff \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i.$$

II. DIMENSION FINIE

II.1 – Familles libres et génératrices

Définition 5 – Familles libres et liées :

Soient E un $\mathbb{R}$ -ev, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$.

D1 • On dit que la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est *liée* si

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}, \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_E. \quad (\text{Liée})$$

D2 • On dit que la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est *libre* si elle n'est pas liée *i.e.* si

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_E \implies \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = 0 \right). \quad (\text{Libre})$$

On dit alors que la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est *linéairement indépendante*.

Remarque : Une famille contenant le vecteur nul est liée et on convient que toute famille à zéro éléments est libre.

Exemple 12 – Une famille libre de polynômes :

Dans $\mathbb{R}[X]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille libre.

En effet, un polynôme est nul si, et seulement si tous ses coefficients le sont ce qui se traduit par :

$$\forall (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k = 0_{\mathbb{R}[X]} \implies \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_k = 0.$$

Corollaire 11 :

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille libre d'éléments de E .

Pour tous $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k \implies \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = \mu_k.$$

 **Preuve :** Immédiatement,

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k \iff \sum_{k=1}^n (\lambda_k - \mu_k) x_k = 0 \implies \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_k = \mu_k.$$



Vous devez vous douter à ce stade que la liberté d'une famille donnera l'unicité d'une certaine écriture ou d'une certaine décomposition.

Corollaire 12 – Important :

Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si, et seulement si tout vecteur de $\text{Vect}(\{x_1, \dots, x_n\})$ se décompose **de manière unique** comme combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \dots, x_n$.

 **Preuve :**

$(\Rightarrow)$: C'est exactement le [corollaire \(11\)](#).

$(\Leftarrow)$: Supposons que la décomposition est unique, et montrons que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

Considérons alors une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille i.e. $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$.

Ce qui s'écrit aussi $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n 0 x_i$.

Par unicité de la décomposition, $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_i = 0$.

La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.



Exemples 13 – La base !:

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille d'éléments d'un $\mathbb{R}$ -ev E .

- E1** • Si $n = 0$: la famille vide est libre (convention).
- E2** • Si $n = 1$: la famille (x_1) est libre $\iff x_1 \neq 0_E$.
- E3** • Si $n = 2$: la famille (x_1, x_2) est libre $\iff x_1$ et x_2 sont non colinéaires.
- E3** •
 - Si x_1 et x_2 sont colinéaires (ou nuls), on peut écrire $x_1 = \lambda x_2$ i.e. $1x_1 - \lambda x_2 = 0$: la famille est liée.
 - Réciproquement, si la famille (x_1, x_2) est liée, on peut écrire $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$. Si $\lambda_1 \neq 0$, on peut écrire $x_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2$ et les vecteurs sont colinéaires. Idem si $\lambda_2 \neq 0$ et on ne peut avoir $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ par hypothèse.

Exemple 14 :

Soit $x_1 = (1; 1; 1)$, $x_2 = (1; 2; -1)$ et $x_3 = (-1; 1; 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que $(x_1; x_2; x_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Soit a, b et c des scalaires tels que

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0. \quad (\text{II.1})$$

Attention

Une famille de trois vecteurs $(e_1; e_2; e_3)$ deux à deux non colinéaires n'est pas forcément libre. Prendre par exemple $\{(1; -1; 0); (0; 1; -1), (-1; 0; 1)\}$.

Montrons que $a = b = c = 0$.

La relation (II.1) est équivalente au système homogène de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ a + 2b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1] \begin{cases} a + b - c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ -2b + 2c = 0 \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

$$\xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2] \begin{cases} a + b - c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0. \end{cases}$$

Donc $a = b = c = 0$ et la famille $(x_1; x_2; x_3)$ est libre.

D'un point de vue matriciel, la matrice de ce système est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, on obtient :

$$A \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

, matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont non nuls et qui est donc inversible.

Le système (II.2) n'admet donc comme unique solution que le solution nulle. La famille est donc libre.

Plus généralement,

Proposition 13 :

Une famille est liée si, et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Ceci s'applique, en particulier, à une famille dont deux vecteurs sont égaux et, par conséquent, les vecteurs d'une famille libre sont nécessairement deux à deux distincts.

Preuve : Considérons une famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de vecteurs de E .

($\Leftarrow$) : Supposons, par exemple, que $x_n = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k$.

Alors, $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k - x_n = 0_E$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, -1) \neq (0, \dots, 0)$

La famille est donc liée.

($\Rightarrow$) : Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_E$.

L'un des λ_i au moins est non nul, disons $\lambda_i \neq 0$. Alors, on peut écrire $x_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n -\frac{\lambda_k}{\lambda_i} x_k$ et le résultat.



Corollaire 14 – Application :

Soient $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille libre d'éléments de E et $x \in E$.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, x) \text{ est liée} \iff x \in \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Exemple 15 – O :

déduit également de la proposition précédente qu'une famille de trois vecteurs non coplanaires est libre.

En effet, si $(e_1; e_2; e_3)$ était liée, alors, par exemple, e_1 appartiendrait à $\text{Vect}(e_2; e_3)$ et les trois vecteurs seraient coplanaires.

Grâce à la contraposée de l'équivalence précédente, on peut ainsi agrandir une famille libre en lui adjoignant des vecteurs de E qui sont linéairement indépendants des vecteurs de la famille.

De la même manière, la contraposée de la **proposition (13)** s'écrit aussi :

Corollaire 15 :

Une famille est libre si, et seulement si aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres.

Définition 6 – Familles génératrices :

Soient E un $\mathbb{R}$ -ev, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$.

On dit que la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est *génératrice* (de E) lorsque tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$ ou, de manière équivalente,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ est génératrice de } E \iff \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n) = E.$$

$$\iff \forall x \in E, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k.$$

Pour toute famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments de E , on a TOUJOURS

$$\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n) \subset E.$$

C'est l'inclusion réciproque qui est intéressante.

En particulier, remarquez déjà que toute sur-famille d'une famille génératrice de E est aussi génératrice.

Exemples 16 :

— $(1, X, X^2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

D'une manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$ puisque tout polynôme P de degré au plus n s'écrit sous la forme

$$P = \sum_{i=0}^n p_i X^i \text{ où } (p_0, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

— $(1, X, X^2, X + 1, X^2 + X + 1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Elle n'est pas libre.

Exemple 17 :

Montrons que la famille $((1; 1; 0), (0; 1; 1), (1; 0; 1), (0; 0; 1))$ est génératrice dans $\mathbb{R}^3$.

Soit $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur quelconque.

Alors on a, par exemple :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (y - x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0(1; 0; 1) + (z - y + x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $((1; 1; 0), (0; 1; 1), (1; 0; 1), (0; 0; 1))$ est donc génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Pour montrer qu'elle n'est pas libre, deux méthodes :

1. Soit trouver une autre décomposition comme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit montrer directement que la famille est liée en écrivant :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

combinaison linéaire nulle des quatre vecteurs dont les coefficients ne sont pas tous nuls.

Exemples 18 – Usuels :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. La famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ où

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, e_i = (0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{ème}} \text{ composante}}}{1}, 0).$$

 **Preuve :** Tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ i.e. tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Ainsi $\mathbb{R}^n = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ i.e. $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ engendre $\mathbb{R}^n$.



2. De la même manière, tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ où $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ i.e. comme combinaison linéaire des polynômes $1, X, \dots, X^n$.

Il en résulte que $\mathbb{R}_n[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n)$ i.e. $(1, X, \dots, X^n)$ engendre $\mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 19 – Famille génératrice d'un sous-espace :

Dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}^3$, on considère le sev $F = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0\}$.

Déterminons une famille génératrice de F .

Soit $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$.

Il suffit de résoudre un système linéaire homogène :

$$\begin{aligned} (x; y; z) \in F &\iff \{x + y - 2z = 0\} \\ &\iff \begin{cases} x &= y - 2z \\ y &= y \\ z &= z \end{cases} \\ &\iff (x; y; z) \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc génératrice de F .

II.2 – Dimension d'un espace vectoriel

Définition 7 – Bases :

Soient E un $\mathbb{R}$ -ev, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in E^n$.

On dit que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une *base* de E si, et seulement si elle est *libre* et *génératrice*.

On convient que $\emptyset$ est une base de $\{0\}$.

Exemple 20 – Fondamentaux :

- E1** • Dans $\vec{\mathcal{E}}_2$, toute famille constituée de deux vecteurs non colinéaires est une base.
- E2** • $\mathbb{R}_2[X]$ admet pour base $(1, X, X^2)$ mais aussi $(1 + X + X^2, 1 + X, 2)$: les bases ne sont donc pas uniques.

La base $(1, X, X^2)$ est appelée *base canonique* de $\mathbb{R}_2[X]$.

Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(1, X, \dots, X^n)$ et $(1, X - a, \dots, (X - a)^n)$, $a \in \mathbb{R}$ sont des bases de $\mathbb{R}_n[X]$.

- E3** • $\mathbb{R}^3$ admet pour base $\mathcal{B}_1 = (u, v, w)$, avec $u = (1, 2, 3)$, $v = (0, 1, 2)$ et $w = (0, 0, 1)$, mais aussi $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. $\mathcal{B}_0$ est la *base canonique* de $\mathbb{R}^3$.

- E4** • $\mathbb{R}^n$ admet pour *base canonique* $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, avec $e_k = (\delta_{1,k}, \delta_{2,k}, \dots, \delta_{n,k})$.

$$\text{où } \delta_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases} \quad \text{appelé Symbole de Kronecker.}$$

- E5** • $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ admet pour *base canonique* $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,p})$ où :

$$E_{k,l} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \forall (k; l) \in ([1; n])^2, E_{k,l} = (\delta_{i,k} \delta_{j,l})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

← k Les matrices $E_{k,l}$, où l'unique coefficient non nul valant 1 est situé sur la $k^{\text{ème}}$ ligne et la $l^{\text{ème}}$ colonne sont appelées *matrices élémentaires*.

Théorème 16 :

Soient E un $\mathbb{R}$ -ev, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n) \in E^n$.

La famille $\mathcal{B}$ est une base de E si, et seulement si tout vecteur de E se décompose de manière unique comme combinaison linéaire de $e_1, e_2, \dots, e_n$.

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) \text{ est une base de } E \iff \forall x \in E, \exists ! (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

Les scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ s'appellent *les composantes* ou *les coordonnées* de x dans la base $\mathcal{B}$.

Preuve : L'existence d'une décomposition équivaut à dire que $\mathcal{B}$ est génératrice de E .

L'unicité équivaut à la liberté de $\mathcal{B}$.

Exemple 21 :

- E1** • Dans $\mathbb{R}^3$, tout vecteur $(x; y; z)$ s'écrit $xe_1 + ye_2 + ze_3$ sur la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

$(x; y; z)$ sont les coordonnées de (x, y, z) sur la base canonique !

- E2** • Dans $\mathbb{R}_2[X]$, $(1, 5, 2)$ sont les coordonnées de $1 + 5X + 2X^2$ sur la base canonique $(1, X, X^2)$.

Attention

Les coordonnées d'un vecteur dépendent donc de la base $\mathcal{B}$ choisie. Lorsqu'on voudra préciser celle-ci on notera, par exemple,

$$u = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)_{\mathcal{B}}.$$

Définition 8 – Espaces vectoriels de dimension finie :

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev.

On dit que E est de dimension finie lorsque E admet une famille génératrice finie.

Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Exemples 22 – Fondamentaux :

E1 • $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie engendré par la base canonique qui compte n vecteurs.

E2 • $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie engendré par $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

E3 • $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension finie engendré par les matrices élémentaires $E_{k,l}$.

E4 • $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie. Pas plus que $\text{Pol}(\mathbb{R})$.

En effet, une famille finie de polynômes $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ ne peut engendrer $\mathbb{R}[X]$, car si on note $d = \max(\deg P_1, \deg P_2, \dots, \deg P_n)$, tout polynôme de $\text{Vect}(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est de degré $\leq d$.

E5 • D'une manière générale, les espaces de fonctions $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, ..., $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ qui contiennent $\text{Pol}(\mathbb{R})$ ne sont pas de dimension finie.

Théorème 17 – Théorème de la base extraite :

De toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel E non réduit à $\{0\}$, on peut extraire une base.

 **Preuve :** Soit $\mathcal{G} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice finie de E .

Notons :

$$A = \{\text{card}(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \subset \mathcal{G} \text{ et } \mathcal{F} \text{ est génératrice de } E\}.$$

La partie A de $\mathbb{N}$ est non vide (car contient $\text{card}(\mathcal{G})$). Elle admet donc un plus petit élément p .

Soit $\mathcal{F}_p$ une famille de cardinal p contenue dans $\mathcal{G}$ et génératrice de E . Quitte à renuméroter, on peut supposer que $\mathcal{F}_p = (e_1, \dots, e_p)$.

Montrons que $\mathcal{F}_p$ est une base de E .

Elle est génératrice par définition. Montrons qu'elle est libre.

Par l'absurde, supposons $(e_1, \dots, e_p)$ liée i.e. l'un des vecteurs des $e_1, \dots, e_p$, disons e_p (quitte à les réordonner) est combinaison linéaire des autres.

Ainsi $e_p \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1})$.

D'après la proposition (??), la famille $(e_1, \dots, e_{p-1})$ est génératrice de E donc $p-1 \in A$ ce qui contredit la définition de p .

Ainsi, $\mathcal{F}_p$ est libre et génératrice de E . C'en est donc une base.



Comme conséquence, on a :

Corollaire 18 – Existence de bases dans un espace vectoriel de dimension finie :

Tout $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie admet une base (finie).

 **Preuve :** E est de dimension finie. Il existe donc une famille génératrice finie $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$.

On lui applique le théorème de la base extraite, et on obtient une base de E.



Le **théorème (17)** permet donc d'obtenir une base de E à partir d'une famille génératrice. Peut-il en être de même à partir d'une famille libre seulement ?

Théorème 19 – Théorème de la base incomplète :

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie.

Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

 **Preuve :** Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E. Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, il possède une famille génératrice finie $\mathcal{G}$.

Notons :

$$A = \{\text{card}(\mathcal{F}) \mid \mathcal{L} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G} \text{ et } \mathcal{F} \text{ est libre}\}.$$

La partie A de $\mathbb{N}$ est non vide car contient $\text{card}(\mathcal{L})$ et est majorée par $\text{card}(\mathcal{L} \cup \mathcal{G})$.

Elle admet donc un plus grand élément $p \in \mathbb{N}$.

Soit $\mathcal{F}_p$ une famille libre de E de cardinal p telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}_p \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.

Notons $\mathcal{F}_p = (e_1, \dots, e_p)$. Montrons que $\mathcal{F}_p$ est une base.

On sait par définition qu'elle est libre. Reste donc à montrer qu'elle est génératrice.

Pour cela, on va montrer que $\mathcal{G} \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Supposons le contraire. Il existe alors un certain $x \in \mathcal{G}$ avec $x \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

D'après le **corollaire (14)**, la famille $(e_1, \dots, e_p, x)$ est alors libre, elle contient $\mathcal{L}$ et est contenue dans $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$ (puisque $x \in \mathcal{G}$).

Ainsi, $p + 1 \in A$ ce qui est contredit la définition de p .

Donc, $\mathcal{G} \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{Vect}(\mathcal{F}_p)$ et $\mathcal{F}_p = (e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de E. Comme elle est libre, c'en est bien une base.



À l'issue de la preuve, on peut être un peu plus explicite :

Corollaire 20 :

Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E à l'aide d'éléments d'une famille génératrice de E.

Théorème 21 :

Dans un $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

Preuve : On considère deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de E .

$\mathcal{B}_1$ engendre E et $\mathcal{B}_2$ est libre, donc $\text{card}(\mathcal{B}_1) \geq \text{card}(\mathcal{B}_2)$.

Symétriquement, $\text{card}(\mathcal{B}_2) \geq \text{card}(\mathcal{B}_1)$.

D'où $\text{card}(\mathcal{B}_1) = \text{card}(\mathcal{B}_2)$.

**Définition 9 – Dimension d'un espace vectoriel :**

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie.

On appelle *dimension* de E , notée $\dim(E)$, le cardinal d'une de ses bases.

Remarque : Par convention, $\emptyset$ est une base de $\{0\}$, d'où $\dim(\{0\}) = 0$ et, lorsqu'il y aura ambiguïté sur le corps de base, on n'hésitera pas à noter $\dim_{\mathbb{R}}(E)$ au lieu de $\dim(E)$.

Exemples 23 :

- E1** • $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ car admet pour base $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots, (0, 0, \dots, 1)$.
- E2** • $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$ car admet pour base $(1, X, \dots, X^n)$.
- E3** • $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = n \times p$ car admet pour base $(E_{k,l})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq p}}$.

Exemple 24 – Base d'un sous espace :

Déterminons une base et la dimension de

$$E = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } x - 3y = 0\}.$$

Encore un système linéaire homogène à résoudre. Il suffit de traduire :

$$\begin{aligned} (x; y; z) \in E &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -4y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ y = y \\ z = -4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, non nul, forme donc une base de E qui est, en conséquence, de dimension 1.

Corollaire 22 – Dimension et cardinal des familles :

- C1** • Toute famille libre de n éléments d'un espace de dimension n en forme une base.
- C2** • Toute famille génératrice de n éléments d'un espace de dimension n en forme une base.

Théorème 23 – Synthèse :

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F}$ une famille formée de n éléments.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \iff \mathcal{F} \text{ est libre} \iff \mathcal{F} \text{ est génératrice de } E.$$

 **Preuve :** Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de n éléments de E .

- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , elle est libre et génératrice (par définition).
- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. Par le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base $(e_1, \dots, e_p)$ de E .

$$\text{Or, } p = \dim(E) = n.$$

Donc, $(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E .

- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice. Par le théorème de la base extraite, on peut en extraire une base $(e_1, \dots, e_p)$ de E .

$$\text{Or, } p = \dim(E) = n.$$

Donc, $(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E .

**Méthode 1 – Montrer qu'une famille est une base :**

Lorsqu'on connaît la dimension n d'un espace, il suffit de prouver qu'une famille de n vecteurs est libre *ou* génératrice pour montrer qu'elle est une base.

Théorème 24 – Dimension d'un sous-espace vectoriel :

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie et F un sev de E .

Alors :

1. F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.
2. $\dim(F) = \dim(E) \iff F = E$.

Méthode 2 – Montrer que deux espaces vectoriels sont égaux :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps. Pour montrer que $F = E$, il suffit de montrer que F est un sev de E et que $\dim(F) = \dim(E)$.

Définition 10 – Rang d'une famille de vecteurs :

Soient E un $\mathbb{R}$ -ev et $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ une famille d'éléments de E .

On appelle *rang* de $(u_1, \dots, u_p)$, noté $\text{rg}(u_1, \dots, u_p)$, la dimension du sous-espace engendré par cette famille :

$$\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \dim(\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)).$$

Remarque : Le rang est bien défini puisque $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est de dimension finie. En effet, il admet évidemment $(u_1, \dots, u_p)$ comme famille génératrice finie.

Proposition 25 :

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E , un $\mathbb{R}$ -ev de dimension n . Alors :

1. $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) \leq n$.
2. $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) \leq p$.

En particulier, $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) \leq \min(n; p)$.

3. $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre si, et seulement si $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = p$.

 **Preuve :** On pose $F = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$

1. F est un sev de E donc $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \dim(F) \leq n$;
2. F est engendré par p vecteurs donc $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \dim(F) \leq p$;
3. $(\Rightarrow)$ Si $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre alors c'est une base de F .

Par conséquent, $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \dim(F) = p$;

$(\Leftarrow)$ Si $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = p$, alors $\dim(F) = p$.

La famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ étant génératrice de F et ayant autant d'éléments que $\dim(F) = p$, c'en est une base. En particulier, elle est libre.



À retenir – Opérations ne changeant pas le rang :

— Retirer un vecteur nul :

$$\text{rg}(u, v, 0, w) = \text{rg}(u, v, w).$$

— Retirer un vecteur figurant plusieurs fois (en en conservant un !) :

$$\text{rg}(u, v, w, v, u, w, w, w) = \text{rg}(u, v, w).$$

— Retirer un vecteur combinaison linéaire des *autres* vecteurs :

$$\text{rg}(u, v, 2u + 3v) = \text{rg}(u, v).$$

— Ajouter des multiples d'un vecteurs aux *autres* vecteurs :

$$\text{rg}(u, v, w) = \text{rg}(u, v - 2u, w + 7u).$$

— Ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des *autres* vecteurs :

$$\text{rg}(u, v, w) = \text{rg}(u, v, w + 2u + 3v).$$

Exemple 25 :

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère :

$$u = (1, 2, 3, 4), \quad v = (4, 3, 2, 1), \quad w = (1, 2, 1, 2), \quad x = (2, 1, 2, 1), \quad y = (1, 1, 1, 1).$$

Déterminons $\text{rg}(u, v, w, x, y)$.

— On constate que $u + v = 5y$ donc $v = 5y - u$.

Par conséquent,

$$\text{Vect}(u, v, w, x, y) = \text{Vect}(u, w, x, y).$$

— On a aussi $w + x = 3y$ donc $x = 3y - w$ et $\text{Vect}(u, w, x, y) = \text{Vect}(u, w, y)$.

On en déduit que $\text{rg}(u, v, w, x, y) = \text{rg}(u, w, x, y) = \text{rg}(u, w, y) \leq 3$.

Or, la famille (u, w, y) est libre. En effet,

$$au + bw + cy = 0 \implies \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + 2b + c = 0 \\ 3a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Par conséquent $\text{rg}(u, w, y) = 3$ puis,

$$\text{rg}(u, v, w, x, y) = 3.$$

INDEX

Base

canonique, 17

Combinaison

linéaire, 6

Combinaisons

linéaire, 10

Composante

d'un vecteur, 17

Coordonnées, 17

Corps, 2

Dimension

d'un espace vectoriel, 20, 22

finie, 18

Élément

neutre, 2

Espace

de dimension finie, 18

Sous-, 7

vectoriel, 1, 2

Famille

base, 16

génératrice, 14, 21

libre, 11, 14, 16, 21, 22

liée, 11, 13, 16

Groupe

abélien, 2

Loi

externe, 2

induite, 8

interne, 2

Matrice

élémentaire, 17

Méthode

Montrer qu'une famille est une base, 21

Montrer que $E = F$, 21

Rang

d'une famille de vecteurs, 22

Scalaire, 2

Symbole

de Kronecker, 17

Symétrique

d'un élément, 2

Théorème

de la base extraite, 18

de la base incomplète, 19

Vecteur, 2

nul, 2