Remédiation 9 — Suites récurrentes -- Avec l'IAF

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0\,;2]$ par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3}$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f sur $[0\,;2]$. En déduire que $[0\,;2]$ est stable par f.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
3. Déterminer les points fixes de f sur $[0\,;2]$. Notons α l'unique point fixe de f dans $[0\,;2]$.
4. Montrer que : $\forall\, x \in [0\,;2]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{9}$.
5. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{9}\,|u_n - \alpha|$.
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
7. Enfin, en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant 2\dfrac{2}{9^n}$.
8. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
9. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie une valeur approchée de α à 10^{-4} près, obtenue en calculant le terme u_n d'indice minimal tel que $\dfrac{2}{9^n} \leqslant 10^{-4}$.

Éditeur

```python
def valeur_approchees():
    u = ...
    n = ...
    while ... :
        u = ...
        n = ...
    return u
```