Remédiation 26 — Loi d'un produit

Exercice 1 – (Produit de deux variables uniformes)

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes, suivant chacune la loi uniforme sur $[\![1\,;3]\!]$.
On pose $\mathbb{T} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$.

1. Déterminer $\mathbb{T}(\Omega)$ puis la loi de $\mathbb{T}$.
2. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{T})$ de deux manières différentes.

Exercice 2 – (Produit de deux variables de Bernoulli)

Soit $p \in]0,1[$.

1. Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. Déterminer la loi de $\mathbb{X}\mathbb{Y}$.
2. Soient $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ et $\mathbb{Y} = 1 - \mathbb{X}$. Déterminer la loi de $\mathbb{X}\mathbb{Y}$. Comparer $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y})$.

Exercice 3 – (Produit d'une Bernoulli et d'une géométrique)

Soient $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.

Soient $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$ indépendantes.

On pose $\mathbb{T} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$.

1. Déterminer la loi de $\mathbb{T}$.
2. Montrer que $\mathbb{T}$ admet une espérance et la calculer.