

DS 2

Espaces vectoriels et Variables aléatoires

Exercice 1 – (Espaces vectoriels)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et les ensembles

$$F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = X\}, \quad G = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = 4X\}.$$

On note $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en donner une base ainsi que la dimension.
(On admet que G en est aussi un.)

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Commentaires : On traduit ce que veut dire $X \in F$:

$$X \in F \iff AX = X \quad (\text{on traduit ce que veut dire } X \in F)$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y + z = x \\ x + 2y + z = y \\ x + y + 2z = z \end{cases} \quad (\text{on transforme en système linéaire})$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad (\text{on met toutes les inconnues du même côté})$$

$$\iff \{x + y + z = 0\}$$

Il ne reste plus qu'une équation pour trois inconnues. Le système admet donc 2 inconnues secondaires y et z par exemple.

$$\iff \begin{cases} x = -y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \quad (\text{on exprime l'inconnue principale } x \text{ en fonction des inconnues secondaires})$$

$$\iff X = y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{on revient à l'écriture matricielle})$$

$$\Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \quad (\text{on traduit les combinaisons linéaires en terme de Vect.})$$

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (par définition d'un Vect).

Commentaires : Reste à trouver la dimension de F . Pour cela, on en cherche une base.

Génératrice : Par définition du Vect, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est déjà génératrice de F .

Reste à montrer qu'elle est libre.

Liberté : Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dont les coordonnées ne sont pas proportionnelles ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre de F .

Base : Libre et génératrice de F , la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme donc une base de F .

Le sous-espace F admet une base de deux éléments donc F est de dimension 2.

2. En déduire que (U_1, U_2) est une base de F .

Comme $AU_1 = U_1$ et $AU_2 = U_2$, les deux vecteurs U_1 et U_2 appartiennent à F .

De plus, U_1 et U_2 ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre de F de même cardinal que sa dimension donc une base de F .

3. Montrer que $G = \text{Vect}(U_3)$. Quelle est la dimension de G ?

Comme $AU_3 = 4U_3$, alors $U_3 \in G$.

On résout, de la même manière que précédemment, l'équation $AX = 4X \Leftrightarrow (A - 4I_3)X = 0$

$$\text{pour un vecteur } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et on obtient } \begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = x \end{cases} \Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi, $G = \text{Vect}(U_3)$ et $\dim(G) = 1$.

4. a. Montrer que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

La famille $\mathcal{B}' = (U_1, U_2, U_3)$ comporte 3 vecteurs dans un espace de dimension 3.
Il suffit de montrer qu'elle est libre.

Commentaires : On pourrait considérer une combinaison linéaire nulle mais je vous montre une autre méthode :

- On sait déjà que U_1 et U_2 sont libres.
- Il suffit alors de montrer, par la contradiction, que U_3 est linéairement indépendant de U_1 et U_2 .
S'il l'était, U_3 appartiendrait à $\text{Vect}(U_1, U_2)$ donc à F et vérifierait $AU_3 = U_3$.
Or, $U_3 \in G \iff AU_3 = 4U_3$.
Comme $U_3 \neq 4U_3$, ce n'est pas possible et $U_3 \notin \text{Vect}(U_1, U_2)$.
Les trois vecteurs (U_1, U_2, U_3) sont donc linéairement indépendants *i.e.* libres dans un espace de dimension 3. Ils en forment une base.

- b. Déterminer les coordonnées de $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base (U_1, U_2, U_3) .

On cherche x, y, z tels que $E_1 = xU_1 + yU_2 + zU_3$.

Commentaires : D'après la question précédente, on sait que ce triplet existe et qu'il est unique.

En résolvant le système associé, on trouve $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$ et $z = \frac{1}{3}$.

Les coordonnées de E_1 dans la base (U_1, U_2, U_3) sont donc $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

5. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n U_1 = U_1$, $A^n U_2 = U_2$ et $A^n U_3 = 4^n U_3$.

Démonstration par récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}$ sachant que $AU_1 = U_1$, $AU_2 = U_2$ et $AU_3 = 4U_3$.

- b. En déduire l'expression de $A^n E_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire la première colonne de A^n .

D'après la question précédente et la décomposition de E_1 :

$$\begin{aligned} A^n E_1 &= A^n \left(\frac{2}{3} U_1 + \frac{1}{3} U_2 + \frac{1}{3} U_3 \right) \\ &= \frac{2}{3} A^n U_1 + \frac{1}{3} A^n U_2 + \frac{1}{3} A^n U_3 && \text{(par linéarité du produit à droite)} \\ &= \frac{2}{3} U_1 + \frac{1}{3} U_2 + \frac{4^n}{3} U_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n + 2 \\ 4^n - 1 \\ 4^n - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- c. Vérifier le résultat pour $n = 0$ et $n = 1$.

— Pour $n = 0$, on obtient $A^0 E_1 = E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^0 + 2 \\ 4^0 - 1 \\ 4^0 - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La relation est vérifiée

— Pour $n = 1$, même chose :

$$A^1 E_1 = A E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^1 + 2 \\ 4^1 - 1 \\ 4^1 - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La relation est encore vérifiée.

Problème 2 – (Une suite récurrente et une série)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x)$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \ln(1 + u_n).$$

Partie A – Étude de la fonction f

1. Donner l'ensemble de définition de f et dresser son tableau de variations.

— **Ensemble de définition** : $f(x) = \ln(1 + x)$ est définie si et seulement si $1 + x > 0$, soit $x > -1$.

L'ensemble de définition est donc $\mathcal{D}_f =]-1, +\infty[$.

— **Variations** : f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et pour tout $x > -1$:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x}$$

Puisque $1 + x > 0$, on a $f'(x) > 0$.

La fonction f est donc **strictement croissante** sur $]-1, +\infty[$.

— **Limites** : Par composition, on a facilement,

— $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$. La courbe admet une asymptote d'équation $x = -1$.

— $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

On en déduit le tableau de variations de f sur $]-1; +\infty[$:

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
f	$-\infty$	$+\infty$

2. On pose, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $g(x) = x - \ln(1+x)$.

Étudier les variations de g et en déduire que

$$\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x, \quad \text{avec égalité si, et seulement si, } x = 0.$$

— **Variations de g** : Comme somme de fonctions qui le sont, g est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et pour tout $x > -1$:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x) - 1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

Le signe de $g'(x)$ est celui de x (car le dénominateur $1+x$ est strictement positif). On en déduit le tableau de variations de f sur $]-1; +\infty[$:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
f		0	

— **Minimum** : g admet un minimum absolu en 0 valant :

$$g(0) = 0 - \ln(1) = 0$$

— **Inégalité** : Pour tout $x > -1$, $g(x) \geq 0$, ce qui se réécrit $x - \ln(1+x) \geq 0$, soit

$$\forall x \in]-1; +\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x.$$

L'égalité est atteinte si et seulement si $g(x) = 0$, c'est-à-dire uniquement en $x = 0$.

3. Montrer que l'intervalle $]0, 1]$ est stable par f . (On rappelle que $\ln(2) \leq 1$.)

D'après la question (1.), sur l'intervalle $]0; 1]$, f est croissante donc, on a :

$$f([0; 1]) = [f(0); f(1)] = [0; \ln(2)] \subset [0; 1].$$

L'intervalle $]0, 1]$ est donc bien **stable par f** .

Partie B – Étude de la suite (u_n)

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

- Pour $n = 0$, par définition de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $u_0 = 1 \in]0 ; 1]$.
- Supposons $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in]0 ; 1]$.
Alors u_{n+1} est bien définie et on a $u_{n+1} = f(u_n) \in]0 ; 1]$ d'après la question précédente et l'hérédité.
- Initialisée depuis $n = 0$ et héréditaire, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1]$.

5. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question (2.) ,

$$u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \leq u_n,$$

avec égalité si, et seulement si $u_n = 0$ ce qui n'est pas d'après la question précédente.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$ i.e. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

6. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puis déterminer sa limite.

D'après le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, décroissante et minorée converge vers un réel $\ell \in]0 ; 1]$.

Comme f est continue, la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nécessairement un point fixe de f .

On résout l'équation

$$f(x) = y \iff x - \ln(1 + x) = 0 \iff g(x) = 0.$$

D'après la question (2.) , l'unique solution de cette équation est $x = 0$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers 0.

7. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle prenne en argument un réel eps strictement positif et renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \leq \text{eps}$.

```

1  import numpy as np
2
3  def seuil(eps):
4      u = 1
5      n = 0
6      while ..... :
7          u = .....
8          n = .....
9      return n

```

```

1  import numpy as np
2
3  def seuil(eps):
4      u = 1
5      n = 0
6      while u >= eps:
7          u = np.log(1+u)
8          n = n+1
9      return n

```

8. Montrer que $u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.

On sait que $u_n \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

$$\text{Or, } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ln(1+u_n)}{u_n} \underset{u_n \rightarrow 0}{\sim} \frac{u_n}{u_n} = 1.$$

$$\text{Donc, } u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n.$$

Partie C – Convergence de la série $\sum u_n^2$

9. On pose, pour tout $x \in [0, 1]$, $k(x) = x - \ln(1+x) - \frac{x^2}{4}$.

a. Calculer $k'(x)$ et montrer que $k'(x) = \frac{x(1-x)}{2(1+x)}$.

Par somme, la fonction k est dérivable sur $[0; 1]$ et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0; 1], \quad k'(x) &= 1 - \frac{1}{1+x} - \frac{x}{2} \\ &= \frac{2(x+1) - 2 - x(x+1)}{2(x+1)} \\ &= \frac{-x^2 + x}{2(x+1)} = \frac{x(1-x)}{2(1+x)}. \end{aligned}$$

b. En déduire que $\forall x \in [0, 1]$, $x - \ln(1+x) \geq \frac{x^2}{4}$.

Sur $[0; 1]$, $x \geq 0$, $1-x \geq 0$ et $1+x \geq 0$ donc $k'(x) \geq 0$. La fonction k est donc croissante sur $[0; 1]$.

Comme $k(0) = 0 - \ln(1) - 0 = 0$, $\forall x \in [0; 1]$, $k(x) \geq k(0) \geq 0$ i.e. $x - \ln(1+x) - \frac{x^2}{4} \geq 0$.

On en déduit que

$$\forall x \in [0; 1] \quad x - \ln(1+x) \geq \frac{x^2}{4}.$$

10. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \leq 4(u_n - u_{n+1})$.

D'après la question (4.), $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 1]$. On peut donc remplacer x par u_n dans la question précédente et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^2 \leq 4(u_n - u_{n+1}).$$

11. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (u_n - u_{n+1})$ converge et calculer sa somme.

Soit $N \in \mathbb{N}$.

En reconnaissant une somme télescopique, on a :

$$\sum_{n=0}^N (u_n - u_{n+1}) = u_0 - u_{N+1} = 1 - u_{N+1}.$$

D'après la question (6.), la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 donc la série $\sum_{n \geq 0} (u_n - u_{n+1})$ est convergente et sa somme est 1.

12. Conclure que la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \leq 4$.

Toujours en trois temps :

- D'après la question (10.), $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \leq 4(u_n - u_{n+1})$ terme général d'une série convergente d'après la question (11.).
- Il est clair que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n^2$ (et $0 \leq 4(u_n - u_{n+1})$ par l'inégalité précédente).
- D'après le théorème de comparaison des séries à terme positif, la série de terme u_n^2 est convergente.

Enfin, soit $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n=0}^N u_n^2 \leq 4 \sum_{n=0}^N (u_n - u_{n+1}).$$

Par passage à la limite sur N (autorisé car les séries convergent) et conservation des inégalités larges, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \leq 4 \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n - u_{n+1}) = 4 \times 1 = 4.$$

Problème 3 – (Lois géométriques, lois de Poisson et couples)

Dans tout le problème, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est un espace probabilisé.

Partie A – Somme de deux variables géométriques

Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires **indépendantes** suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

On pose $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$.

1. Rappeler $\mathbb{X}(\Omega)$, $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X})$.

C'est du cours :

$$\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

2. Déterminer $\mathbb{Z}(\Omega)$ puis montrer que $\forall n \geq 2$, $\mathbf{P}(\mathbb{Z} = n) = (n-1)p^2q^{n-2}$.

Comme $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{Z}(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \llbracket$ (tous les entiers $n \geq 2$ sont atteints, par exemple avec $\mathbb{X} = 1$ et $\mathbb{Y} = n - 1$).

Soit $n \geq 2$. La famille $([\mathbb{X} = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, et $[\mathbb{X} = k] \cap [\mathbb{Z} = n] = [\mathbb{X} = k] \cap [\mathbb{Y} = n - k]$, qui est impossible si $k \geq n$.

Par indépendance :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbb{Z} = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) \mathbf{P}(\mathbb{Y} = n - k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) \mathbf{P}(\mathbb{Y} = n - k) \quad (\text{d'après la première remarque}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p q^{k-1} \times p q^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p^2 q^{n-2} \\ &= (n-1) p^2 q^{n-2}. \end{aligned}$$

3. Donner $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$.

Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(\mathbb{Z}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}) + \mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \frac{2}{p}$.

4. Soit $n \geq 2$. Déterminer la loi conditionnelle de $\mathbb{X}$ sachant $[\mathbb{Z} = n]$.

Reconnaître une loi usuelle. Cette loi dépend-elle de p ?

Soit $n \geq 2$. On a $\mathbf{P}(\mathbb{Z} = n) > 0$, donc $\mathbf{P}_{[\mathbb{Z}=n]}$ est bien définie.

Sachant $[\mathbb{Z} = n]$, $\mathbb{X}$ prend ses valeurs dans $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, et pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{Z}=n]}(\mathbb{X} = k) = \frac{\mathbf{P}([\mathbb{X} = k] \cap [\mathbb{Y} = n - k])}{\mathbf{P}(\mathbb{Z} = n)} = \frac{p^2 q^{n-2}}{(n-1) p^2 q^{n-2}} = \frac{1}{n-1}.$$

Sachant $[\mathbb{Z} = n]$, $\mathbb{X}$ suit donc la loi uniforme sur $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Cette loi ne dépend pas de p .

5. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Z}$ sont-elles indépendantes ? (On pourra calculer $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 2] \cap [\mathbb{Z} = 2])$.)

$\mathbb{Z} = 2$ ou encore $\mathbb{X} + \mathbb{Y} = 2$ si, et seulement si $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = 1$ car $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \geq 1$, donc

$$[\mathbb{X} = 2] \cap [\mathbb{Z} = 2] = \emptyset \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = 2] \cap [\mathbb{Z} = 2]) = 0.$$

Or, $\mathbf{P}(\mathbb{X} = 2) = pq > 0$ et $\mathbf{P}(\mathbb{Z} = 2) = p^2 > 0$, donc $\mathbf{P}(\mathbb{X} = 2) \mathbf{P}(\mathbb{Z} = 2) > 0$.

Ainsi $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 2] \cap [\mathbb{Z} = 2]) \neq \mathbf{P}(\mathbb{X} = 2) \mathbf{P}(\mathbb{Z} = 2)$ i.e. les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas indépendantes.

Partie B – Minimum et maximum de deux variables géométriques

On conserve les notations de la partie A et on pose $\mathbb{U} = \min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et $\mathbb{V} = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\mathbb{X} > n) = q^n$.

(On pensera à écrire $[\mathbb{X} > n] = \bigcup_{k \geq n+1} [\mathbb{X} = k]$)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, la famille $([\mathbb{X} = k])_{k \geq n+1}$ est un système complet d'événements de $[\mathbb{X} > n]$, donc

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(\mathbb{X} > n) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{k \geq n+1} [\mathbb{X} = k]\right) \\
 &= \sum_{k \geq n+1} \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) && \text{(par incompatibilité des événements)} \\
 &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p q^{k-1} \\
 &= p q^n \sum_{j=0}^{+\infty} q^j && \text{(on factorise et réindice)} \\
 &= p q^n \times \frac{1}{1-q} && \text{(on reconnaît une série géométrique avec } |q| < 1) \\
 &= q^n.
 \end{aligned}$$

i Remarque

Très
très
clas-
sique
donc
à
sa-
voir
re-
faire.

Commentaires : $[\mathbb{X} > n]$ signifie que les n premiers essais sont des échecs.

7. a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\mathbb{U} > n) = q^{2n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout se joue sur la définition du minimum : le minimum de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ est strictement supérieur à n si, et seulement si, $\mathbb{X} > n$ et $\mathbb{Y} > n$:

$$[\mathbb{U} > n] = [\mathbb{X} > n] \cap [\mathbb{Y} > n].$$

Par indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{U} > n) = \mathbf{P}(\mathbb{X} > n) \mathbf{P}(\mathbb{Y} > n) = q^n \times q^n = q^{2n}.$$

- b. En déduire que $\mathbb{U}$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre, puis donner $\mathbf{E}(\mathbb{U})$. (On pensera à écrire l'événement $[\mathbb{U} = n]$ en fonction des événements incompatibles $[\mathbb{U} > n]$ et $[\mathbb{U} > n-1]$)

On a $\mathbb{U}(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[\mathbb{U} > n-1] = [\mathbb{U} = n] \sqcup [\mathbb{U} > n]$, événements incompatibles donc

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(\mathbb{U} > n-1) &= \mathbf{P}(\mathbb{U} = n) + \mathbf{P}(\mathbb{U} > n) && \text{(par incompatibilité)} \\
 \text{D'où, } \mathbf{P}(\mathbb{U} = n) &= \mathbf{P}(\mathbb{U} > n-1) - \mathbf{P}(\mathbb{U} > n) \\
 &= q^{2(n-1)} - q^{2n} && \text{(on remplace)} \\
 &= (1 - q^2) (q^2)^{n-1} && \text{(on factorise)} \\
 &= (1 - q^2) (1 - (1 - q^2))^{n-1} && \text{(on arrange un peu pour reconnaître).}
 \end{aligned}$$

De plus, $1 - q^2 = (1 - q)(1 + q) = p(2 - p) \in]0, 1[$.

Ainsi $\mathbb{U}$ suit la loi géométrique de paramètre $p(2 - p) = 1 - q^2$, et

$$\mathbf{E}(\mathbb{U}) = \frac{1}{p(2 - p)}.$$

8. a. Exprimer $\mathbb{U} + \mathbb{V}$ en fonction de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, $\{\min(\mathbb{X}(\omega), \mathbb{Y}(\omega)), \max(\mathbb{X}(\omega), \mathbb{Y}(\omega))\} = \{\mathbb{X}(\omega), \mathbb{Y}(\omega)\}$, donc

$$\mathbb{U} + \mathbb{V} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}.$$

- b. En déduire que $\mathbb{V}$ admet une espérance et que $\mathbf{E}(\mathbb{V}) = \frac{3-2p}{p(2-p)}$.

On a $\mathbb{V} = \mathbb{X} + \mathbb{Y} - \mathbb{U}$. Les variables $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{U}$ admettent une espérance, donc $\mathbb{V}$ aussi par linéarité, et

$$\mathbf{E}(\mathbb{V}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}) + \mathbf{E}(\mathbb{Y}) - \mathbf{E}(\mathbb{U}) = \frac{2}{p} - \frac{1}{p(2-p)} = \frac{2(2-p) - 1}{p(2-p)} = \frac{3-2p}{p(2-p)}.$$

9. a. Montrer que $\mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y}) = \frac{p}{2-p}$.

La famille $([\mathbb{X} = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, donc

$$[\mathbb{X} = \mathbb{Y}] = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} ([\mathbb{X} = k] \cap [\mathbb{Y} = k]), \quad \text{la réunion étant disjointe.}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y}) &= \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} ([\mathbb{X} = k] \cap [\mathbb{Y} = k])\right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}([\mathbb{X} = k] \cap [\mathbb{Y} = k]) && \text{(par incompatibilité)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) \mathbf{P}(\mathbb{Y} = k) && \text{(par indépendance)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2(k-1)} && \text{(on remplace)} \\ &= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} && \text{(on factorise)} \\ &= p^2 \times \frac{1}{1 - q^2} && \left(\begin{array}{l} \text{(on reconnaît une série} \\ \text{géométrique avec } |q| < 1 \end{array} \right) \\ &= \frac{p^2}{p(2-p)} \\ &= \frac{p}{2-p}. \end{aligned}$$

- b. Justifier que $\mathbf{P}(\mathbb{X} < \mathbb{Y}) = \mathbf{P}(\mathbb{X} > \mathbb{Y})$ puis en déduire $\mathbf{P}(\mathbb{X} < \mathbb{Y})$.

Les variables X et Y sont indépendantes et de même loi : le couple (X, Y) a donc même loi que le couple (Y, X) , car pour tout $(k, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$\mathbf{P}([X = k] \cap [Y = l]) = \mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}(Y = l) = \mathbf{P}(X = l)\mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}([X = l] \cap [Y = k]).$$

D'où $\mathbf{P}(X < Y) = \mathbf{P}(Y < X) = \mathbf{P}(X > Y)$.

Les événements $[X < Y]$, $[X = Y]$ et $[X > Y]$ forment un système complet d'événements, donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X < Y) + \mathbf{P}(X = Y) + \mathbf{P}(X > Y) &= 1 \\ \mathbf{P}(X = Y) + 2\mathbf{P}(X < Y) &= 1 \\ 2\mathbf{P}(X < Y) &= 1 - \mathbf{P}(X = Y) \\ &= 1 - \frac{p}{2-p} = \frac{2(1-p)}{2-p}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \mathbf{P}(X < Y) = \frac{1-p}{2-p} = \frac{q}{2-p}.$$

10. On donne la fonction Python suivante, où `rd.geometric(p)` simule une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$.

```

1  import numpy.random as rd
2
3  def estimation(p, N):
4      c = 0
5      for k in range(N):
6          x = rd.geometric(p)
7          y = rd.geometric(p)
8          if ..... :
9              c = c + 1
10     return c / N

```

- a. Compléter la condition de la ligne `if` pour que `estimation(p, N)` renvoie une estimation de $\mathbf{P}(X = Y)$.

Il faut compter le nombre de fois où les deux simulations donnent la même valeur :

```

1  if x == y :

```

La fonction renvoie alors la fréquence empirique $\frac{c}{N}$ des réalisations de l'événement $[X = Y]$.

- b. (khûbe) Quelle valeur approchée renvoie `estimation(0.5, 100000)` ? Justifier.

Notons I_k l'indicatrice de l'événement $[X_k = Y_k]$ au k -ième tirage.

Les I_k sont indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(X = Y)$, donc $\frac{c}{N}$ est leur moyenne empirique.

D'après la loi faible des grands nombres, elle converge en probabilité vers $\mathbf{P}(X = Y)$.

Pour $p = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(X = Y) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$. Avec $N = 100000$, la fonction renvoie donc une valeur proche de $\frac{1}{3}$.

Partie C – Un couple de variables de Poisson

Soient $\lambda > 0$, $a \in]0, 1[$ et $b = 1 - a$.

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, sachant $[X = n]$, la variable Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, a)$.

On pose $T = X - Y$.

11. Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

a. Montrer que $[Y = i] \cap [T = j] = [X = i + j] \cap [Y = i]$.

Procédons par double inclusion.

— Si $Y = i$ et $T = j$, alors $X = Y + T = i + j$ et $Y = i$.

— Si $X = i + j$ et $Y = i$, alors $T = X - Y = i + j - i = j$ et $Y = i$.

D'où l'égalité.

b. En déduire que $\mathbf{P}([Y = i] \cap [T = j]) = \mathbf{P}(X = i + j) \mathbf{P}_{[X=i+j]}(Y = i)$.

Comme $\lambda > 0$, $\mathbf{P}(X = i + j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} > 0$.

D'après la question précédente et la formule des probabilités composées :

$$\mathbf{P}([Y = i] \cap [T = j]) = \mathbf{P}([X = i + j] \cap [Y = i]) = \mathbf{P}(X = i + j) \mathbf{P}_{[X=i+j]}(Y = i).$$

12. Montrer que, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbf{P}([Y = i] \cap [T = j]) = e^{-\lambda a} \frac{(\lambda a)^i}{i!} \times e^{-\lambda b} \frac{(\lambda b)^j}{j!}.$$

Sachant $[X = i+j]$, Y suit la loi $\mathcal{B}(i+j, a)$, donc $\mathbf{P}_{[X=i+j]}(Y = i) = \binom{i+j}{i} a^i b^j$ (avec $1-a = b$).

Ainsi :

$$\mathbf{P}([Y = i] \cap [T = j]) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} \times \frac{(i+j)!}{i! j!} a^i b^j = e^{-\lambda} \frac{(\lambda a)^i (\lambda b)^j}{i! j!}.$$

Comme $a + b = 1$, $e^{-\lambda} = e^{-\lambda a} e^{-\lambda b}$, d'où

$$\mathbf{P}([Y = i] \cap [T = j]) = e^{-\lambda a} \frac{(\lambda a)^i}{i!} \times e^{-\lambda b} \frac{(\lambda b)^j}{j!}.$$

13. En déduire les lois de Y et de T (on les reconnaîtra).

La famille $([T = j])_{j \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{P}(Y = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}([Y = i] \cap [T = j]) = e^{-\lambda a} \frac{(\lambda a)^i}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\lambda b} \frac{(\lambda b)^j}{j!} = e^{-\lambda a} \frac{(\lambda a)^i}{i!} \times 1.$$

Ainsi $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda a)$.

De même, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(T = j) = e^{-\lambda b} \frac{(\lambda b)^j}{j!}$, donc $T \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda b)$.

14. Les variables Y et T sont-elles indépendantes ? Justifier.

On a déjà $Y(\Omega) = T(\Omega) = \mathbb{N}$.

De plus, d'après les questions précédentes, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbf{P}([Y = i] \cap [T = j]) = \mathbf{P}(Y = i) \mathbf{P}(T = j).$$

Les variables Y et T sont **indépendantes**.

Commentaires : C'est un résultat classique, fréquent donc à retenir : si le nombre total X suit une loi de Poisson et qu'on le répartit en deux catégories indépendamment (procédé appelé « éclaircissement de Poisson »), les deux effectifs sont indépendants et suivent des lois de Poisson.