DM 6 Espérance et corrélation

Exercice 1 – (Minimum et maximum de deux variables géométriques) :

Soit $p \in]0\,;1[$ et $q = 1-p$. On pose $r = 1-q^2$.

Soient $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ deux variables aléatoires indépendantes, de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On définit

$$\mathbb{U} = \min(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) \quad \text{et} \quad \mathbb{V} = \max(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2).$$

Partie I – Loi de $\mathbb{U}$

1. Rappeler l'espérance et la variance de $\mathbb{X}_1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}([\mathbb{X}_1 > n]) = q^n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Exprimer l'événement $[\mathbb{U} > n]$ à l'aide de $[\mathbb{X}_1 > n]$ et $[\mathbb{X}_2 > n]$.
   En déduire $\mathbf{P}([\mathbb{U} > n])$, puis que $\mathbb{U} \rightsquigarrow \mathcal{G}(r)$. Donner $\mathbf{E}(\mathbb{U})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{U})$.

Partie II – Espérance et covariance

3. Vérifier que $\mathbb{U}+\mathbb{V} = \mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2$ et $\mathbb{U}\mathbb{V} = \mathbb{X}_1\mathbb{X}_2$. En déduire que $\mathbb{V}$ admet une espérance et que
$$\mathbf{E}(\mathbb{V}) = \frac{2}{p} - \frac{1}{r}.$$
4. Montrer que $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ admettent un moment d'ordre 2. Montrer ensuite que
$$\mathbf{Cov}(\mathbb{U},\mathbb{V}) = \frac{q^2}{r^2}.$$
5. Établir que $\mathbf{Cov}(\mathbb{U},\mathbb{V}) = \mathbf{V}(\mathbb{U})$. En déduire que $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}-\mathbb{U}$ sont non corrélées.
6. Les variables aléatoires $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ sont-elles indépendantes ?

Partie III – Variance de $\mathbb{V}$ et corrélation

7. Calculer $\mathbf{V}(\mathbb{U}+\mathbb{V})$ de deux façons différentes. En déduire
$$\mathbf{V}(\mathbb{V}) = \frac{2q}{p^2} - \frac{3q^2}{r^2}.$$
8. Montrer que $r = p(1+q)$, puis que le coefficient de corrélation linéaire de $(\mathbb{U},\mathbb{V})$ vaut
$$\boldsymbol{\rho}(\mathbb{U},\mathbb{V}) = \sqrt{\frac{q}{2q^2+q+2}}.$$
9. En étudiant la fonction $f : q \longmapsto \dfrac{q}{2q^2+q+2}$ pour $q \in]0\,;1[$, vérifier que $0 < \boldsymbol{\rho}(\mathbb{U},\mathbb{V}) < \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et commenter.

Partie IV – Meilleure approximation affine et simulation

10. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, exprimer $\mathbf{V}(\mathbb{V} - t\,\mathbb{U})$ en fonction de t, q et r.

    Pour quelle valeur de t cette quantité est-elle minimale ? Donner alors ce minimum.

11. Pour $p = \dfrac{1}{2}$, calculer $\mathbf{E}(\mathbb{U})$, $\mathbf{E}(\mathbb{V})$ et $\mathbf{Cov}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$.

    Écrire ensuite un script `Python` simulant un grand nombre de réalisations de $(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ et affichant les moyennes empiriques de $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ ainsi que leur covariance empirique, afin de comparer avec les valeurs théoriques.