Remédiation 8

Suites récurrentes -- Dans le cas où f est croissante.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par :

$$\forall\, x \in [0\,;1]\,, \quad f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f sur $[0\,;1]$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement définie et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\,;1]$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner sa limite.