Remédiation 26 — Loi d'un produit

Exercice 1 – (Produit de deux variables uniformes) [Correction p. 1]

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes, suivant chacune la loi uniforme sur $[\![1\,;3]\!]$. On pose $\mathbb{T} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$.

1. Déterminer $\mathbb{T}(\Omega)$ puis la loi de $\mathbb{T}$.
2. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{T})$ de deux manières différentes.

Exercice 2 – (Produit de deux variables de Bernoulli) [Correction p. 1]

Soit $p \in]0,1[$.

1. Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. Déterminer la loi de $\mathbb{X}\mathbb{Y}$.
2. Soient $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ et $\mathbb{Y} = 1 - \mathbb{X}$. Déterminer la loi de $\mathbb{X}\mathbb{Y}$. Comparer $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y})$.

Exercice 3 – (Produit d'une Bernoulli et d'une géométrique) [Correction p. 2]

Soient $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.

Soient $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$ indépendantes.

On pose $\mathbb{T} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$.

1. Déterminer la loi de $\mathbb{T}$.
2. Montrer que $\mathbb{T}$ admet une espérance et la calculer.

Correction de l'exercice 1 : [Énoncé]

Méthode

Pour la loi d'un produit, on écrit l'événement $[\mathbb{X}\mathbb{Y} = k]$ comme réunion d'événements incompatibles $[\mathbb{X} = i, \mathbb{Y} = j]$ avec $ij = k$, puis on utilise l'indépendance.

1. $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{Y}(\Omega) = [\![1\,;3]\!]$, donc $\mathbb{T}(\Omega) = \{1,2,3,4,6,9\}$.
   Par indépendance, $\mathbf{P}(\mathbb{X} = i, \mathbb{Y} = j) = \frac{1}{9}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;3]\!]^2$. Il suffit de compter les couples (i,j) de produit donné :

k	1	2	3	4	6	9
$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

2. Par définition : $\mathbf{E}(\mathbb{T}) = \dfrac{1+4+6+4+12+9}{9} = \dfrac{36}{9} = 4$.
   Par indépendance, $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = 2 \times 2 = 4$.

Correction de l'exercice 2 : [Énoncé]

1. $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ prend ses valeurs dans $\{0,1\}$.
   Un produit de variables à valeurs dans $\{0,1\}$ vaut 1 si et seulement si chaque facteur vaut 1 d'où
   $$\mathbf{P}(\mathbb{X}\mathbb{Y} = 1) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = 1, \mathbb{Y} = 1) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = 1)\mathbf{P}(\mathbb{Y} = 1) = p^2.$$
   Ainsi $\mathbb{X}\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{B}(p^2)$.

Piège
$\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y})$ n'est vrai qu'en cas d'indépendance (ou de non-corrélation).
Ici $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont dépendantes, et
$\mathrm{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = -p(1-p) \neq 0$.

2. $\mathbb{X}(1-\mathbb{X}) = 0$ car $\mathbb{X} \in \{0,1\}$ ($\mathbb{X}^2 = \mathbb{X}$).
   Donc $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ est certaine égale à 0 et $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = 0$.
   Mais $\mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = p(1-p) > 0$. C'est tout à fait normal.

Correction de l'exercice 3 : [Énoncé]

1. $\mathbb{X}(\Omega) = \{0,1\}$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $\mathbb{T}(\Omega) = \mathbb{N}$.

   a. $[\mathbb{T} = 0] = [\mathbb{X} = 0]$ car $\mathbb{Y} \geqslant 1$, donc $\mathbf{P}(\mathbb{T} = 0) = \dfrac{1}{2}$.

   b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$: $[\mathbb{T} = k] = [\mathbb{X} = 1] \cap [\mathbb{Y} = k]$, donc par indépendance $\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \dfrac{1}{2}\, p\, q^{k-1}$.

   Vérification : $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$.

Méthode
Quand un facteur peut s'annuler, séparer le cas $[\mathbb{T} = 0]$ des valeurs $k \geqslant 1$.

2. Par indépendance et existence des espérances de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$:

$$\mathbf{E}(\mathbb{T}) = \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{p} = \frac{1}{2p}.$$