



DS 2

Espaces vectoriels et Variables aléatoires

17/10/2026

Durée : 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le sujet est composé de 3 exercices indépendants.

Exercice 1 – (Espaces vectoriels)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et les ensembles

$$F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = X\}, \quad G = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = 4X\}.$$

On note $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en donner une base ainsi que la dimension.
(On admet que G en est aussi un.)
2. En déduire que (U_1, U_2) est une base de F .

3. Montrer que $G = \text{Vect}(U_3)$. Quelle est la dimension de G ?
4.
 - a. Montrer que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
 - b. Déterminer les coordonnées de $E_1 = (1; 0; 0)$ dans la base (U_1, U_2, U_3) .
5.
 - a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n U_1 = U_1$, $A^n U_2 = U_2$ et $A^n U_3 = 4^n U_3$.
 - b. En déduire l'expression de $A^n E_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire la première colonne de A^n .
 - c. Vérifier le résultat pour $n = 0$ et $n = 1$.

Problème 2 – (Une suite récurrente et une série)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \ln(1 + u_n).$$

Partie A – Étude de la fonction f

1. Donner l'ensemble de définition de f et dresser son tableau de variations.
2. On pose, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $g(x) = x - \ln(1+x)$.

Étudier les variations de g et en déduire que

$$\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x, \quad \text{avec égalité si, et seulement si, } x = 0.$$

3. Montrer que l'intervalle $]0, 1]$ est stable par f . (On rappelle que $\ln(2) \leq 1$.)

Partie B – Étude de la suite (u_n)

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1]$.
5. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
6. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puis déterminer sa limite.
7. Compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle prenne en argument un réel eps strictement positif et renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \leq \text{eps}$.

```

1  import numpy as np
2
3  def seuil(eps):
4      u = 1
5      n = 0
6      while ..... :
7          u = .....
8          n = .....
9      return n

```

8. Montrer que $u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.

Partie C – Convergence de la série $\sum u_n^2$

9. On pose, pour tout $x \in [0, 1]$, $k(x) = x - \ln(1+x) - \frac{x^2}{4}$.

a. Calculer $k'(x)$ et montrer que $\forall x \in [0; 1], k'(x) = \frac{x(1-x)}{2(1+x)}$.

b. En déduire que $\forall x \in [0, 1], x - \ln(1+x) \geq \frac{x^2}{4}$.

10. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \leq 4(u_n - u_{n+1})$.

11. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (u_n - u_{n+1})$ converge et calculer sa somme.

12. Conclure que la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \leq 4$.

Problème 3 – (Lois géométriques, lois de Poisson et couples)

Dans tout le problème, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est un espace probabilisé.

Les trois parties sont, dans une grande mesure, indépendantes.

Partie A – Somme de deux variables géométriques

Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires **indépendantes** suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

On pose $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$.

1. Rappeler $\mathbb{X}(\Omega)$, $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X})$.

2. Déterminer $\mathbb{Z}(\Omega)$ puis montrer que $\forall n \geq 2, \mathbf{P}(\mathbb{Z} = n) = (n-1)p^2q^{n-2}$.

3. Donner $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$.

4. Soit $n \geq 2$. Déterminer la loi conditionnelle de $\mathbb{X}$ sachant $[\mathbb{Z} = n]$.

Reconnaître une loi usuelle. Cette loi dépend-elle de p ?

5. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Z}$ sont-elles indépendantes? (On pourra calculer $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 2] \cap [\mathbb{Z} = 2])$.)

Partie B – Minimum et maximum de deux variables géométriques

On conserve les notations de la partie A et on pose $\mathbb{U} = \min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et $\mathbb{V} = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(\mathbb{X} > n) = q^n$.

(On pensera à écrire $[\mathbb{X} > n] = \bigcup_{k \geq n+1} [\mathbb{X} = k]$)

7. a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(\mathbb{U} > n) = q^{2n}$.

b. En déduire que $\mathbb{U}$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre, puis donner $\mathbf{E}(\mathbb{U})$. (On pensera à écrire l'événement $[\mathbb{U} = n]$ en fonction des événements incompatibles $[\mathbb{U} > n]$ et $[\mathbb{U} > n-1]$)

8. a. Exprimer $\mathbb{U} + \mathbb{V}$ en fonction de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.

b. En déduire que $\mathbb{V}$ admet une espérance et que $\mathbf{E}(\mathbb{V}) = \frac{3-2p}{p(2-p)}$.

9. a. Montrer que $\mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y}) = \frac{p}{2-p}$.

b. Justifier que $\mathbf{P}(\mathbb{X} < \mathbb{Y}) = \mathbf{P}(\mathbb{X} > \mathbb{Y})$ puis en déduire $\mathbf{P}(\mathbb{X} < \mathbb{Y})$.

10. On donne la fonction Python suivante, où `rd.geometric(p)` simule une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$.

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def estimation(p, N):
4     c = 0
5     for k in range(N):
6         x = rd.geometric(p)
7         y = rd.geometric(p)
8         if ..... :
9             c = c + 1
10    return c / N
```

a. Compléter la condition de la ligne `if` pour que `estimation(p, N)` renvoie une estimation de $\mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y})$.

b. (khûbe) Quelle valeur approchée renvoie `estimation(0.5, 100000)` ? Justifier.

Partie C – Un couple de variables de Poisson

Soient $\lambda > 0$, $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, sachant $[\mathbb{X} = n]$, la variable $\mathbb{Y}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

On pose $\mathbb{T} = \mathbb{X} - \mathbb{Y}$.

11. Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

a. Montrer que $[\mathbb{Y} = i] \cap [\mathbb{T} = j] = [\mathbb{X} = i + j] \cap [\mathbb{Y} = i]$.

b. En déduire que $\mathbf{P}([\mathbb{Y} = i] \cap [\mathbb{T} = j]) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = i + j) \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=i+j]}(\mathbb{Y} = i)$.

12. Montrer que, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y} = i] \cap [\mathbb{T} = j]) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \times e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^j}{j!}.$$

13. En déduire les lois de $\mathbb{Y}$ et de $\mathbb{T}$ (on les reconnaîtra).

14. Les variables $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{T}$ sont-elles indépendantes ? Justifier.