Lycée Gerville Réache

Cours de

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

— FABIEN PUCCI —



Classe de

ECG

Deuxième année

De septembre à Toussaint 2026

Sommaire

Programme de Khôlle : Compétences d'ECG-1 1

TD 1 : Compétences d'ECG-1 . . . 42

DM 0 : Rentrée . . . 60

I Rappels d'ECG-1
Suites et séries réelles 65

I Suites numériques réelles . . . 66

II Séries numériques réelles . . . 93

Programme : Compléments sur les suites et séries réelles . . . 101

I Compléments sur les suites et séries réelles 105

I Relations de comparaison . . . 108

II Séries numériques . . . 121

Test 1 : Suites et Séries . . . 135

Fiche 1 : Calcul de sommes (et produits) fini(e)s . . . 138

Fiche 2 : Nature d'une série – À l'aide de comparaisons . . . 142

Fiche 3 : Nature d'une série – À l'aide d'équivalences . . . 143

Fiche 4 : Nature d'une série – À l'aide de dominations . . . 144

Fiche 5 : Nature d'une série – À l'aide de la divergence grossière . . . 145

Fiche 6 : Nature d'une série – À l'aide de la convergence absolue . . . 146

Fiche 7 : Nature d'une série et somme – À l'aide d'une somme télescopique . . . 147

Fiche 8 : Nature d'une série et somme – Séries alternées . . . 148

TD 2 : Compléments sur les suites et les séries réelles . . . 151

DM 1 : D'après EM Lyon 2025 . . . 171

Programme de Khôlle : Compléments sur les suites et les séries réelles 174

II Rappels d'ECG-1
Espaces vectoriels 178

I Espaces vectoriels . . . 179

II Dimension finie . . . 189

Fiche 9 : Rappels d'ECG-1 - Système linéaires . . . 201

Fiche 10 : Système linéaire – De rang 3. . . . 208

Fiche 11 : Système linéaire – De rang 2. . . . 209

Fiche 12 : Système linéaire – De rang 1. . . . 210

Programme : Espaces vectoriels . . . 211

II Espaces vectoriels 213

I Rappels de première années 217
II Sous-espaces vectoriels 221
III Bases et dimension 229
IV Rang d'une famille de vecteurs 241
V Rappels et compléments sur l'inversibilité de matrices 242
Test 2 : Systèmes et Espaces vectoriels 246
Fiche 13 : Inverse d'une matrice – À l'aide d'un polynôme annulateur 251
Fiche 14 : Montrer qu'un espace est un SEV – À l'aide d'un Vect 252
Fiche 15 : Déterminer des bases et conséquences 254
Fiche 16 : Inverse d'une matrice – À l'aide des opérations élémentaires 256
Fiche 17 : Puissance d'une matrice – À l'aide d'une dia ou trigonalisation 258
Fiche 18 : Inverse d'une matrice – À l'aide d'un système 259
Fiche 19 : Puissance d'une matrice – À l'aide de la formule du binôme 260
TD 3 : Espaces vectoriels 262
DM 2 : D'après Ecricome et Edhec 288

Programme de Khôlle : Espaces vectoriels **291**

Devoir surveillé 1 : Espaces vectoriels et Séries **295**
Corrigé : Espaces vectoriels et Séries 299
Programme : Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ 314

III Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ **315**
I Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ 317
II Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1 325
Test 3 : Suites récurrentes 327
Fiche 20 : Suites récurrentes – Dans le cas où f est croissante. 330
Fiche 21 : Suites récurrentes – Avec l'IAF 333
TD 4 : Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ 337
DM 3 : Étude de fonction, suite réelle, fonction définie par une intégrale 344
Corrigé : Étude de fonction, suite réelle, fonction définie par une intégrale . 348

Programme de Khôlle : Suites récurrentes & Espaces vectoriels **359**
DM 4 : Étude d'une suite définie par récurrence 363
Corrigé : Étude d'une suite définie par récurrence 365
Programme : Probabilités 371

IV Rappels d'ECG-1
Probabilités **374**
I Probabilités 375

IV Rappels d'ECG-1
Variables aléatoires **389**
I Variables aléatoires réelles 389
II Variables aléatoires discrète et finies 395

IV Rappels d'ECG-1
Lois usuelles 402

I Lois finies usuelles . . . 403
II Lois infinies usuelles . . . 412
Fiche 22 : Reconnaître une loi usuelle . . . 420
Fiche 23 : Rappels (très succincts) sur les variables aléatoires réelles . . . 423
TD 5 : Rappels d'ECG-1 – Variables aléatoires réelles . . . 427
Programme : Couple de variables aléatoires . . . 437

IV Couples de variables aléatoires discrètes 440

I Couple de variables aléatoires discrètes . . . 441
II Lois conditionnelles . . . 451
III Indépendance de variables aléatoires . . . 455
IV Opérations sur les variables aléatoires discrètes . . . 460
V Bilan et compétences attendues . . . 469
Fiche 24 : Loi conjointe et lois marginales . . . 470
Fiche 25 : Loi d'une somme . . . 474
Fiche 26 : Loi de $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$ . . . 479
Fiche 27 : Loi d'un min . . . 481
Fiche 28 : Loi d'un max . . . 485
Fiche 29 : Loi d'un produit . . . 489
TD 6 : Couple de variables aléatoires discrètes . . . 491
DM 5 : Couple de variables aléatoires . . . 507
Corrigé : Couple de variables aléatoires . . . 510

Programme de Khôlle : Variables aléatoires, Lois usuelles & Couples 513

Devoir surveillé 2 : Espaces vectoriels et Variables aléatoires 521

Corrigé : Espaces vectoriels et Variables aléatoires . . . 525

V Rappels d'ECG-1
Espérance, Variance et indépendance 538

I Espérance et Variance . . . 539
II Indépendance . . . 543
TD 7 : Rappels d'ECG-1 – Espérance, Variance . . . 545
Programme : Espérance, Variance & Co . . . 561

V Espérance, Variance & Co 564

I Calculs d'espérances . . . 564
II Covariance d'un couple . . . 573
III Bilan et compétences attendues . . . 581
Fiche 30 : Espérance d'un produit, covariance, corrélation . . . 582
TD 8 : Espérance, Variance et Indépendance . . . 586

DM 6 : Espérance et corrélation 599

Enseignement d'informatique

I Python - Rappels de première année **601**
I Prise en main 602
II Rappels des principales commandes vues en première année 603

II Python - Les boucles **614**
I Les boucles `for` 615
II Les boucles `while` 619

III Python - Les listes **629**
I Listes et premières commandes 630
II Modes de génération des listes 636
III Procédures classiques 637
IV Exercices 648
Index 658

Khôlles Compétences d'ECG-1

K1 • FONCTIONS POLYNOMIALES

- Factoriser un polynôme à l'aide d' :
  - un facteur commun
  - une identité remarquable
  - une ou des racines évidentes puis une identification des coefficients ou une division euclidienne de polynômes
  - un facteur donné dans l'énoncé
- Résoudre des équations faisant intervenir un polynôme :
  - soit directement
  - soit après un changement de variable
- Résoudre des inéquations faisant intervenir un polynôme, étudier le signe d'un polynôme
- Résoudre des équations polynomiales avec un paramètre
- Décomposer une fonction rationnelle en éléments simples
- Résoudre des systèmes de la forme $\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$ avec x, y les inconnues et a, b deux réels fixés
- Utiliser le degré pour résoudre une équation dans laquelle l'inconnue est un polynôme
- Étudier les variations d'une fonction polynomiale en étudiant le signe de sa dérivée
- Établir puis dresser un tableau de variations

Exercice .1 [Correction p. 17]

Soient p et q dans $\mathbb{N}$, et $\mathrm{P} = (1+\mathrm{X})^p$, $\mathrm{Q} = (1+\mathrm{X})^q$.

Calculer de deux manières différentes le terme en X^n du produit PQ.

Quelle relation peut-on en déduire ?

K2 • NOTATIONS $\sum$ ET $\prod$

- Savoir utiliser les symboles $\sum$ et $\prod$
- Calculer des sommes finies :
  - en utilisant des sommes remarquables (sommes usuelles, etc.)
  - en utilisant un changement d'indice
  - en utilisant un télescopage
  - en ajoutant/retranchant des termes
  - en utilisant une réorganisation des termes

Exercice .2 [Correction p. 17]

Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\quad\text{et}\quad v_n=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}.$$

Exercice .3 [Correction p. 17]

1. Trouver des réels a, b et c tel que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2}. \tag{.1}$$
2. En déduire le calcul de $\mathrm{K}_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice .4 [Correction p. 18]

On considère x, un nombre réel, et n un entier naturel.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1$. En déduire $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.
2. Montrer que $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx$. En déduire $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$.
3. Montrer que $\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=n(n-1)x^2$. En déduire $\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$.
4. Déduire des questions précédentes que $\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}$.
5. Dans la même idée, calculer $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice .5 [Correction p. 19]

Calculer :

1. $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}x^{i+j}$.
2. $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)$.
3. $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)^2$.
4. $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2/i+j=n}ij$.
5. $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}ij$.
6. $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)$.
7. $\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}|i-j|$
8. $\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{i}{j}$
9. $\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i}$
10. $\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}2^{i+j}$
11. $\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{i}{j}2^{i+j}$
12. $\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i}2^{i+j}$
13. $\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{n}{j}\binom{j}{i}$

Exercice .6 [Correction p. 21]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

1. $\prod_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} x^{i+j}$.
2. $\prod_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} ij$.
3. $\prod_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} i^j$.
4. $\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^{\frac{i}{j}}$.
5. $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{i}{j}$.
6. $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{i}{j}$.

K3 • FONCTIONS USUELLES

— Résoudre des équations ou inéquations faisant intervenir les fonctions usuelles (polynôme, valeur absolue, exp, ln, puissances, partie entière)

— Résoudre une équation en effectuant un changement de variable

— Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction

— Décomposer une fonction à l'aide des opérations (cas d'une somme, des produits, d'une composée, etc.)

— Étudier les variations d'une fonction :

  — à partir du signe de la fonction dérivée calculée à l'aide des formules de dérivation du prébac complétées

  — en décomposant la fonction à partir de fonctions usuelles

— Étudier la parité d'une fonction

— Déterminer un majorant, un minorant, le minimum ou le maximum d'une fonction :

  — à partir du tableau de variations

  — en utilisant des inégalités

— Comparer des expressions algébriques en s'appuyant sur :

  — un enchaînement d'opérations

  — une étude du signe de la différence en passant par une étude de fonction appropriée

— Étudier une fonction du type $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$

Exercice .7 [Correction p. 21]

Étudier puis représenter la fonction définie par $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

1. Domaine de définition.
2. Limites aux bornes du domaine de définition.
3. Domaine de dérivabilité et tableau de variation.
4. Courbe représentative.

Exercice .8 [Correction p. 22]

Étudier puis représenter la fonction définie par $f(x) = |\ln|x||$.

1. Domaine de définition et domaine d'étude.

2. Limites aux bornes du domaine de définition.
3. Domaine de dérivabilité. Dérivabilité en 1 et -1.Tableau de variation.
4. Courbe représentative.

K4 • SUITES RÉELLES

— Étudier la monotonie d'une suite (montrer si elle est croissante, décroissante ou ni l'une, ni l'autre) :
  — par signe de la différence $u_{n+1} - u_n$
  — par comparaison du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 , lorsque u est strictement positive
  — par étude de fonction associée
— Reconnaitre des suites usuelles (arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique, récurrente linéaire d'ordre 2)
— Déterminer la forme explicite des suites usuelles
— Calculer la somme des n premiers termes
— Utiliser une suite auxiliaire pour se ramener à une suite usuelle.
— Encadrer le terme général notamment par un raisonnement par récurrence
— Établir la valeur d'une somme par un raisonnement par récurrence

Exercice .9 [Correction p. 23]

Étudier le sens de variation des suites suivantes :

1. $u_n = n^2 - n + 2$
2. $\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = w_n - n \end{cases}$
3. $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
4. $v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
5. $\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_{n+1} = (n^2+1)\alpha_n \end{cases}$
6. $k_n = \dfrac{n!}{n^n}$.
7. $e_n = \dfrac{2^n}{(n+1)!}$.

Exercice .10 [Correction p. 24]

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n}. \end{cases}$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.
2. Étudier la monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire l'éventuelle convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice .11 [Correction p. 24]

Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n^2}$ sont adjacentes.

K5 • RAISONNEMENTS PAR RÉCURRENCE

— Utiliser et rédiger un raisonnement par récurrence en 4 points :

— Énoncer la propriété

— Initialisation

— Hérédité

— Conclusion

— Applications

Exercice .12 [Correction p. 24]

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = -1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Exercice .13 [Correction p. 25]

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1}.$$

Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant u_n \leqslant n^2$.

K6 • SYSTÈMES LINÉAIRES

— Résoudre des systèmes linéaires :

— dans le cas où le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues

— dans le cas où le nombre d'équations est strictement supérieur au nombre d'inconnues

— dans le cas où le nombre d'inconnues est strictement supérieur au nombre d'équations

— Montrer qu'un système linéaire carré est ou non de Cramer

— Résoudre un système linéaire à paramètre

Exercice .14 [Correction p. 25]

Résoudre le système

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ 2x - y + 3z + t = 3 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases}$$

Exercice .15 [Correction p. 26]

Résoudre le système suivant :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ x + z + t = 3 \\ y + t = -1 \\ x + y + z + 2t = 2 \end{cases}$$

Exercice .16 [Correction p. 26]

Déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 2 \end{cases}$$

d'inconnue $(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4$.

K7 • MATRICES

- Calcul matriciel
- Résolution d'une équation matricielle
- Calculer la puissance d'une matrice
- Montrer qu'une matrice est ou n'est pas inversible et, si elle l'est, déterminer son inverse :
  - en utilisant la définition
  - en utilisant un système linéaire
  - en utilisant des opérations élémentaires sur les matrices avec la méthode du pivot de Gauss
  - en utilisant une égalité matricielle.
- Déterminer l'inverse (si elle existe) d'une matrice carrée d'ordre 2 en utilisant la proposition du cours
- Utiliser l'inverse d'une matrice (si elle existe) pour résoudre un système linéaire.

Exercice .17 [Correction p. 27]

[Puissances de matrice et binôme de Newton]

1. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $\mathrm{B} = \mathrm{A} - \mathrm{I}_3$.
   a. Montrer que B est nilpotente d'indice 3.
   b. En déduire A^n pour tout entier n.
2. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

K8 • DÉNOMBREMENT ET COEFFICIENTS BINOMIAUX

- Dénombrer un ensemble :
  - en utilisant une réunion disjointe, une partition,

- en utilisant le complémentaire,
- en utilisant un produit cartésien,
- en utilisant un p-uplet d'éléments non distincts d'un ensemble,
- en utilisant un arrangement,
- en utilisant une permutation,
- en utilisant une partie d'un ensemble

— Calculer des coefficients binomiaux :

- en utilisant la définition
- en utilisant leurs propriétés dont le triangle de Pascal
- en utilisant la relation $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

— Utiliser la formule du binôme de Newton :

- pour calculer des sommes faisant intervenir des coefficients binomiaux
- pour déterminer la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice.

Exercice .18 [Correction p. 27]

On compte dans cet exercice les mots des trois lettres choisies parmi les 26 lettres de l'alphabet, avec ou sans signification. Déterminer le nombre de mots de trois lettres :

1. en tout ;
2. deux à deux distinctes ;
3. ayant exactement deux lettres identiques ;
4. commençant par une voyelle et finissant par une consonne ;
5. contenant au moins deux voyelles distinctes et une consonne ;
6. contenant deux consonnes identiques et une voyelle ;
7. contenant au moins une consonne ;
8. contenant au moins une consonne et une voyelle.

K9 • PROBABILITÉS SUR UN UNIVERS FINI

— Expliciter l'univers d'une expérience aléatoire

— Traduire un énoncé en terme d'évènements

— Utiliser la formule de Poincaré (dans le cas de 2 ou 3 évènements)

— Calculer des probabilités en situation d'équiprobabilité et à l'aide des propriétés d'une probabilité

Exercice .19 [Correction p. 28]

On considère un jeu de dominos. Chaque domino présente deux faces égales (doubles) ou différentes (simples). Ces faces portent un numéro de 0 à 6. Tous les dominos sont différents et toutes les associations existent.

1. Combien y a-t-il de dominos dans le jeu ?
2. On tire au hasard deux dominos. Quelle est la probabilité pour qu'ils aient une face commune ?

K10 • LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

— Déterminer une limite sans une forme indéterminée

— Déterminer une limite avec une forme indéterminée :

  — en transformant l'expression algébrique

  — en utilisant la règle sur les polynômes ou les fractions rationnelles

  — en utilisant un changement de variable

  — en utilisant l'expression conjuguée ou son opposé

  — en utilisant une majoration, une minoration ou un encadrement

— Étudier la continuité d'une fonction en un point (ainsi que la continuité à gauche ou à droite)

— Prolonger, si c'est possible, une fonction par continuité en un point

— Justifier les asymptotes et les branches infinies de la courbe représentative d'une fonction

Exercice .20 [Correction p. 29]

Déterminer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$
4. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos(x)}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$
8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n-1}$
9. $\lim\limits_{x\to \alpha} \dfrac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin(x)(\cos(2x)-\cos(x))}$
11. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$
12. $\lim\limits_{x\to \alpha^+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}, \quad (\alpha>0)$
13. $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$
14. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x-e^2}{x^2+x-6}$
15. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4}{1+x^\alpha \sin^2 x}, \alpha\in\mathbb{R}$
16. $\lim\limits_{x\to \pi} \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right)$

K11 • CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE

— Montrer qu'une fonction est continue :

  — en un point

  — sur un intervalle

— Étudier les variations d'une fonction, établir son tableau de variations, calculer des limites, ...

— Résoudre une équation du type $f(x) = k$ (avec $k \in \mathbb{R}$), suivant les cas :

  — en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires (donne l'existence éventuelle de solutions)

  — en utilisant le théorème de la bijection continue (donne l'existence et l'unicité de la solution)

  — par le calcul

— Montrer qu'une fonction est une bijection

— Dans le cas où une fonction f est bijective, déterminer, si possible, la bijection réciproque f^{-1}

— Savoir exploiter les propriétés de la bijection réciproque f^{-1}

Exercice .21 [Correction p. 32]

Justifier l'existence d'une unique solution α dans $\left]\pi\,;\,\frac{3\pi}{2}\right[$ de l'équation $\tan x = x$.

Donner une solution approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice .22 [Correction p. 32]

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice .23 [Correction p. 33]

1. Montrer que $f : x \longmapsto \dfrac{2x-1}{x(x-1)}$ réalise une bijection de $]0\,;1[$ dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite de $f^{-1}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

K12 • PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET INDÉPENDANCE

— Déterminer une probabilité conditionnelle :

  — en utilisant la définition

  — en interprétant l'énoncé

  — en utilisant la formule de Bayes

— Utiliser la formule des probabilités composées pour calculer la probabilité de l'intersection d'évènements

— Montrer qu'une famille finie d'évènements est ou n'est pas un système complet d'évènements

— Utiliser la formule des probabilités totales pour calculer la probabilité d'un évènement

— Montrer que des évènements sont ou non :

  — deux à deux indépendants

  — mutuellement indépendants

— Utiliser l'indépendance d'une famille finie d'évènements pour calculer la probabilité de l'intersection d'évènements

Exercice .24 [Correction p. 33]

10 garçons et 15 filles descendent de manière désordonnée d'un bus. Quelle est la probabilité que les 3 premiers à descendre soient des garçons et que la quatrième soit une fille ?

Exercice .25 [Correction p. 33]

Dans un jeu télévisé, trois portes sont fermées.

Derrière l'une d'entre elles se trouve une voiture, derrière chacune des deux autres, un porte-clé.

Le candidat choisit l'une des portes. Le présentateur, qui sait quelle porte cache la voiture, ouvre alors l'une des deux autres portes, derrière laquelle se trouve un porte-clé.

Il propose alors au candidat de changer de porte. Que doit faire le candidat ?

K13 • LIMITE DE SUITES RÉELLES

— Suites réelles usuelles

— Étudier la monotonie d'une suite réelle

— Étudier la nature d'une suite en utilisant :

  — les opérations sur les limites (limites de fonctions, limites usuelles)

  — des sous-suites

  — une suite auxiliaire qui permet de se ramener à une suite usuelle

  — des encadrements (théorème des gendarmes)

  — la comparaison (compatibilité avec l'ordre...)

  — deux suites adjacentes

  — le théorème de la limite monotone

— Étudier une suite définie par des équations

— Étudier une suite construite à partir d'une somme

Exercice .26 [Correction p. 34]

[Moyenne arithmético-géométrique] Soient $0 \leqslant b \leqslant a$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par

$$u_0 = a,\ v_0 = b,\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

On admettra (ou on démontrera) que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies avec $u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$ pour tout entier n.

1. Démontrer que pour tous réels positifs x et y, on a
$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$
2. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant v_n$, $u_n \geqslant u_{n+1}$ et $v_{n+1} \geqslant v_n$.
3. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $0 \leqslant u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(u_n - v_n)$.

4. Démontrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite. Cette limite est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $\mathrm{M}(a,b)$.
5. Écrire une fonction Python nommée `moyenne(a,b,ecart)` qui donne un encadrement de $\mathrm{M}(a,b)$, avec une amplitude inférieure ou égale à `ecart`.

K14 • DÉRIVATION

— Montrer qu'une fonction est dérivable (à gauche et à droite) en un point (avec un calcul de limite...)

— Montrer qu'une fonction est dérivable sur un intervalle (avec opérations et fonctions de référence...)

— Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point

— Déterminer le développement limité d'une fonction à l'ordre 1 au voisinage d'un point

— Calculer de fonctions dérivées

— Étudier les variations d'une fonction.

— Utiliser les Inégalités des accroissements finis pour l'étude de la convergence d'une suite récurrente d'ordre 1

— Montrer qu'une fonction est continue, dérivable, de classe C^1, de classe C^n, de classe C^∞ sur un intervalle

— Montrer qu'une fonction est de classe C^1 à l'aide du prolongement par continuité de la dérivée

— Calculer la dérivée n-ième d'une fonction :

  — en utilisant une récurrence

  — en utilisant la formule de Leibniz

— Étudier une fonction en utilisant ses dérivées successives

— Montrer qu'une fonction est convexe ou concave

— Utiliser la convexité d'une fonction pour montrer une inégalité

— Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative d'une fonction

Exercice .27 [Correction p. 34]

1. Montrer que, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.
2. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

K15 • THÉORIE DES GRAPHES

— Maîtrise du vocabulaire (Sommet, arête, chaîne, etc.)

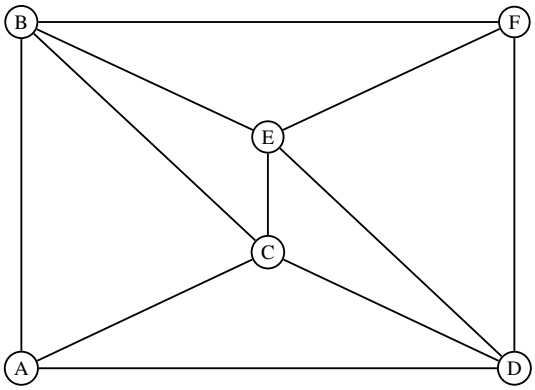
— Déterminer la matrice d'adjacence

— Représentation graphique d'un graphe

— Recherche du plus court chemin à l'aide de l'algorithme de Dijkstra

Exercice .28 [Correction p. 35]

On considère le graphe $\mathcal{G}$ suivant :



1. Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe.
2. L'exécution du programme ci-dessous affiche le résultat suivant.

Éditeur

```
import numpy as np
M=np.array ([[0,1,1,1,0,0],[1,0,1,0,1,1],
    [1,1,0,1,1,0],[1,0,1,0,1,1],
    [0,1,1,1,0,1],[0,1,0,1,1,0]])
print(np.dot(M,M))
```

```
[[3 1 2 1 3 2]
 [1 4 2 4 2 1]
 [2 2 4 2 2 3]
 [1 4 2 4 2 1]
 [3 2 2 2 4 2]
 [2 1 3 1 2 3]]
```

   a. Combien existe-t-il de chaînes de longueur 2 dont le départ et l'extrémité sont respectivement les sommets B et D ? Donner ces chaines.

   b. Justifier que le graphe $\mathcal{G}$ est connexe.

3. Ce graphe possède-t-il une chaine eulérienne ? Si oui, en donner une.
4. Justifier que ce graphe ne possède pas de cycle eulérien. Quelle arête ajouter pour qu'il en possède un ?
5. Expliquer ce que permet de renvoyer l'exécution de `mystere(M)` dans le cas où `M` est le tableau représentant la matrice d'adjacence du graphe $\mathcal{G}$.

Éditeur
```python
def mystere(M):
    S=['A','B','C','D','E','F']
    n=len(S)
    L=[[] for k in range(n)]

    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if M[i,j]!=0:
                L[i].append(S[j])

    return L
```

K16 • PROBABILITÉS SUR UN UNIVERS INFINI

— Traduire un évènement à l'aide d'une réunion infinie dénombrable ou d'une intersection infinie dénombrable

— Calculer la probabilité d'une réunion finie d'évènements :

  — si les évènements sont deux à deux incompatibles, en utilisant la propriété de σ-additivité

  — sinon, en utilisant la formule de Poincaré ou des évènements contraires

— Calculer la probabilité d'une réunion infinie dénombrable d'évènements :

  — si les évènements sont deux à deux incompatibles, en utilisant la propriété de σ-additivité

  — si les évènements forment une suite croissante d'évènements, en utilisant le théorème de la limite monotone

  — sinon, en utilisant $\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k\right)$

— Calculer la probabilité d'une intersection finie d'évènements :

  — si les évènements sont mutuellement indépendants, en utilisant le produit des probabilités

  — sinon, en utilisant la formule des probabilités composées ou les évènements contraires

— Calculer la probabilité d'une intersection infinie dénombrable d'évènements :

  —

  — si les évènements forment une suite décroissante d'évènements, en utilisant le théorème de la limite monotone

  — sinon, en utilisant $\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k\right)$

— Calculer la probabilité d'un évènement à l'aide de la formule des probabilités totales

Exercice .29 [Correction p. 36]

Un individu I_0 dispose d'une information binaire (Vrai ou Faux).

Il la transmet à I_1, qui la transmet à I_2, …, qui la transmet à I_n.

Chacun transmet l'information reçu (ou son inverse) avec la probabilité p (ou $1-p$). Quelle est la probabilité p_n pour que I_n dispose de l'information correcte ?

Exercice .30 [Correction p. 36]

Des boules indiscernables et en nombre infini sont placées au hasard et une à une dans deux boîtes (U et V). On place les boules indépendamment les unes des autres.

Pour tout $k \geqslant 1$, on note U_k l'évènement « La k-ième boule est placée dans l'urne U » et $\mathrm{V}_k = \bar{\mathrm{U}}_k$, c'est-à-dire l'évènement « La k-ième boule est placée dans l'urne V ».

1. Déterminer la probabilité de l'événement A_k : « Les deux boîtes sont non vides pour la première fois lorsque l'on place la k-ième boule » pour $k \geqslant 2$.
2. Montrer qu'il est quasi-certain que les deux boîtes deviennent non vides.

K17 • SÉRIES RÉELLES

— Étudier la convergence et, si elle converge, calculer la somme d'une série liée à une série usuelle

— Montrer qu'une série est convergente ou divergente :

  — en utilisant la suite des sommes partielles

  — en utilisant la linéarité et les séries usuelles

  — en utilisant la suite des sommes partielles et un encadrement, une majoration ou minoration

  — en utilisant les suites des sommes partielles d'indices pairs et impairs

  — de manière plus générale en utilisant toutes vos connaissances sur les suites

  — en utilisant la condition nécessaire de convergence (uniquement pour la divergence)

Exercice .31 [Correction p. 37]

Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$
2. $n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$
3. $\dfrac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$
4. $e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
5. $\mathrm{ch}^{\,\alpha}(n)-\mathrm{sh}^{\,\alpha}(n)$.
6. $2\ln(n^3+1)-3\ln(n^2+1)$.
7. $\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$.
8. $\arccos\left(\dfrac{n^3+1}{n^3+2}\right)$.
9. $\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$.
10. $\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+2)!}$.
11. $\dfrac{n!}{n^n}$
12. $\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$
13. $\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$
14. $\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$
15. $\dfrac{n^2}{(n-1)!}$
16. $n^{\ln n}e^{-\sqrt{n}}$
17. $\dfrac{1}{\ln(n)\ln(\mathrm{ch}\,n)}$
18. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
19. $\dfrac{1}{n^\alpha}\mathrm{S}(n)$ où $\mathrm{S}(n)=\displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p^n}$.

K18 • INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

— Calculer une intégrale en utilisant :
  — une primitive
  — une décomposition en éléments simples
  — une intégration par parties
  — un changement de variable
— Utiliser les propriétés de l'intégrale (Relation de Chasles, positivité, inégalité, etc.)
— Étudier une suite définie par une intégrale
— Étudier une fonction définie par une intégrale

Exercice .32 [Correction p. 39]

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n=u_n+\dfrac{1}{n(n!)}$ sont adjacentes.
2. a. On pose $\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{n!}e^{1-x}\,\mathrm{d}x$. Calculer I_0 et montrer que $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   b. Montrer que $\mathrm{I}_{k-1}-\mathrm{I}_k=\dfrac{1}{k!}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.
   c. En déduire que $u_n=e-\mathrm{I}_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.
3. En déduire que e est irrationnel.

K19 • ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

— Résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constant du premier ordre

— Résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constant du second ordre

— Recherche d'une solution particulière

Exercice .33 [Correction p. 40]

1. Résoudre sur $]2\,;+\infty[$, l'équation différentielle $(x^2-3x+2)y'+y=x^2-2x+2$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y''-2y'+y=xe^x$.

K20 • V.A.R DISCRÈTES

— Déterminer une loi de probabilité

— Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire

— Déterminer la loi, l'espérance, la variance d'une variable aléatoire de la forme $\mathbb{Y}=g(\mathbb{X})$, disposant de la loi de la v.a.r $\mathbb{X}$:

— Théorème de transfert

— Formule de Koenig-Huygens

— Linéarité de l'espérance

— Variance de $a\mathbb{X}+b$.

Exercice .34 [Correction p. 41]

On considère qu'à un concours, un candidat a 20% de chances de réussir. On prend un groupe de 25 candidats au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins un candidat réussisse ?
2. Quelle est la probabilité qu'au plus deux candidats réussissent ?
3. Quelle est la probabilité que dix candidats réussissent ?
4. Calculer le nombre moyen de candidats qui réussissent sur 25 qui passent le concours.

Corrigés

Correction de l'exercice .1 : [Énoncé]

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Comme $(1+\mathrm{X})^p(1+\mathrm{X})^q = (1+\mathrm{X})^{p+q}$ le terme de degré X^n est $\binom{p+q}{n}$ d'après la formule du binôme.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coefficients de P et Q respectivement et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ceux de PQ. On a :
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}.$$

Finalement, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$.

À retenir
Identité dite de Vandermonde.

Correction de l'exercice .2 : [Énoncé]

Il suffit d'étudier le signe de deux termes consécutifs :
$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{=\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}} + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{>\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+1} > 0.$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante.
$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{=\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}<\frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{<\frac{1}{2n}} - \frac{1}{n} < 0.$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) décroissante.

Correction de l'exercice .3 : [Énoncé]

1. Considérons l'équation, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$ en admettant qu'une telle écriture existe.
   En multipliant les deux membres par $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = a + \left(\dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}\right) \times k$.
   Enfin pour $k = 0$, $a = \dfrac{1}{2}$.
   Multipliant successivement l'équation (.1) par $k+1$ et évaluant en $k = -1$ puis par $k+2$, évaluant en $k = -2$, on trouve : $b = -1$ et $c = \dfrac{1}{2}$.
   Réciproquement, on vérifie que $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -1$ et $c = \dfrac{1}{2}$ conviennent.
   Donc, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2k} - \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{2(k+2)}$.
2. Par un petit miracle, on peut écrire, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+2}\right)$.

On conclut alors par linéarité et télescopage :

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice .4 : [Énoncé]

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Dans $\mathbb{R}$ le produit est commutatif. D'après le **binôme de Newton**, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1^n = 1.$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, $x^k(1-x)^{n-k} = \frac{1}{2^n}$ et on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

2. D'après la formule du capitaine, on a : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} n\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{(n-1)-(k-1)}\\ &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{(n-1)-(k-1)}\\ &= nx\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{(n-1)-(k-1)}\\ &= nx\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} x^{\ell} (1-x)^{(n-1)-\ell}\\ &= nx[x + (1-x)]^{n-1}\\ &= nx.\end{aligned}$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

3. De même, $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ qui entraîne :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{(n-1)-(k-1)}\\ &= \sum_{k=2}^{n} n\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{(n-1)-(k-1)}\\ &= n(n-1)x^2\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)}\\ &= n(n-1)x^2\sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n-2}{\ell} x^{\ell} (1-x)^{(n-2)-\ell}\\ &= n(n-1)x^2[x + (1-x)]^{n-2}\\ &= n(n-1)x^2.\end{aligned}$$

Pour $x = \dfrac{1}{2}$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}$$
$$= n\left(3n-1\right)2^{n-2}.$$

4. $$\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\left(x^2 - \frac{2k}{n}x + \frac{k^2}{n^2}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$= x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - \frac{2x}{n}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$+ \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$= x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - \frac{2x}{n}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$+ \frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right.$$
$$\left.+ \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right]$$
$$= x^2 \times 1 - \frac{2x}{n}\times nx + \frac{1}{n^2}[n(n-1)x^2 + nx]$$
$$= x^2 - 2x^2 + \left(1 - \frac{1}{n}x^2\right) + \frac{1}{n}x$$
$$= \frac{x-x^2}{n}.$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$.

Correction de l'exercice .5 : [Énoncé]

1. On suppose $x \neq 1$ pour éviter le cas trivial égal à $(n+1)^2$.

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}x^{i+j} = \sum_{i=0}^{n}\left(x^i\sum_{j=0}^{n}x^j\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(x^i \times \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\sum_{i=0}^{n}x^i = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^2.$$

2. $$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) = n^2(n+1).$$

3. $$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)^2 = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}.$$

4. $$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2/i+j=n} ij = \sum_{i=0}^{n} i(n-i) = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}.$$

5. $$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} ij\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j-1} i\right) = \sum_{j=2}^{n} j\times\frac{j(j-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}(j^3-j^2)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^3-j^2) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$
$$= \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}.$$

6. $$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

7. $$\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} |i-j| = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}|i-j| = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i-1}(i-j)+\sum_{j=i+1}^{n}(j-i)\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} j - \sum_{j=i+1}^{n} i\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} - ni + i^2\right)$$
$$= \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

8. $$\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n} 1 = n+1.$$

9. $$\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n} 2^j = 2^{n+1}-1.$$

10. $$\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^{i+j} = \sum_{j=0}^{n} 2^j\sum_{i=0}^{j} 2^i = \sum_{j=0}^{n}(2^{2j+1}-2^j)$$
$$= \frac{1}{3}\left(2^{2n+3} - 3\times 2^{n+1} + 1\right).$$

11. $$\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{i}{j}2^{i+j} = \sum_{i=0}^{n} 2^i\sum_{j=i}^{n}\binom{i}{j}2^j = \sum_{i=0}^{n} 2^{2i}$$
$$= \frac{1}{3}\left(2^{2n+2}-1\right).$$

12. $$\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i}2^{i+j} = \sum_{j=0}^{n} 2^j\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}2^i = \sum_{j=0}^{n} 6^j$$
$$= \frac{1}{5}\left(6^{n+1}-1\right).$$

13. $$\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{n}{j}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j = 3^n.$$

Correction de l'exercice .6 : [Énoncé]

1. $$\prod_{1\leqslant i,\,j\leqslant n} x^{i+j} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(x^i\times x^j) = \prod_{i=1}^{n}\left((x^i)^n\prod_{j=1}^{n}x^j\right) = \prod_{i=1}^{n}\left((x^i)^n\times x^{\sum_{j=1}^{n} j}\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{n}\left((x^i)^n\times x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right) = \left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x^i\right)^n = x^{\frac{n^2(n+1)}{2}}\times x^{\frac{n^2(n+1)}{2}}$$
$$= x^{n^2(n+1)}.$$

2. $$\prod_{1\leqslant i,\,j\leqslant n} ij = \prod_{1\leqslant i\leqslant n}\left(i^n\prod_{1\leqslant j\leqslant n} j\right) = (n!)^n\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n} i\right)^n = (n!)^n(n!)^n = (n!)^{2n}.$$

3. $$\prod_{1\leqslant i,\,j\leqslant n} i^j = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} i^j = \prod_{i=1}^{n} i^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = (n!)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\sqrt{n!}\right)^{n(n+1)}.$$

4. $$\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^{\frac{i}{j}} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j} 2^{\frac{i}{j}} = \prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{j} 2^i\right)^{\frac{1}{j}} = \prod_{j=1}^{n}\left(2^{\frac{j(j+1)}{2}}\right)^{\frac{1}{j}} = \prod_{j=1}^{n} 2^{\frac{(j+1)}{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^n\prod_{j=1}^{n}\left(\sqrt{2}\right)^j$$
$$= (\sqrt{2})^{\frac{n(n+3)}{2}}$$

5. $$\prod_{1\leqslant i,\,j\leqslant n}\frac{i}{j} = \prod_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\prod_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j}\right) = \prod_{1\leqslant i\leqslant n} i^n\left(\prod_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{1}{j}\right) = \prod_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{i^n}{n!}$$
$$= \frac{1}{(n!)^n}\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n} i\right)^n = \frac{(n!)^n}{(n!)^n} = 1.$$

6. $$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} i = \prod_{2\leqslant j\leqslant n}\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant j-1} i\right) = \prod_{2\leqslant j\leqslant n}(j-1)!$$
et $$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} j = \prod_{1\leqslant i\leqslant n-1}\left(\prod_{i+1\leqslant j\leqslant n} j\right) = \prod_{1\leqslant i\leqslant n-1}\frac{n!}{i!} = (n!)^{n-1}\prod_{1\leqslant i\leqslant n-1}\frac{1}{i!} = (n!)^{n-1}\prod_{2\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{(i-1)!}.$$
D'où, $$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{i}{j} = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} i}{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} j} = \frac{1}{(n!)^{n-1}}\left(\prod_{2\leqslant j\leqslant n}(j-1)!\right)^2.$$

Correction de l'exercice .7 : [Énoncé]

1. La fonction f est définie si, et seulement si $1+\dfrac{1}{x}>0$ donc
$$\mathcal{D}_f =]-\infty\,;-1[\cup]0\,;+\infty[.$$

2. On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{\mathrm{X}=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{\mathrm{X}\to 0}\dfrac{\ln(1+\mathrm{X})}{\mathrm{X}} = 1$ donc, d'après les théorèmes sur les limites de composées :
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e.$$
La courbe représentative de f admet donc une asymptote d'équation $y=e$.
De même, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{\mathrm{X}=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\mathrm{X})}{\mathrm{X}} = \lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty}\dfrac{\ln(\mathrm{X})}{\mathrm{X}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{X}}\right) = 0$.
D'après les théorèmes sur les limites de composées, on a donc :
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1.$$
On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0)=1$.

Enfin, $\lim\limits_{x\to-1^-} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{u=1+\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\ln u}{u-1} = +\infty$. Par composition, on a donc :

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty.$$

La courbe représentative de f admet donc une asymptote d'équation $x=-1$.

3. f est dérivable sur son ensemble de définition et on a :

$$f'(x) = \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

On ne peut donc pas conclure directement sur le signe de $f'(x)$.

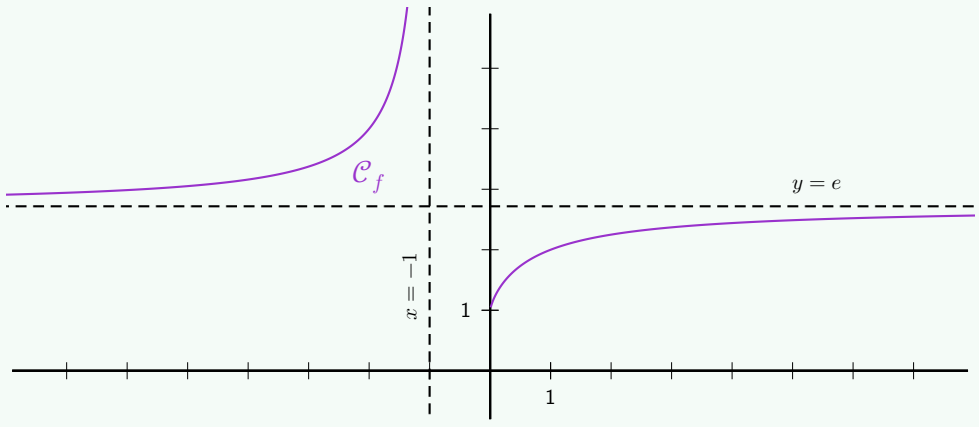
On pose alors $\varphi : x\longmapsto \varphi(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$ qui est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et où :

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}.$$

D'où le tableau de variation de f sur $\mathcal{D}_f$:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f	e	↗	$+\infty$ ||	↗	1	↗	e

On trace les deux asymptotes puis la courbe représentative :



Correction de l'exercice .8 : [Énoncé]

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.
   $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et, $\forall\, x\in\mathcal{D}_f$, $f(-x)=f(x)$ donc f est paire.
   On étudiera donc f seulement sur $\mathbb{R}_+^*$ et on complètera la courbe par symétrie d'axe celui des ordonnées.

2. D'après les théorèmes sur les limites de composées, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = +\infty$. La courbe de f admet donc l'axe des ordonnées comme asymptote.

3. $x \longmapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $x \longmapsto \ln|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   D'après les théorèmes généraux sur la dérivabilité, f est donc dérivable sur $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.
   Par symétrie, f est dérivable sur $\mathcal{D}_{f'} =]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;0[\cup]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.
   Regardons la limite du taux d'accroissement en 1 :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{|\ln|1+h||}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

   Pour $(-1<)h<0$, $1+h<1$ donc $\ln(1+h)<0$ et $|\ln(1+h)| = -\ln(1+h)$ d'où,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{|\ln|1+h||}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{-\ln(1+h)}{h} = -1.$$

   La fonction f n'est donc pas dérivable en 1. Sa courbe y admet deux demi-tangentes de coefficient directeur ± 1.
   Enfin,

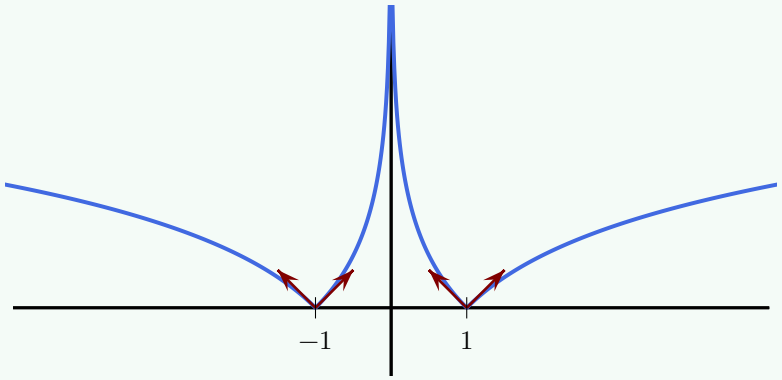
   a. $\forall\, x \in]1\,;+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1}{x}$. Donc, f est strictement croissante.

   b. $\forall\, x \in]0\,;1[,\ f'(x) = -\dfrac{1}{x}$. Donc, f est strictement décroissante.

   On en dédit la tableau de variation complet par symétrie :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	‖	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

4.



Correction de l'exercice .9 : [Énoncé]

1. La fonction $t \longmapsto t^2 - n + 2$ est croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right]$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir de $n = 1$.
2. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} - w_n = -n < 0$ donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_{n+1} - \mathrm{H}_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$ donc $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2}{3} < 1$ donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \neq 0$ à montrer par récurrence $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = n^2 + 1 \geqslant 1$ donc $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
6. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n \neq 0$ et $\dfrac{k_{n+1}}{k_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^n < 1$ donc $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
7. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $e_n \neq 0$ et $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = \dfrac{2}{n+1}$ donc $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir de $n = 1$.

Correction de l'exercice .10 : [Énoncé]

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $0 < v_0 = 1 < 3$ et, en supposant $0 < v_n < 3$, on a :

$$0 < 3 < 6 - v_n < 6 \implies \frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3} \implies 0 < \frac{3}{2} = \frac{9}{6} < v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n} < \frac{9}{3} = 3.$$

2. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{9}{6 - v_n} - v_n = \dfrac{9 - 6v_n + v_n^2}{6 - v_n} = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.
   D'après la question précédente, $6 - v_n > 0$ dont $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée donc elle converge vers une limite $\ell \leqslant 3$.

Correction de l'exercice .11 : [Énoncé]

— $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^3} \geqslant 0$.
Donc **la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.**

— $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)^3} + \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{-(n^2+3n+1)}{(n+1)^3 n^2} \leqslant 0$.
Donc **la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.**

— $v_n - u_n = \dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

Correction de l'exercice .12 : [Énoncé]

On montre ce résultat par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, $u_0 = -1 = 3^0 - 2^1 = 1 - 2 = -1$ et pour $n = 1$, $u_1 = -1 = 3^1 - 2^2$ donc la relation est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$, tel que $u_k = 3^k - 2^{k+1}$ et $u_{k+1} = 3^{k+1} - 2^{k+2}$ (et seulement pour ce k).

Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_{k+2} = 5u_{k+1} - 6u_k = 5(3^{k+1} - 2^{k+2}) - 2 \times 3(3^k - 2^{k+1})$
$= 3^{k+1}(5-2) - 2^{k+2}(5-3) = 3^{k+2} - 2^{k+3}$.

La relation est donc vraie pour $k+2$ et la propriété est héréditaire.

Étant initialisée à partir de $n = 0$, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 3^n - 2^{n+1}.$$

Correction de l'exercice .13 : [Énoncé]

Pour l'hérédité,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1} \leqslant n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2 = n^2 + 2(n-1)\frac{n-1}{n+1} \\ &\leqslant n^2 + 2(n-1) = n^2 + 2n + 1 - 3 \leqslant (n+1)^2. \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &= u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1} \leqslant n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2 \\ &= \frac{n^3+3n^2-4n+2}{n+1} \leqslant \frac{n^3+3n^2+3n+1}{n+1} = (n+1)^2. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice .14 : [Énoncé]

$$(\mathcal{S}_{??}) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 3z & + & t & = & 3 \\ x & - & 2y & + & 3z & - & t & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ & & y & + & z & - & t & = & -1 \\ & - & y & + & 2z & - & 2t & = & -2 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{3}(L_3+L_2)}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ & & y & + & z & - & t & = & -1 \\ & & & & z & - & t & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & & & + & 2t & = & 3 \\ & & y & & & & & = & 0 \\ & & & & z & - & t & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & & & + & 2t & = & 3 \\ & & y & & & & & = & 0 \\ & & & & z & - & t & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & = & 3 & - & 2t & & \\ y & = & 0 & & & & \\ z & = & -1 & + & t & & \\ t & = & & & t & & \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t. \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Pour bien faire apparaître le rôle des inconnues secondaires en tant que paramètre, on notera plutôt les solutions sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda. \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{K}.$$

D'un point de vue matriciel, $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$.

Correction de l'exercice .15 : [Énoncé]

$$(\mathcal{S}_{??}) : \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ x + z + t = 3 \\ y + t = -1 \\ x + y + z + 2t = 2 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}(L_1 - L_2) \\ L_4 \leftarrow L_1 - L_4}}{\iff} \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ y + t = -1 \\ y + t = -1 \\ y + t = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ y + t = -1 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\iff} \begin{cases} x + z + t = 3 \\ y + t = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 3 - z - t \\ y = -1 - t \\ z = z \\ t = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda . \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu . \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ (\lambda ; \mu) \in \mathbb{K}^2.$$

D'un point de vue matriciel, $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Correction de l'exercice .16 : [Énoncé]

$$\begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ x + z + t = 3 \\ y + t = -1 \\ x + y + z + 2t = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ y + t = -1 \\ y + t = -1 \\ y + t = -1 \end{cases} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\ \\ L_4 \leftarrow L_1 - L_4 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 1 \\ y + t = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + z + t = 3 \\ y + t = -1 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\iff \begin{cases} x = 3 - z - t \\ y = -1 - t \\ z = z \\ t = t \end{cases} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des quadruplets $\begin{pmatrix} 3 - \lambda - \mu \\ -1 - \mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Remarque : Le choix des inconnues, dites *principales*, n'est pas fixé. On aurait très bien pu prendre y et z par exemple pour obtenir :

$$\begin{cases} y = -1 - t \\ z = 3 - x - t \end{cases}$$

On trouve alors un système des solutions équivalents au précédent et défini par :

$$(0, -1, 0, 3) + \text{Vect}\left((1, 0, -1, 0), (0, -1, -1, 1)\right).$$

Correction de l'exercice .17 : [Énoncé]

1. a. $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.
   La matrice B est donc nilpotente d'indice 3.

   b. Les matrices B et I_3 commutent donc le binôme de Newton s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}^n = (\mathrm{B}+\mathrm{I}_3)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{B}^k = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \mathrm{B}^k \\ &= \mathrm{I}_3 + n\mathrm{B} + \frac{n(n-1)}{2}\mathrm{B}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. **Première méthode :** Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   Deuxième méthode : On a $\mathrm{A} = \mathrm{I}_3 + \mathrm{J}$ où $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{J}^2 = 0$.

   Donc $\mathrm{A}^n = (\mathrm{J}+\mathrm{I}_3)^n = \mathrm{I}_3 + n\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & n & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice .18 : [Énoncé]

1. en tout :
   $26^3 = 17\,576$
2. deux à deux distinctes :
   $\mathrm{A}_{26}^3 = 26 \times 25 \times 24 = 15\,600$
3. ayant exactement deux lettres identiques :
   - 26 choix pour la lettre double ;
   - 25 choix pour la lettre simple ;
   - 3 choix de position pour la lettre simple.

   $26 \times 25 \times 3 = 1\,950$
4. commençant par une voyelle et finissant par une consonne :
   - 6 choix pour la première lettre ;
   - 26 choix pour la deuxième lettre ;
   - 20 choix pour la troisième lettre.

   $6 \times 26 \times 20 = 3\,120$
5. contenant au moins deux voyelles distinctes et une consonne :
   - $\binom{6}{2}$ choix pour les deux voyelles distinctes ;

— 20 choix la consonne ;

— Pour chacun de ces choix, 3! permutations.

$\binom{6}{2} \times 20 \times 3! = 15 \times 20 \times 6 = 1\,800$

6. contenant deux consonnes identiques et une voyelle :

— 20 choix pour la consonne doublée ;

— 6 choix la voyelle ;

— Pour chacun de ces choix, 3 possibilités de placer la voyelle.

$20 \times 6 \times 3! = 15 \times 20 \times 3 = 360$

7. contenant **au moins** une consonne :
Comptons les mots n'ayant aucune consonne : 6^3
Les autres sont ceux ayant au moins une consonne.
Il y en a : $26^3 - 6^3 = 17\,360$

8. contenant **au moins** une consonne et une voyelle.
Il y a

— $20^3 = 8000$ mots n'ayant que des consonnes ;

— $6^3 = 216$ mots n'ayant que des voyelles ;

Aucun n'a été compté deux fois. Tous les autres ont au moins une consonne et une voyelle.
Il y en a : $26^3 - 20^3 - 6^3 = 9\,360$

Correction de l'exercice .19 : [Énoncé]

1. On note chaque domino par un nombre à deux chiffres, ou le plus petit numéro figure en premier. Par exemple, 00 ou 35 ou 66.
Il y a :

— 7 dominos avec un "blanc" en premier : 00 à 06 ;

— 6 dominos avec un 1 en premier : 11 à 16 ;

— ...

— 1 dominos avec un 6 en premier : 66.

Au total, il y a $1 + 2 + \cdots + 7 = \dfrac{7 \times 8}{2} = 28$ dominos.
Le jeu de dominos

00	01	02	03	04	05	06
	11	12	13	14	15	16
		22	23	24	25	26
			33	34	35	36
				44	45	46
					55	56
						66

2. Imaginons qu'on décompose l'expérience en deux étapes : on tire un premier domino, et ensuite un second (sans avoir remis le premier). On peut donc attribuer un ordre aux dominos tirés. Par exemple, on tire le 04 puis le 15. On note l'issue correspondant $04 \cdot 15$ L'univers est alors

$$\Omega = \{00 \cdot 01, \cdots, 66 \cdot 56\}$$

	00	01	$\cdots$	56	66
00	x	$00 \cdot 01$		$00 \cdot 56$	$00 \cdot 66$
01	$01 \cdot 00$	x		$01 \cdot 56$	$01 \cdot 66$
$\vdots$					
56	$56 \cdot 00$	$56 \cdot 01$		x	$56 \cdot 66$
66	$66 \cdot 00$	$66 \cdot 01$		$66 \cdot 56$	x

On suppose qu'il y a équiprobabilité sur Ω d'où $\operatorname{card}\Omega = 28 \times 27 = 756$.
On note :

— F:« les deux dominos tirés ont une face commune »

— D_1:« le premier domino tiré est un double »

On a $\mathrm{F} = \mathrm{F} \cap (\mathrm{D}_1 \sqcup \overline{\mathrm{D}}_1) = (\mathrm{F} \cap \mathrm{D}_1) \sqcup (\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{D}}_1)$.
Donc,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{F}) &= \mathrm{P}\left((\mathrm{F} \cap \mathrm{D}_1) \sqcup (\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{D}}_1)\right)\\ &= \mathrm{P}(\mathrm{F} \cap \mathrm{D}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{D}}_1)\\ &= \mathrm{P}(\mathrm{D}_1)\mathrm{P}_{\mathrm{D}_1}(\mathrm{F}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{D}}_1)\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{D}}_1}(\mathrm{F}).\end{aligned}$$

Or,

- $\mathrm{P}(\mathrm{D}_1) = \dfrac{\operatorname{card}\mathrm{D}_1}{\operatorname{card}\Omega} = \dfrac{7 \times 27}{28 \times 27} = \dfrac{1}{4}$.
- $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{D}}_1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{D}_1) = \dfrac{3}{4}$.
- $\mathrm{P}_{\mathrm{D}_1}(\mathrm{F}) = \dfrac{6 \times 7}{27 \times 7} = \dfrac{6}{27}$
- $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{D}}_1}(\mathrm{F}) = \dfrac{12 \times 7}{27 \times 7} = \dfrac{12}{27}$

D'où

$$\mathrm{P}(\mathrm{F}) = \frac{1}{4} \times \frac{6}{27} + \frac{3}{4} \times \frac{12}{27} = \frac{7}{18}.$$

Correction de l'exercice .20 : [Énoncé]

1. $\dfrac{x^2 + 2|x|}{x} = x + 2\dfrac{|x|}{x}$. Si $x > 0$ cette expression vaut $x + 2$ donc la limite à droite en $x = 0$ est $+2$. Si $x < 0$ l'expression vaut -2 donc la limite à gauche en $x = 0$ est -2. Les limites à droite et à gauche sont différentes donc il n'y a pas de limite en $x = 0$.
2. $\dfrac{x^2 + 2|x|}{x} = x + 2\dfrac{|x|}{x} = x - 2$ pour $x < 0$. Donc la limite quand $x \to -\infty$ est $-\infty$.
3. $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3\,x + 2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{x+2}{x-1}$, lorsque $x \to 2$ cette expression tend vers 4.
4. $\dfrac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)} = \dfrac{1 - \cos^2(x)}{1 + \cos(x)} = \dfrac{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))}{1 + \cos(x)} = 1 - \cos(x)$. Lorsque $x \to \pi$ la limite est donc 2.

5. $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} \times \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1+x-(1+x^2)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}.$
$$= \frac{x-x^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}.$$
Lorsque $x \to 0$ la limite vaut $\dfrac{1}{2}$.

6. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} = \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}\right) \times \dfrac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \dfrac{x+5-(x-3)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \dfrac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}.$
Lorsque $x \to +\infty$, la limite vaut 0.

7. Nous avons l'égalité $a^3-1 = (a-1)(1+a+a^2)$. Pour $a = \sqrt[3]{1+x^2}$ cela donne :
$$\frac{a-1}{x^2} = \frac{a^3-1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1+x^2-1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1}{1+a+a^2}.$$
Lors que $x \to 0$, alors $a \to 1$ et la limite cherchée est $\dfrac{1}{3}$.
Autre méthode : si l'on sait que la limite d'un taux d'accroissement correspond à la dérivée nous avons une méthode moins astucieuse. Rappel (ou anticipation sur un prochain chapitre) : pour une fonction f dérivable en a alors
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$
Pour la fonction $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ ayant $f'(x) = \dfrac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$ cela donne en $a=0$:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \frac{1}{3}.$$

8. $\dfrac{x^n-1}{x-1} = 1+x+x^2+\cdots+x^n$. Donc si $x \to 1$ la limite de $\dfrac{x^n-1}{x-1}$ est n. Donc la limite de $\dfrac{x-1}{x^n-1}$ en 1 est $\dfrac{1}{n}$.
La méthode avec le taux d'accroissement fonctionne aussi très bien ici. Soit $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$ et $a = 1$. Alors $\dfrac{x^n-1}{x-1} = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ tend vers $f'(1) = n$.

9. Montrons d'abord que la limite de
$$f(x) = \frac{x^k-\alpha^k}{x-\alpha}$$
en α est $k\alpha^{k-1}$, k étant un entier fixé. Un calcul montre que $f(x) = x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \alpha^2 x^{k-3} + \cdots + \alpha^{k-1}$; en effet $(x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \alpha^2 x^{k-3} + \cdots + \alpha^{k-1})(x-\alpha) = x^k - \alpha^k$. Donc la limite en $x = \alpha$ est $k\alpha^{k-1}$. Une autre méthode consiste à dire que $f(x)$ est la taux d'accroissement de la fonction x^k, et donc la limite de f en α est exactement la valeur de la dérivée de x^k en α, soit $k\alpha^{k-1}$. Ayant fait ceci revenons à la limite de l'exercice : comme
$$\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n} = \frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x-\alpha} \times \frac{x-\alpha}{x^n-\alpha^n}.$$
Le premier terme du produit tend vers $(n+1)\alpha^n$ et le second terme, étant l'inverse d'un taux d'accroissement, tend vers $1/(n\alpha^{n-1})$. Donc la limite cherchée est
$$\frac{(n+1)\alpha^n}{n\alpha^{n-1}} = \frac{n+1}{n}\alpha.$$

10. La fonction $f(x) = \dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin(x)(\cos(2x)-\cos(x))}$ s'écrit aussi $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{\cos(x)(\cos(2x)-\cos(x))}$.

Or $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. Posons $u = \cos(x)$, alors

$$f(x) = \frac{1-u}{u(2u^2-u-1)} = \frac{1-u}{u(1-u)(-1-2u)} = \frac{1}{u(-1-2u)}$$

Lorsque x tend vers 0, $u = \cos(x)$ tend vers 1, et donc $f(x)$ tend vers $-\frac{1}{3}$.

11.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} &= \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}} + 1}\end{aligned}$$

Quand $x \to +\infty$ alors $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ et $\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}} \to 0$, donc la limite recherchée est $\frac{1}{2}$.

12. La fonction s'écrit

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x+\alpha}} = \frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}} - 1}{\sqrt{x+\alpha}}.$$

Notons $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}$ alors à l'aide de l'expression conjuguée

$$g(x) = \frac{x-\alpha}{(\sqrt{x-\alpha})(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})} = \frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}.$$

Donc $g(x)$ tend vers 0 quand $x \to \alpha^+$. Et maintenant $f(x) = \dfrac{g(x)-1}{\sqrt{x+\alpha}}$ tend vers $-\dfrac{1}{\sqrt{2\alpha}}$.

13. Pour tout réel y nous avons la double inégalité $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leqslant y$. Donc pour $y > 0$, $\dfrac{y-1}{y} < \dfrac{\lfloor y \rfloor}{y} \leqslant 1$.

On en déduit que lorsque y tend vers $+\infty$ alors $\dfrac{\lfloor y \rfloor}{y}$ tend 1.

On obtient le même résultat quand y tend vers $-\infty$.

En posant $y = 1/x$, et en faisant tendre x vers 0, alors $x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \dfrac{\lfloor y \rfloor}{y}$ tend vers 1.

14.

$$\frac{e^x - e^2}{x^2+x-6} = \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{1}{x+3}.$$

La limite de $\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$ en 2 vaut e^2 ($\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$ est le taux d'accroissement de la fonction $x \longmapsto e^x$ en la valeur $x = 2$), la limite voulue est $\dfrac{e^2}{5}$.

15. Soit $f(x) = \dfrac{x^4}{1+x^\alpha \sin^2 x}$. Supposons $\alpha \geqslant 4$, alors on prouve que f n'a pas de limite en $+\infty$.
En effet pour pour $u_k = 2k\pi$, $f(2k\pi) = (2k\pi)^4$ tend vers $+\infty$ lorsque k (et donc u_k) tend vers $+\infty$. Cependant pour $v_k = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $f(v_k) = \dfrac{v_k^4}{1+v_k^\alpha}$ tend vers 0 (ou vers 1 si $\alpha = 4$) lorsque k (et donc v_k) tend vers $+\infty$. Ceci prouve que $f(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.
Reste le cas $\alpha < 4$. Il existe β tel que $\alpha < \beta < 4$.

$$f(x) = \frac{x^4}{1+x^\alpha \sin^2(x)} = \frac{x^{4-\beta}}{\frac{1}{x^\beta} + \frac{x^\alpha}{x^\beta}\sin^2(x)}.$$

Le numérateur tend $+\infty$ car $4-\beta > 0$. $\dfrac{1}{x^\beta}$ tend vers 0 ainsi que $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta}\sin^2(x)$ (car $\beta > \alpha$ et $\sin^2(x)$ est bornée par 1).
Donc le dénominateur tend vers 0 par valeurs positives. La limite vaut donc $+\infty$.

16. $\lim\limits_{x\to\pi} 1+\cos(x) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to\pi} \sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to\pi} \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice .21 : [Énoncé]

La fonction $\varphi : x \longmapsto \tan(x) - x$ est dérivable sur $\left]\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right[$ avec, $\forall\, x \in \left]\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right[$, $\varphi'(x) = \tan^2(x) > 0$ donc elle y est strictement croissante.

Continue, elle y établit donc une bijection entre $\left]\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right[$ et $f\left(\left]\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right[\right) =]-\pi\,;+\infty[$ qui contient 0.

L'équation $\varphi(x) = 0$ admet donc une unique solution α telle que $\tan(\alpha) = \alpha$.

Par dichotomie, on trouve $4,49 < \alpha < 4,5$.

Correction de l'exercice .22 : [Énoncé]

Le résultat qui va nous fournir l'existence du minimum est le théorème des bornes atteintes. C'est le fait que f admet des limites en $\pm\infty$ valant $+\infty$ qui va nous permettre de nous ramener à un segment.

Pour cela, on commence par traduire avec des quantificateurs les propriétés sur les limites :

$$\forall\, \mathrm{A} > 0,\ \exists\, \mathrm{M}_1 > 0,\ \forall\, x \geqslant \mathrm{M}_1,\ f(x) \geqslant \mathrm{A}.$$
$$\forall\, \mathrm{A} > 0,\ \exists\, \mathrm{M}_2 < 0,\ \forall\, x \leqslant \mathrm{M}_2,\ f(x) \geqslant \mathrm{A}.$$

On espère alors appliquer le théorème précédent dans l'intervalle $[\mathrm{M}_2\,;\mathrm{M}_1]$. Il y a encore deux problèmes à régler, qui ne sont pas indépendants :

— On doit être sûr que le minimum de f est effectivement atteint dans l'intervalle $[\mathrm{M}_2\,;\mathrm{M}_1]$,

— et il faut donner une valeur à A pour avoir effectivement des valeurs de M_1 et M_2.

On choisit par exemple $\mathrm{A} = f(0)$. Pour cette valeur de A, la définition de la limite donne les réels M_1 et M_2.

La fonction f est continue sur $[\mathrm{M}_2\,;\mathrm{M}_1]$ donc il existe donc $x_0 \in [\mathrm{M}_2\,;\mathrm{M}_1]$ tel que, pour tout $x \in [\mathrm{M}_2\,;\mathrm{M}_1]$, on ait $f(x) \geqslant f(x_0)$ d'après le théorème des bornes atteintes.

D'autre part, si $x > \mathrm{M}_1$ ou si $x < \mathrm{M}_2$, on a $f(x) \geqslant \mathrm{A} = f(0) \geqslant f(x_0)$.

En conclusion, f atteint bien son minimum en x_0.

Correction de l'exercice .23 : [Énoncé]

1. Sur $]0\,;1[$, la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x-1}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$ est dérivable et on a :

$$\forall\, x \in]0\,;1[\,,\ f'(x) = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) < 0.$$

La fonction f est donc continue et strictement décroissante sur $]0\,;1[$. D'après le théorème du même nom, elle établit une bijection de $]0\,;1[$ sur son image.
Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty$, f réalise une bijection de $]0\,;1[$ dans $\mathbb{R}$.

2. Comme f est continue et strictement monotone sur l'intervalle $]0\,;1[$, sa réciproque l'est également sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right) = f^{-1}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\right) = f^{-1}(0).$$

Or, $f(x) = 0 \iff \dfrac{2x-1}{x(x-1)} = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$.
Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Correction de l'exercice .24 : [Énoncé]

On note G_i l'événement : « La $i^{\text{ème}}$ personne à descendre est un garçon » et on s'intéresse à l'événement $\mathrm{G}_1 \cap \mathrm{G}_2 \cap \mathrm{G}_3 \cap \overline{\mathrm{G}}_4$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{G}_1 \cap \mathrm{G}_2 \cap \mathrm{G}_3 \cap \overline{\mathrm{G}}_4) &= \mathbf{P}(\mathrm{G}_1) \times \mathbf{P}_{\mathrm{G}_1}(\mathrm{G}_2) \times \mathbf{P}_{\mathrm{G}_1\cap\mathrm{G}_2}(\mathrm{G}_3) \times \mathbf{P}_{\mathrm{G}_1\cap\mathrm{G}_2\cap\mathrm{G}_3}(\overline{\mathrm{G}}_4)\\ &= \frac{10}{25} \times \frac{9}{24} \times \frac{8}{23} \times \frac{15}{22}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice .25 : [Énoncé]

Notons P_1, P_2 et P_3 les portes, P_1 celle que le candidat a choisie.

On note V_i l'événement « la voiture est derrière la porte i » et O_i l'événement « le présentateur a ouvert la porte i ».

On a :

- $\mathbf{P}_{\mathrm{V}_1}(\mathrm{O}_2) = \mathbf{P}_{\mathrm{V}_1}(\mathrm{O}_3) = \dfrac{1}{2}$,
- $\mathbf{P}_{\mathrm{V}_2}(\mathrm{O}_2) = \mathbf{P}_{\mathrm{V}_3}(\mathrm{O}_3) = 0$,
- $\mathbf{P}_{\mathrm{V}_3}(\mathrm{O}_2) = \mathbf{P}_{\mathrm{V}_2}(\mathrm{O}_3) = 1$.

Ainsi, la probabilité que la voiture soit derrière la porte 3 sachant que le présentateur a ouvert la porte 2 est

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\mathrm{O}_2}(\mathrm{V}_3) &= \frac{\mathbf{P}(\mathrm{V}_3)}{\mathbf{P}(\mathrm{O}_2)}\,\mathbf{P}_{\mathrm{V}_3}(\mathrm{O}_2) = \frac{\mathbf{P}(\mathrm{V}_3)}{\sum\limits_{i=1}^{3}\mathbf{P}(\mathrm{O}_2\cap\mathrm{V}_i)}\,\mathbf{P}_{\mathrm{V}_3}(\mathrm{O}_2) = \frac{\mathbf{P}(\mathrm{V}_3)}{\sum\limits_{i=1}^{3}\mathbf{P}(\mathrm{V}_i)\mathbf{P}_{\mathrm{V}_i}(\mathrm{O}_2)}\,\mathbf{P}_{\mathrm{V}_3}(\mathrm{O}_2)\\ &= \frac{\mathbf{P}(\mathrm{V}_3)}{\mathbf{P}_{\mathrm{V}_1}(\mathrm{O}_2)\mathbf{P}(\mathrm{V}_1) + \cancel{\mathbf{P}_{\mathrm{V}_2}(\mathrm{O}_2)} + \mathbf{P}(\mathrm{V}_2) + \mathbf{P}_{\mathrm{V}_3}(\mathrm{O}_2)\mathbf{P}(\mathrm{V}_3)}\,\mathbf{P}_{\mathrm{V}_3}(\mathrm{O}_2)\\ &= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} \times 1 = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Il est donc plus favorable que le candidat change son choix.

Correction de l'exercice .26 : [Énoncé]

1. Il suffit de remarquer que $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0$ et de développer cette inégalité.

2. On remarque d'abord que les suites sont bien définies (en particulier, elles sont toujours positives). L'inégalité $u_n \geqslant v_n$ est une conséquence immédiate de la question précédente, avec $x = u_{n-1}$ et $y = v_{n-1}$.
   De plus, on a :
   $$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leqslant \frac{u_n + u_n}{2} \leqslant u_n.$$
   De même,
   $$v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geqslant \sqrt{v_n^2} = v_n.$$

3. On sait déjà que $u_{n+1} - v_{n+1} \geqslant 0$. De plus,
   $$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2}.$$
   Puisque $0 \leqslant v_n \leqslant u_n$ et par croissance de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$, on a $\sqrt{u_n v_n} \geqslant v_n$. On en déduit que
   $$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{u_n + v_n - 2v_n}{2} = \frac{1}{2}(u_n - v_n).$$

4. De la relation précédente, on déduit par une récurrence immédiate que, pour tout entier naturel n, on a
   $$0 \leqslant u_n - v_n \leqslant \frac{1}{2^n}(u_0 - v_0).$$
   Ainsi, $(u_n - v_n)$ converge vers 0.
   On en déduit que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes : elles convergent vers la même limite !

5. L'algorithme calcule les termes successifs des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'à ce que $u_n - v_n <$`ecart`.
   Par rapport à la définition des suites de l'exercice, on prend juste garde à ce qu'on est toujours $u_n \geqslant v_n$, même au premier rang et on doit faire intervenir une variable supplémentaire pour le calcul successif des termes des suites (car on a une récurrence croisée).
   Codé sous Python, ceci donne :

```
Éditeur
1  def moyenne(a,b,ecart):
2    u=a
3    v=b
4    while ((u-v)>ecart) :
5        w=u
6        u=(u+v)/2
7        v=math.sqrt(w*v)
8    return u,v
```

Correction de l'exercice .27 : [Énoncé]

1. Il est connu que $\forall\, t \in \mathbb{R}_+,\ \sin(t) \leqslant t$.
   Par croissance de l'intégrale, on obtient alors successivement :
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x \sin(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t\,\mathrm{d}t \implies 1 - \cos(x) \leqslant \frac{x^2}{2}.$$
   Puis,
   $$\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^x 1 - \frac{t^2}{2}\,\mathrm{d}t \implies \sin(x) \geqslant x - \frac{x^3}{6}.$$
   En conclusion, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

2. D'après les théorèmes généraux et de croissances comparées en 0, la fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   Le taux d'accroissement de f dans un voisinage de 0 privé de celui-ci, s'écrit $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{\sin(x)-x}{x^2}$.
   Or, d'après la question précédente, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{x}{6} \leqslant \dfrac{\sin(x)-x}{x^2} \leqslant 0$.
   D'après le théorème d'encadrement, f est donc dérivable en 0 par valeurs supérieures de nombre dérivé 0.
   Si $x \in \mathbb{R}_-^*$, alors $-x \in \mathbb{R}_+^*$ et on a encore $\dfrac{-x}{6} \leqslant \dfrac{\sin(-x)+x}{x^2} \leqslant 0 \iff 0 \leqslant \dfrac{\sin(x)-x}{x^2} \leqslant \dfrac{x}{6}$.
   Le même raisonnement entraine que f est également dérivable en 0 par valeurs inférieures de même nombre dérivé donc elle l'est en 0 puis sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Correction de l'exercice .28 : [Énoncé]

1. En ordonnant les sommets dans l'ordre $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F})$, on obtient
$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. a. On sait que le coefficient (i,j) de M^2 est égal au nombre de chaînes de longueur 2 reliant le sommet i au sommet j.
   Le coefficient situé à la deuxième ligne et à la quatrième colonne vaut
   $$(\mathrm{M}^2)_{2,4} = 4.$$
   Il existe donc 4 chaînes de longueur 2 reliant B à D.
   Les sommets adjacents à la fois à B et à D sont A, C, E et F. Les quatre chaînes recherchées sont donc
   $$\mathrm{B}-\mathrm{A}-\mathrm{D}, \qquad \mathrm{B}-\mathrm{C}-\mathrm{D}, \qquad \mathrm{B}-\mathrm{E}-\mathrm{D} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}-\mathrm{F}-\mathrm{D}.$$

   b. Depuis le sommet A, on peut atteindre directement les sommets B, C et D.
   Puis, à partir de B, on peut atteindre les sommets E et F.
   Ainsi tous les sommets du graphe sont accessibles depuis A.
   Le graphe $\mathcal{G}$ est donc connexe.

3. Calculons les degrés des sommets :
   $$\deg(\mathrm{A}) = 3, \qquad \deg(\mathrm{B}) = 4, \qquad \deg(\mathrm{C}) = 4,$$
   $$\deg(\mathrm{D}) = 4, \qquad \deg(\mathrm{E}) = 4, \qquad \deg(\mathrm{F}) = 3.$$
   Le graphe est connexe et possède exactement deux sommets de degré impair : A et F.
   D'après le théorème d'Euler, il possède donc une chaîne eulérienne.
   Par exemple : $\mathrm{A}-\mathrm{B}-\mathrm{C}-\mathrm{A}-\mathrm{D}-\mathrm{C}-\mathrm{E}-\mathrm{B}-\mathrm{F}-\mathrm{D}-\mathrm{E}-\mathrm{F}$.
   Cette chaîne parcourt chaque arête exactement une fois.

4. Un graphe connexe possède un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.
   Or $\deg(\mathrm{A}) = 3$ et $\deg(\mathrm{F}) = 3$.
   Donc le graphe ne possède pas de cycle eulérien.

Il suffit d'ajouter l'arête AF pour obtenir

$$\deg(\mathrm{A}) = 4 \quad \text{et} \quad \deg(\mathrm{F}) = 4.$$

Tous les sommets ont alors un degré pair et le graphe obtenu possède un cycle eulérien.

5. Pour chaque sommet $\mathrm{S}[i]$, le programme parcourt la ligne i de la matrice d'adjacence.
   Lorsque $\mathrm{M}_{i,j} = 1$, cela signifie que les sommets $\mathrm{S}[i]$ et $\mathrm{S}[j]$ sont adjacents ; le sommet $\mathrm{S}[j]$ est alors ajouté à la liste des voisins de $\mathrm{S}[i]$.
   La fonction renvoie donc la *liste d'adjacence* du graphe.
   Dans le cas du graphe $\mathcal{G}$, elle renvoie :

```
Éditeur
1 [['B','C','D'],
2  ['A','C','E','F'],
3  ['A','B','D','E'],
4  ['A','C','E','F'],
5  ['B','C','D','F'],
6  ['B','D','E']]
```

   Chaque sous-liste contient les voisins du sommet correspondant.

Correction de l'exercice .29 : [Énoncé]

Notons V_k l'événement : « I_k apprend l'information initiale correcte », et $\overline{\mathrm{V}_k}$ l'événement contraire.

Par la formule des probabilités totales :

$$\mathrm{P}(\mathrm{V}_{k+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{V}_{k+1}|\mathrm{V}_k)\mathrm{P}(\mathrm{V}_k) + \mathrm{P}(\mathrm{V}_{k+1}|\overline{\mathrm{V}_k})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{V}_k}).$$

Comme $\mathrm{P}(\mathrm{V}_{k+1}|\mathrm{V}_k)\mathrm{P}(\mathrm{V}_k) = p$ et $\mathrm{P}(\mathrm{V}_{k+1}|\overline{\mathrm{V}_k}) = 1-p$, on obtient :

$$\mathrm{P}(\mathrm{V}_{k+1}) = (2p-1)\mathrm{P}(\mathrm{V}_k) + (1-p).$$

La suite $(p_n = \mathrm{P}(\mathrm{V}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. On cherche le point fixe qui est $\frac{1}{2}$. D'où :

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= (2p-1)p_k + (1-p) \\ \frac{1}{2} &= (2p-1)\frac{1}{2} + (1-p) \\ p_{k+1} - \frac{1}{2} &= (2p-1)\left(p_k - \frac{1}{2}\right) \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ p_n &= (2p-1)^n\left(p_0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Or, I_0 a l'information donc $p_0 = 1$. Finalement :

$$p_n = \frac{1}{2}(2p-1)^n + \frac{1}{2}.$$

Remarque : Comme $0 < p < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice .30 : [Énoncé]

1. Soit $k \geqslant 2$. Pour que les deux boîtes soient non vides exactement au tour k, il y a deux possibilités,
   — soit les $k-1$ premières boules vont toutes dans l'urne U et la k-ième boule va dans l'urne V,

— soit les $k-1$ premières boules vont toutes dans l'urne V et la k-ième boule va dans l'urne U.

Cela revient à dire que

$$\mathrm{A}_k = (\mathrm{U}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{U}_{k-1} \cap \mathrm{V}_k) \cup (\mathrm{V}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{V}_{k-1} \cap \mathrm{U}_k)\,.$$

Comme l'union est disjointe, on obtient

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}_k) = \mathbf{P}(\mathrm{U}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{U}_{k-1} \cap \mathrm{V}_k) + \mathbf{P}(\mathrm{V}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{V}_{k-1} \cap \mathrm{U}_k)\,.$$

Or les boules sont placées indépendamment les unes des autres ce qui veut dire que les évènements $(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_{k-1}, \mathrm{V}_k)$ sont mutuellement indépendants.
De plus, les boîtes sont choisies de manière uniforme donc

$$\mathbf{P}(\mathrm{U}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{U}_{k-1} \cap \mathrm{V}_k) = \mathbf{P}(\mathrm{U}_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(\mathrm{U}_{k-1}) \times \mathbf{P}(\mathrm{V}) = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

De même, on obtient que

$$\mathbf{P}(\mathrm{V}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{V}_{k-1} \cap \mathrm{U}_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Donc, finalement,

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}_k) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

2. Notons A l'évènement « Les deux boîtes sont non vides ». Alors, on peut remarquer que

$$\mathrm{A} = \bigcup_{k=2}^{+\infty} \mathrm{A}_k.$$

Or, les évènements $(\mathrm{A}_k)_{k\geqslant 2}$ sont deux à deux incompatibles donc par σ-additivité, la série $\sum \mathrm{P}(\mathrm{A}_k)$ converge et

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{A}_k) = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Donc $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = 1$, c'est-à-dire l'évènement A est quasi-certain.

Correction de l'exercice .31 : [Énoncé]

1. Montrons que $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \dfrac{1}{n}$.

En utilisant le développement limité de $\ln(1+x)$ en 0, on a : $\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

De là on tire que $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}} \times \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n}$.

Par équivalence, la série de terme général $n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ est donc divergente.

2. Montrons que $n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} \sim n^{-1}$.

On a $\dfrac{n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{n^{-1}} = n^{-\frac{1}{n}} = e^{-\frac{\ln n}{n}}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{\ln n}{n}} = 1$ et l'équivalence.

La série de terme général $n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ est donc divergente car la série harmonique est divergente.

3. On sait que : $\ln(e^n - 1) \leqslant \ln e^n = n$.

De plus, $\ln n \geqslant 1$ pour n assez grand, par conséquent $\dfrac{\ln n}{\ln(e^n-1)} \geqslant \dfrac{1}{n}$.

On conclut par comparaison des termes généraux de signe positif que la série $\sum \dfrac{\ln n}{\ln\left(e^n-1\right)}$ est divergente.

4. $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1-\dfrac{1}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} e-e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e\left(1-1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2n} > 0.$$

La série de terme général $\dfrac{e}{2n}$ diverge et la série de terme général u_n diverge.

5. $\sim \dfrac{\alpha}{2^{\alpha-1}}\left(e^{\alpha-2}\right)^n \implies$ CV ssi $\alpha < 2$.
6. $\sim -\dfrac{3}{n^2} \implies$ CV.
7. $\sim \dfrac{1}{n^2} \implies$ CV.
8. $\sim \sqrt{\dfrac{2}{n^3}} \implies$ CV.
9. CV si, et seulement si $|a| \neq 1$.
10. $\leqslant \dfrac{(n-1)(n-1)!+n!}{(n+2)!} \leqslant \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.
Donc CV.

11. Pour $n \geqslant 4$, $\dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{2}{n}\times\dfrac{3}{n}\times\underbrace{\dfrac{4}{n}\times\cdots\times\dfrac{n}{n}}_{\leqslant 1} \leqslant \dfrac{6}{n^2}$.
Or, $\sum \dfrac{6}{n^2}$ est convergente.
Donc $\sum \dfrac{n!}{n^n}$ est aussi convergente par comparaison.

12. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$. $\forall n \geqslant 1$, u_n existe

$$u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{1}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\left(\frac{1}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$, converge (série de Riemann d'exposant $\alpha > 1$), la série de terme général u_n converge.

13. Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$. $\forall n \geqslant 2$, u_n existe et de plus $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 2$, diverge et est positive, la série de terme général u_n diverge.

14. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$. Pour $n \geqslant 1$, $u_n > 0$ et

$$\ln(u_n) = \ln(n)\ln\left(\frac{n+3}{2n+1}\right) = \ln(n)\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)\left(-\ln 2+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\ln 2\ln(n)+o(1).$$

Donc $u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\ln 2\ln n} = \dfrac{1}{n^{\ln 2}}$.
Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^{\ln 2}}$, $n \geqslant 1$, diverge (série de Riemann d'exposant $\alpha \leqslant 1$) et est positive, la série de terme général u_n diverge.

15. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{n^2}{(n-1)!}$. u_n existe et $u_n \neq 0$ pour $n \geqslant 1$.

    De plus,

    $$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n+1)^2}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 < 1.$$

    D'après la règle de d'ALEMBERT, la série de terme général u_n converge.

16. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \times n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}} = 0$ donc $n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ ...

17. Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)\ln(\mathrm{ch}\, n)}$. Pour tout $n \geqslant 2$, u_n existe.

    De plus, $\ln(\mathrm{ch}\, n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\dfrac{e^n}{2}\right) = n - \ln 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln(n)} > 0$.

    Or, la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln n}$, $n \geqslant 2$, diverge.

    Donc u_n est positif et équivalent au terme général d'une série divergente.

    La série de terme général u_n diverge.

18. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{n^2 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

    Pour $n \geqslant 1$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{\cos^2 x}{n^2 + \cos^2 x}$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et positive et donc, u_n existe et est positif.

    De plus, pour $n \geqslant 1$,

    $$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{1}{n^2+0}\,dx = \frac{\pi}{2n^2}.$$

    La série de terme général $\dfrac{\pi}{2n^2}$ converge et donc la série de terme général u_n aussi.

19. Pour $n \geqslant 2$, posons $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\mathrm{S}(n)$. Pour $n \geqslant 2$,

    $$0 < \mathrm{S}(n+1) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p} \times \frac{1}{p^n} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{2}\mathrm{S}(n)$$

    et donc $\forall n \geqslant 2$, $\mathrm{S}(n) \leqslant \dfrac{\mathrm{S}(2)}{2^{n-2}}$. Par suite,

    $$u_n \leqslant \frac{1}{n^\alpha}\frac{\mathrm{S}(2)}{2^{n-2}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

    Pour tout réel α, la série de terme général u_n converge.

Correction de l'exercice .32 : [ÉNONCÉ]

1. Trois points à montrer :

   — $v_n - u_n = \dfrac{1}{nn!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   — $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

— $v_{n+1}-v_n=-\dfrac{1}{n(n+1)(n+1)!}\leqslant 0$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes donc convergentes vers la même limite.

2. a. $\mathrm{I}_0=\displaystyle\int_0^1 e^{1-x}\,\mathrm{d}x=\left[-e^{1-x}\right]_0^1=e-1.$

Sur $[0\,;1]$, $0\leqslant x^n e^{1-x}\leqslant e$ donc, par croissance de l'intégrale, $0\leqslant \mathrm{I}_n\leqslant \dfrac{e}{n!}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x=\frac{e}{n!}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$

D'après les théorèmes d'encadrement, $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, $x\longmapsto\dfrac{x^k}{k!}$ et $x\longmapsto e^{1-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;1]$. Une intégration par parties s'écrit :

$$\mathrm{I}_{k-1}=\int_0^1\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}e^{1-x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^k}{k!}e^{1-x}\right]_0^1+\int_0^1\frac{x^k}{k!}e^{1-x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{k!}+\mathrm{I}_k.$$

Donc, $\forall\, k\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_{k-1}-\mathrm{I}_k=\dfrac{1}{k!}$.

c. Il suffit de sommer les égalités précédentes pour k variant de 1 à $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{I}_{k-1}-\mathrm{I}_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\iff \mathrm{I}_n-\mathrm{I}_0=u_n\iff u_n=e-\mathrm{I}_n.$$

Comme $u_0=0=e-\mathrm{I}_0$, cette relation est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

D'après les théorème sur les limites de sommes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e$.

3. Par l'absurde supposons que $e=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}$.

On a $u_q\leqslant e\leqslant v_q$ avec u_q est un rationnel qui peut donc s'écrire sous la forme $\dfrac{\mathrm{N}}{q!}$, $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$.

On a alors :

$$u_q=\frac{\mathrm{N}}{q!}<e=\frac{p}{q}<u_q+\frac{1}{qq!}=\frac{\mathrm{N}}{q!}+\frac{1}{qq!}\text{ ou }\mathrm{N}<p(q-1)!<\mathrm{N}+\frac{1}{q}<\mathrm{N}+1.$$

L'entier $p(q-1)!$ est donc strictement compris entre les deux entiers consécutifs N et $\mathrm{N}+1$. Impossible !

Correction de l'exercice .33 : [Énoncé]

1. Sur $\mathrm{I}\subset\,]2\,;+\infty[$, comme, $x\longmapsto\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$ est continue, on obtient :

$$y_{\mathrm{H}}:x\longmapsto\lambda\underbrace{\frac{x-1}{x-2}}_{>0},\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p:x\longmapsto ax+b$.

y_p est solution si, et seulement si $a(x^2+2x+5)+ax+b=x^2+3x+5$ *i.e.* $a=1$ et $b=0$.

Les solutions générales sur $]2\,;+\infty[$ sont donc de la forme

$$y:x\longmapsto x+\lambda\frac{x-1}{x-2},\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

2. L'équation caractéristique admet 1 comme racine double donc les solutions homogènes sont de la forme

$$y_{\mathrm{H}}:x\longmapsto(\lambda x+\mu)\,e^x,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p : x \longmapsto x^2(ax+b)e^x$.
y_p est solution si, et seulement si $y_p'' - 2y_p' + y_p = xe^x$ avec, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \Big(ax^3 + bx^2\Big)e^x \\ y_p'(x) &= \Big(ax^3 + (3a+b)x^2 + 2bx\Big)e^x \\ y_p''(x) &= \Big(ax^3 + (6a+b)x^2 + (6a+4b)x + 2b\Big)e^x \\ xe^x &= \Big(6ax + 2b\Big)e^x \\ &\iff \begin{cases} 6a = 1 \\ 2b = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Une solution particulière pourra donc être $y_p : x \longmapsto \dfrac{1}{6}x^3e^x$.
Les solutions générales sur $\mathbb{R}$ sont donc de la forme

$$y : x \longmapsto \left(\frac{1}{6}x^3 + \lambda x + \mu\right)e^x,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice .34 : [Énoncé]

Le nombre de candidats $\mathbb{X}$ réussissant suit la loi binomiale de paramètres 23 et 0,2.

$$\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(25; 0,2)$$

En effet, la probabilité de réussite de chaque candidat est la même : 0,2, et la réussite d'un candidat est indépendante de la réussite des autres.

$$\mathrm{P}(\mathbb{X} = k) = \binom{25}{k}(0,2)^k(0,8)^{25-k}.$$

1. $\mathbf{P}(\mathbb{X} \geqslant 1) = 1 - \mathbf{P}(\mathbb{X} = 0) = 1 - (0,8)^{25} \simeq 99,6\%$.
2. $$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbb{X} \leqslant 2) &= \mathbf{P}(\mathbb{X} = 0) + \mathbf{P}(\mathbb{X} = 1) + \mathbf{P}(\mathbb{X} = 2) \\ &= (0,8)^{25} + \binom{25}{1}(0,2)^1(0,8)^{25-1} + \binom{25}{2}(0,2)^2(0,8)^{25-2} \\ &\simeq 9,82\%. \end{aligned}$$
3. $\mathbf{P}(\mathbb{X} = 10) = \binom{25}{10}(0,2)^{10}(0,8)^{25-10} \simeq 1,18\%$.
4. D'après le cours, l'espérance de la loi binomiale $\mathcal{B}(25; 0,2)$ est $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 25 \times 0,2 = 5$.

TD 1 Compétences d'ECG-1

Exercice .1 [Correction p. 46]

On considère la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Écrire une fonction Python telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'exécution de `suite_h(n)` renvoie la valeur de h_n.
2. Étude de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   a. Déterminer le sens de variation de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   b. Démontrer que pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   c. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}$.
   En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, h_n \geqslant \ln(n+1)$.
   Déterminer alors la limite de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = h_n - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = h_n - \ln(n+1).$$
   a. À l'aide du résultat de la question 2.b., établir :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$
   b. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent toutes deux vers la même limite, notée γ.
   c. Établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{h_n}{\ln(n)} = 1$.
   d. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$.
   e. Écrire une fonction Python prenant en argument d'entrée un réel strictement positif p et renvoyant en sortie un encadrement de γ d'amplitude inférieure ou égale à p (cette fonction pourra utiliser la fonction de la question 1.).
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
   a. Montrer par récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{S}_n = h_{2n} - h_n$.
   b. En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{S}_n = u_{2n} - u_n + \ln(2)$.
   c. Conclure que la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$.

Exercice .2 – (EDHEC 2022 E) [Correction p. 49]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer u_1.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On définit la fonction f_n sur $[0\,;1]$ par : $\forall\, x \in [0\,;1]$, $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$.
   Dresser le tableau de variations de f_n sur $[0\,;1]$.
3. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
   b. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$. On note $\gamma = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.
   a. Justifier : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n \leqslant \gamma$.
   b. Déterminer les deux réels a, b tels que pour tout $x \in [0\,;1]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{x}{k(x+k)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{x+k}$.
   c. Établir alors que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \dfrac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$.
   d. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{T}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
   a. Justifier que $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.
   b. Établir : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   En déduire que $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
6. Donner finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de γ à l'aide de T_n et S_n.
7. On considère la fonction Python définie ci-dessous :

Éditeur

```
import numpy as np
def gamma(p):
    n=1
    while np.\log(1+1/n)>p :
        n=n+1
    L=[1 / k for k in range (1, n+1)]
    S=sum(L)-np.log(n+1)
    T=sum(L)-np.log(n)
    return S, T
```

L'exécution de la commande `gamma (10 * *(-3))` renvoie :

```
>>> (0.5767160812351229,0.5777155815682065)
```

Interpréter ce résultat en justifiant soigneusement la réponse.

Exercice .3 – (Algèbre linéaire) [Correction p. 52]

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - I_3)^2 (A + I_3)$.
2. Résoudre les équations $AX = X$ et $AX = -X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. Notons $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   a. Résoudre l'équation $AX = X + V$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On notera W la solution dont la première composante est égale à -1.
   b. Pour les khûbes. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   c. Notons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   d. Calculer $P^{-1}AP$. On notera T la matrice obtenue.
   e. Posons $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Déterminer, pour tout $k \in [\![2\,;+\infty[\![$, la matrice N^k. Calculer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice T^n.
   f. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n.
4. Déduire des questions précédentes l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0; \quad u_1 = 0; \quad u_2 = 1; \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = -u_n + u_{n+1} + u_{n+2}.$$

Exercice .4 – (Probabilités - EML 2009 E) [Correction p. 56]

Une urne contient des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $q = 1 - p$ avec $p \in]0\,;1[$.

1. Dans cette question, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.
   On note $\mathbb{T}$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et $\mathbb{U}$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.
   a. Reconnaître la loi de $\mathbb{T}$. Donner son espérance et sa variance.
   b. Exprimer $\mathbb{U}$ en fonction de $\mathbb{T}$. En déduire que $\mathbb{U}$ possède une espérance et une variance et les donner.
2. Dans cette question, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule de chaque couleur. On note :
   — $\mathbb{X}$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués,
   — $\mathbb{Y}$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues,

— $\mathbb{Z}$ la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues,

— pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, B_i l'évènement "obtenir une boule blanche au i-ème tirage" et $\mathrm{N}_i = \overline{\mathrm{B}_i}$.

a. Écrire une fonction `Python` prenant en argument un réel $p \in]0\,;1[$ et renvoyant une réalisation de la variable aléatoire $\mathbb{X}$.

b. Loi de $\mathbb{X}$.

i. Sans justifier, donner $\mathbb{X}(\Omega)$.

ii. Montrer que pour tout $k \in [\![2\,;+\infty[\![$, $\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) = qp^{k-1} + pq^{k-1}$.

iii. Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) = 1$.

iv. Montrer que $\mathbb{X}$ admet une espérance et que $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$.

c. Loi de $\mathbb{Y}$.

i. Pour tout $k \in [\![2\,;+\infty[\![$, déterminer $\mathbf{P}([\mathbb{X}=k] \cap [\mathbb{Y}=1])$. On distinguera les cas $k=2$ et $k \geqslant 3$.

ii. En déduire que $\mathbf{P}([\mathbb{Y}=1]) = q(1+p)$.

iii. Déterminer la loi de $\mathbb{Y}$.

d. Donner la loi de $\mathbb{Z}$.

Corrigés

Correction de l'exercice .1 : [Énoncé]

1. Deux possibilités :

```
Éditeur
1  def suite_h(n):
2      S=0
3      for k in range(1,n+1):
4          S =S+1/k
5      return S
```

```
Éditeur
1  def suite_h_bis(n):
2      L =[1/k for k in
       ↪  range(1,n+1)]:
3      return sum(L)
```

Remarque
Dans le premier programme, il est aussi possible d'initialiser avec S=1 et, dans ce cas, la ligne suivante est `for k in range (2, n+1):`

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$h_{n+1} - h_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0.$$

Par conséquent, $h_{n+1} > h_n$ et la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

b. On sait que la fonction ln est concave donc sa courbe représentative est au-dessous de ses tangentes, en particulier celle en $(1;0)$ d'équation réduite $y = x - 1$.
D'où, $\forall\, x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

Autre méthode : Posons $f : x \longmapsto \ln(1+x) - x$, définie sur $]-1\,;+\infty[$. La fonction f est une somme de deux fonctions dérivables sur $]-1\,;+\infty[$, elle l'est donc également et, pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$$

Idée
En dehors du pôle, $\dfrac{-x}{1+x}$ est du signe de la parabole $-x(x+1)$.

D'où le tableau de variation :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖	↗	0	↘	

Remarque
Les limites sont inutiles ici.

Par conséquent, $\forall\, x \in]-1\,;+\infty[$, $f(x) \leqslant 0 \iff \ln(1+x) \leqslant x$.

c. — Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $\dfrac{1}{k} \geqslant 0$, d'après la question précédente,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}.$$

— Il suffit de sommer ces inégalités dans le même sens pour k variant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = h_n.$$

Attention
On pense à mentionner l'hypothèse donnant le droit d'utiliser la question précédente !

Or, en reconnaissant une série télescopique,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k)\\ &= \ln(n+1) - \ln(1)\\ &= \ln(n+1).\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $h_n \geqslant \ln(n+1)$.

— Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, d'après le théorème de comparaison, la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} h_n = +\infty.$$

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

— Inégalité de gauche :

Comme $\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)$ avec $\dfrac{1}{n+1} > -1$, le résultat de la question 2.b. nous donne :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} \iff \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

— Inégalité de droite :

On va réutiliser notre idée mais en modifiant tout d'abord notre énoncé à l'aide des propriétés du logarithme :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \iff -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant -\frac{1}{n+1} \iff \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leqslant -\frac{1}{n+1}$$

À partir de là, l'idée est la même avec $\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$ et $-\dfrac{1}{n+1} > -1$.

Le résultat du 2.b donne encore $\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) \leqslant -\dfrac{1}{n+1}$ puis $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

En regroupant les deux inégalités, on a montré :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Méthode

Deux suites qui convergent vers la même limite. Il y a de grande chance que ce soit le théorème des suites adjacentes.

b. Pour cela, démontrons qu'elles sont adjacentes.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= h_{n+1} - \ln(n+1) - (h_n - \ln(n)) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant 0. \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= h_{n+1} - \ln(n+2) - (h_n - \ln(n+1)) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1)) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \geqslant 0. \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= h_n - \ln(n) - h_n + \ln(n+1) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Elles convergent vers une même limite, notée γ.

Remarque
γ est appelée constante d'Euler-Mascheroni.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n = u_n + \ln(n)$.
D'où, pour tout $n \in [\![2\,;+\infty[\![$ *i.e.* $\ln(n) \neq 0$,

$$\frac{h_n}{\ln(n)} = \frac{u_n}{\ln(n)} + 1.$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\ln(n)} = 0$.

À retenir
On notera $h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

D'après les théorèmes sur les limites de sommes, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1.$$

d. — La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et converge vers γ donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leqslant \gamma$.

— De même, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers ℓ donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \gamma$.

En conclusion,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n.$$

e. Là encore, deux possibilités.
La première utilise la fonction de la question 1., la seconde non.

Éditeur
```python
def gamma(p):
    n=1
    u=1
    v=1-np.log(2)
    while abs(u-v)>p :
        n=n+1
        h=suite_h(n)
        u=h-np.log (n)
        v=h-np.log(n+1)
    return v,u
```

Éditeur
```python
import numpy as np
def gamma_bis(p) :
    k=1
    S=1
    u=1
    v=1-np.log(2)
    while abs(u-v)>p :
        k=k+1
        S=S+1/k
        u=S-np.log(k)
        v=S-np.log(k+1)
    return v,u
```

4. a. — Initialisation. Pour $n = 1$: On a :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

et

$$h_2 - h_1 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} - 1 = \frac{1}{2}.$$

D'où, $S_1 = h_2 - h_1$ et l'initialisation est vérifiée.

— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $S_n = h_{2n} - h_n$ et montrons que $S_{n+1} = h_{2n+2} - h_{n+1}$.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + h_{2n} - h_n \quad \text{par hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

On fait apparaître $h_{n+1} = h_n + \dfrac{1}{n+1}$,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + h_{2n} - \left(h_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{2-1}{2n+2} + h_{2n} - h_{n+1} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2n+2} + \underbrace{\frac{1}{2n+1} + h_{2n}}_{h_{2n+1}}}_{h_{2n+2}} - h_{n+1} \\ &= h_{2n+2} - h_{n+1} \end{aligned}$$

L'hérédité est ainsi établie.

— Conclusion : Initialisée à partir de $n = 1$ et héréditaire, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, S_n = h_{2n} - h_n.$$

Attention
Une récurrence est toujours en trois temps sinon elle est incomplète :
— Initialisation,
— Hérédité,
— Conclusion.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} S_n &= h_{2n} - h_n \\ &= u_{2n} + \ln(2n) - (u_n + \ln(n)) \quad \text{avec } u_n = h_n - \ln(n) \\ &= u_{2n} - u_n + \ln(2n) - \ln(n) \\ &= u_{2n} - u_n + \ln(2) \end{aligned}$$

Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = u_{2n} - u_n + \ln(2)$.

c. D'après la question précédente, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = u_{2n} - u_n + \ln(2)$.
Or, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi que sa suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent toutes deux vers γ.
D'après les théorèmes sur les limites de sommes, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (u_{2n} - u_n) + \ln(2) = \gamma - \gamma + \ln(2) = \ln(2).$$

À retenir
$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$

Correction de l'exercice .2 : [Énoncé]

1. $$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 1 - \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[x - \ln(|x+1|)\Big]_0^1 \\ &= 1 - \ln(2). \end{aligned}$$

Idée
On effectue une décomposition en éléments simples.

2. La fonction f_n est le quotient de deux fonctions dérivables sur $[0\,;1]$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0\,;1]$ (car $n > 0$). Par conséquent, f_n est dérivable sur $[0\,;1]$ et, pour tout $x \in [0\,;1]$:

$$f_n'(x) = \frac{n}{(x+n)^2} > 0.$$

On en déduit le tableau de variation sur $[0\,;1]$:

x	0		1
$f'(x)$	$+$		
f	0	↗	$\dfrac{1}{n+1}$

Remarque
Les limites sont inutiles ici.

Idée
On va utiliser la croissance de l'intégrale. Globalement, l'encadrement vient de l'intégrande qui est tout ce qu'on a.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall\, x \in [0\,;1]\,,\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{n+1}$$

$$0 \leqslant \frac{x}{n(x+n)} \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans le bon sens,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 \frac{1}{n(n+1)}\,\mathrm{d}x$$

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{après calcul de l'intégrale}$$

Enfin, par décroissance de la fonction inverse, $n(n+1) \geqslant n^2 \implies \dfrac{1}{n(n+1)} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$:

$$\text{D'où, } 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

b. On sait que :

— $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$,

— la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car d'exposant 2,

— et SURTOUT que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est à termes positifs.

D'après le critère de comparaison sur les séries à termes généraux positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente.

4. a. D'après la question précédente, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente de somme égale à γ ; autrement dit, la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers γ.
Reste à montrer qu'elle est croissante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k = u_{n+1} \geqslant 0.$$

La suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers γ en croissant est donc majorée par sa limite.
Autrement dit,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{S}_n \leqslant \gamma.$$

Idée
C'est simplement une décomposition en éléments simples.

b. Soit on remarque que $\forall\, x \in [0\,;1]$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{x}{k(x+k)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{x+k}$.

Soit, on suit la méthode du cours *i.e.* on sait qu'il existe deux réels a et b tel que :

$$\forall\, x \in [0\,;1]\,, \forall\, k \in \mathbb{N}^*, \frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{x+k}.$$

Puis on trouve a et b :

$$a = k \times \frac{x}{k(x+k)}\bigg|_{k=0} = \frac{x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad b = (x+k) \times \frac{x}{k(x+k)}\bigg|_{k=-x} = \frac{x}{-x} = -1.$$

Des deux manières, on a montré que :

$$\forall\, x \in [0\,;1]\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{x}{k(x+k)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}.$$

c. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente et par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} u_k &= \int_0^1 \frac{x}{k(x+k)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1}{k}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{x+k}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{k} - \Big[\ln(|x+k|)\Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k). \end{aligned}$$

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il suffit de sommer l'égalité précédente :

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \ln(1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1). \end{aligned}$$

Méthode
On peut aussi reconnaître une série télescopique.

5. a. Il suffit de se ramener à S_n.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)}_{\mathrm{S}_n} + \ln(n+1) - \ln(n) \\ &= \mathrm{S}_n + \Big(\frac{n+1}{n}\Big) \\ &= \mathrm{S}_n + \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big). \end{aligned}$$

Or,

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \gamma$,

— $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$ et ln est continue en 1, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big) = 0$.

Conclusion, $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers γ.

À retenir
C'est un grand classique !

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Par décroissance de la fonction inverse sur $[n\,;n+1] \subset \mathbb{R}_*^+$, on a :

$$\begin{aligned}
&\forall\, x \in [n\,;n+1]\,,\ \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}\\
&\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,\mathrm{d}x \quad \text{par croissance de l'intégrale}\\
&\frac{n+1-1}{n+1} \leqslant \Big[\ln(|x|)\Big]_n^{n+1} \leqslant \frac{n+1-1}{n}\\
&\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1)-\ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Idée
Il est également possible de démontrer ce résultat en utilisant l'IAF appliquée à la fonction ln sur le segment $[n\,;n+1]$ ou en utilisant la concavité de ln.

La décroissance de $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en découle :

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{n+1}-\mathrm{T}_n &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \ln(n)\\
&= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \quad \text{par télescopage}\\
&\geqslant 0 \text{ d'après le résultat précédent.}
\end{aligned}$$

La suite $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

6. Puisque $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers γ, elle est minorée par elle. Avec le résultat de la question 4.a., on obtient :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{S}_n \leqslant \gamma \leqslant \mathrm{T}_n.$$

7. Le résultat de la question 4.d. et la définition de la suite $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nous permettent d'affirmer que la fonction renvoie, pour un certain n, les valeurs S_n et T_n.
Par conséquent, d'après le résultat de la question 6., la fonction renvoie un encadrement de γ.
Ensuite, on remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_n - \mathrm{S}_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \ln(n+1)\\
&= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

La fonction renvoie donc les valeurs de S_n et T_n dès que $\mathrm{T}_n - \mathrm{S}_n$ devient inférieur ou égal à p.
Par conséquent, la fonction renvoie un encadrement de γ d'amplitude inférieure ou égale à p.
Conclusion : $(0.5767160812351229, 0.5777155815682065)$ est un encadrement de γ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-3}.

Correction de l'exercice .3 : [Énoncé]

1. Après calculs, $(\mathrm{A}-\mathrm{I}_3)^2(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3) = 0_3$.

2. — Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{AX} = \mathrm{X} &\iff \begin{cases} y &= x \\ z &= y \\ -x+y+z &= z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y &= x \\ z &= y \\ -x+y &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x &= x \\ y &= x \\ z &= x \end{cases} \\
&\iff \mathrm{X} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Idée
On choisit une inconnue secondaire comme paramètre.

L'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{AX} = \mathrm{X}$ est $\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$.

— De la même manière, les solutions de l'équation $\mathrm{AX} = -\mathrm{X}$ est $\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$.

3. a. On procède de la même façon... Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{AX} = \mathrm{X} + \mathrm{V} &\iff \begin{cases} y &= x &+1 \\ z &= y &+1 \\ -x+y+z &= z &+1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -x+y &= 1 \\ -y+z &= 1 \\ -x+y &= 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x &= y-1 \\ y &= y \\ z &= y+1 \end{cases} \\
&\iff \mathrm{X} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Idée
On choisit y comme paramètre.

L'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{AX} = \mathrm{X}+\mathrm{V}$ est $\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$.

On pose $\mathrm{W} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b. Montrons que la famille $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W})$ est libre dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons $a\mathrm{U} + b\mathrm{V} + c\mathrm{W} = 0_{3,1}$. On a :

$$a\mathrm{U} + b\mathrm{V} + c\mathrm{W} = 0_{3,1} \iff \begin{cases} a+b-c &= 0 \\ -a+b &= 0 \\ a+b+c &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b-c &= 0 \\ 2b-c &= 0 \\ 2c &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \end{cases}$$

Rappel
La famille $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W})$ est libre lorsque $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a\mathrm{U} + b\mathrm{V} + c\mathrm{W} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a = b = c = 0.$$

D'où $a = b = c = 0$ et la famille $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W})$ est libre. De cardinal 3 égal à $\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$, elle en forme une base.

Attention
On n'effectue des opération sur les lignes ou (exclusif) sur les colonnes. Pas les deux !

c. La méthode est standard et repose sur l'algorithme de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

À partir de cette étape, on sait que P est inversible car on a réussi à la rendre triangulaire avec des coefficients diagonaux non nuls à l'aide des opérations élémentaires sur les lignes. Il reste à trouver son inverse.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Reste à diviser les deux premières lignes par 4 et la troisième par 2. Avec un petit coefficient pour faire propre, on obtient :

$$\mathrm{P} \text{ est inversible et } \mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

d. Après calculs, on obtient successivement :

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.

e. — Sans difficulté, on trouve $\mathrm{N}^2 = 0_3$ et donc :

$$\forall\, k \in [\![2\,;+\infty[\![,\ \mathrm{N}^k = 0_3.$$

— Pour les petites puissances de T, on a facilement :

$$\mathrm{T}^0 = \mathrm{I}_3 \quad \text{et} \quad \mathrm{T}^1 = \mathrm{T}.$$

— Soit $n \geqslant 2$. On remarque tout d'abord que

$$\mathrm{DN} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{ND}.$$

Les matrices N et D commutent. Cela nous autorise à utiliser le binôme de Newton.

$$\mathrm{T}^n = (\mathrm{N}+\mathrm{D})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{N}^k \mathrm{D}^{n-k} = \mathrm{D}^n + n\mathrm{N}\mathrm{D}^{n-1}$$
$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque
Comme $\mathrm{D}^0 + 0 \times \mathrm{N}\mathrm{D}^{-1} = \mathrm{I}_3 = \mathrm{T}^0$ et $\mathrm{D}^1 + \mathrm{N}\mathrm{D}^0 = \mathrm{D} + \mathrm{N} = \mathrm{T}^1$, l'expression obtenue est donc encore valable si

Conclusion,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque
Pour une expression aussi simple, l'énoncé aurait également pu demander de conjecturer une expression de T^n (en calculant $\mathrm{T}^2, \mathrm{T}^3, \ldots$) puis de la démontrer (par récurrence).

f. On sait que $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ d'où $\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}$.
Démontrons alors, par récurrence, que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}^n = \mathrm{PT}^n\mathrm{P}^{-1}$.

— Initialisation. Pour $n = 0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{PT}^0\mathrm{P}^{-1} &= \mathrm{P}l_3\mathrm{P}^{-1} \\ &= \mathrm{PP}^{-1} = \mathrm{I}_3 \\ &= \mathrm{A}^0 \end{aligned}$$

L'initialisation est vérifiée.

— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathrm{A}^n = \mathrm{PT}^n\mathrm{P}^{-1}$ et montrons que $\mathrm{A}^{n+1} = \mathrm{PT}^{n+1}\mathrm{P}^{-1}$. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^{n+1} &= \mathrm{A}^n \times \mathrm{A} \\ &= \mathrm{PT}^n\mathrm{P}^{-1} \times \mathrm{PTP}^{-1} && \text{hypothèse de récurrence et point précédent} \\ &= \mathrm{PT}^n \times \mathrm{TP}^{-1} \\ &= \mathrm{PT}^{n+1}\mathrm{P}^{-1} \end{aligned}$$

L'hérédité est ainsi établie.

— Initialisée à partir de $n = 0$ et héréditaire, la relation est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}^n = \mathrm{PT}^n\mathrm{P}^{-1}.$$

On calcule ensuite les puissances de A en utilisant le résultat de la question précédente :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (-1)^n - 2n + 3 & 2(-1)^{n+1} + 2 & (-1)^n + 2n - 1 \\ (-1)^{n+1} - 2n + 1 & 2(-1)^n + 2 & (-1)^{n+1} + 2n + 1 \\ (-1)^n - 2n - 1 & 2(-1)^{n+1} + 2 & (-1)^n + 2n + 3 \end{pmatrix}.$$

Méthode
Elle pourrait passer en récurrence immédiate ici... Je la fais simplement pour que vous puissiez vous assurer qu'elle est bien immédiate pour vous !

Méthode
Il est bon de vérifier pour $n = 0$ et $n = 1$ que l'on retrouve respectivement I_3 et A.

4. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. On a ainsi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n.$$

Puis, par récurrence immédiate :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0.$$

Avec la question précédente et puisque $\mathrm{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} (-1)^n + 2n - 1 \\ (-1)^{n+1} + 2n + 1 \\ (-1)^n + 2n + 3 \end{pmatrix}.$$

La première ligne nous fournit le résultat voulu.

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n + 2n - 1.$$

Méthode
Les deux autres lignes servent de vérifications, puisqu'elles doivent correspondre à u_{n+1} et u_{n+2} si $u_n = (-1)^n + 2n - 1$... Ce qui est bien le cas !

Correction de l'exercice .4 : [Énoncé]

1. a. L'expérience s'assimile à une infinité de répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès « obtenir une boule noire » a pour probabilité q.

   La variable aléatoire $\mathbb{T}$ prend alors comme valeur le rang du premier succès. Elle suit donc la loi géométrique de paramètre q :

   $$\mathbb{T}(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}([\mathbb{T} = n]) = qp^{n-1}, \quad \mathbf{E}(\mathbb{T}) = \frac{1}{q}, \quad \mathbf{V}(\mathbb{T}) = \frac{p}{q^2}.$$

   b. — Puisque $\mathbb{U}$ prend comme valeur le nombre de balles blanches obtenues, on a :

   $$\mathbb{U} = \mathbb{T} - 1.$$

   — La variable aléatoire $\mathbb{U}$ admet alors une espérance et une variance, comme transformée affine d'une variable aléatoire admettant espérance et variance :

   $$\mathbf{E}(\mathbb{U}) = \mathbf{E}(\mathbb{T} - 1) = \mathbf{E}(\mathbb{T}) - 1 = \frac{1}{q} - 1 = \frac{p}{q},$$

   par linéarité de l'espérance et

   $$\mathbf{V}(\mathbb{U}) = \mathbf{V}(\mathbb{T} - 1) = \mathbf{V}(\mathbb{T}) = \frac{p}{q^2}.$$

2. a.

```python
from random import random
def simulation_X(p):
    blanche = False
    noire = False
    n = 0
    while not (blanche and noire):
        n += 1
        if random() < p:
            blanche = True
        else:
            noire = True
    return n
```

   b. i. $\mathbb{X}(\Omega) = [\![2\,;+\infty[\![$.

   ii. Soit $k \in [\![2\,;+\infty[\![$.

> **Remarque**
> L'issue consistant à n'obtenir que des boules noires et celle à n'obtenir que des boules blanches n'ont pas d'image par $\mathbb{X}$. Ces deux issues forment un évènement quasi-impossible. On peut donc sans problème omettre de les évoquer.

$[\mathbb{X} = k]$ est réalisé $\iff$ on obtient la deuxième couleur de boule pour la première fois au k-ième tirage

$\iff$ les tirages 1 à $k-1$ ont donné la même couleur et le k-ième tirage l'autre couleur

$\iff$ (les tirages 1 à $k-1$ ont donné une boule blanche et le k-ième tirage une boule noire) ou (les tirages 1 à $k-1$ ont donné une boule noire et le k-ième tirage une boule blanche)

D'où,

$$[\mathbb{X} = k] = (\mathrm{B}_1 \cap \ldots . \cap \mathrm{B}_{k-1} \cap \mathrm{N}_k) \cup (\mathrm{N}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{N}_{k-1} \cap \mathrm{B}_k)\,,$$

réunion de deux événements incompatibles.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) &= \mathbf{P}\left((\mathrm{B}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{B}_{k-1} \cap \mathrm{N}_k) \cup (\mathrm{N}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{N}_{k-1} \cap \mathrm{B}_k)\right)\\ &= \mathbf{P}\left(\mathrm{B}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{B}_{k-1} \cap \mathrm{N}_k\right) + \mathbf{P}\left(\mathrm{N}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{N}_{k-1} \cap \mathrm{B}_k\right)\\ &= p^{k-1}q + q^{k-1}p.\end{aligned}$$

Attention
Il est indispensable de justifier (ou à défaut mentionner) la convergence des séries en jeu lorsqu'on utilise la linéarité (pour décomposer) sur des sommes infinies.

iii. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{+\infty}\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) &= \sum_{k=2}^{+\infty}\left(qp^{k-1}+pq^{k-1}\right) = \sum_{i=1}^{+\infty}\left(qp^{i}+pq^{i}\right)\\ &= q\sum_{i=1}^{+\infty}p^i + p\sum_{i=1}^{+\infty}q^i \quad \text{(les deux sommes étant convergentes)}\\ &= q\left(\sum_{i=0}^{+\infty}p^i - 1\right) + p\left(\sum_{i=1}^{+\infty}q^i - 1\right)\\ &= q\left(\frac{1}{1-p}-1\right)+p\left(\frac{1}{1-q}-1\right)\\ &= 1-q+1-p = 1-q+q\\ &= 1.\end{aligned}$$

iv. $\mathbb{X}$ admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n\in\mathbb{X}(\Omega)}|k\mathbf{P}([\mathbb{X}=k])|$ est convergente si, et seulement si, la série $\sum_{k\geqslant 2}k\mathbf{P}([\mathbb{X}=k])$ est convergente, car elle est à termes positifs.
Soit $\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\mathrm{N}}k\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) &= \sum_{k=2}^{\mathrm{N}}k\left(qp^{k-1}+pq^{k-1}\right)\\ &= q\sum_{k=2}^{\mathrm{N}}kp^{k-1} + p\sum_{k=2}^{\mathrm{N}}kq^{k-1}\end{aligned}$$

Comme, pour $p,q\in\,]0\,;1[$, ces deux séries sont des troncatures de séries géométriques convergentes, il en est de même de $\sum_{k\geqslant 2}k\mathbf{P}([\mathbb{X}=k])$.

On en déduit que $\mathbb{X}$ admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbb{X}) &= q\sum_{k=2}^{+\infty}kp^{k-1} + p\sum_{k=2}^{+\infty}kq^{k-1}\\ &= q\left(\sum_{k=1}^{+\infty}kp^{k-1}-1\right)+p\left(\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}-1\right)\\ &= q\left(\frac{1}{(1-p)^2}-1\right)+p\left(\frac{1}{(1-q)^2}-1\right) \quad q=1-p \text{ et } p=1-q\\ &= \frac{1}{q}-1+\frac{1}{p}-p\\ &= \frac{1}{q}+\frac{1}{p}-1.\end{aligned}$$

Conclusion, $\mathbb{X}$ admet une espérance et $\mathbf{E}(\mathbb{X})=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}-1$.

c. i. Soit $k\in[\![2\,;+\infty[\![$.

— Si $k=2$:

$[\mathbb{X}=2]\cap[\mathbb{Y}=1]$ est réalisé $\iff$ on a tiré deux boules dont une blanche

$\iff$ on a tiré (une blanche puis une noire) ou (une noire puis une blanche)

D'où,

$$[\mathbb{X}=2]\cap[\mathbb{Y}=1] = (\mathrm{B}_1\cap\mathrm{N}_2)\cup(\mathrm{N}_1\cap\mathrm{B}_2),$$

réunion de deux événements incompatibles.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{X}=2]\cap[\mathbb{Y}=1]) &= \mathbf{P}\left((\mathrm{B}_1\cap\mathrm{N}_2)\cup(\mathrm{N}_1\cap\mathrm{B}_2)\right)\\ &= \mathbf{P}\left(\mathrm{B}_1\cap\mathrm{N}_2\right)+\mathbf{P}\left(\mathrm{N}_1\cap\mathrm{B}_2\right)\\ &= 2pq. \quad \text{(tirages avec remise donc mutuelle indépendance des évènem}\end{aligned}$$

— Si $k\geqslant 3$:

$$[\mathbb{X}=k]\cap[\mathbb{Y}=1] \text{ est réalisé} \iff \text{on a tiré } k \text{ boules dont une blanche}$$
$$\iff \text{on a tiré une seule blanche et } k-1\geqslant 2 \text{ noires}$$
$$\iff \text{les tirages } 1 \text{ à } k-1 \text{ ont donné une boule noire et le tirage } k \text{ donne une boule blanche.}$$

D'où,

$$[\mathbb{X}=k]\cap[\mathbb{Y}=1]=\mathrm{N}_1\cap\ldots\cap\mathrm{N}_{k-1}\cap\mathrm{B}_k,$$

intersection d'événements indépendants.

Par conséquent, on obtient :

$$\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]\cap[\mathbb{Y}=1])=q^{k-1}p.$$

Conclusion, $\forall\, k\in[\![2\,;+\infty[\![$,

$$\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]\cap[\mathbb{Y}=1])=\begin{cases}2pq & \text{si } k=2\\ q^{k-1}p & \text{si } k\geqslant 3.\end{cases}$$

ii. D'après la formule des probabilités totales, avec $([\mathbb{X}=k])_{k\in[\![2;+\infty[\![}$ comme système complet d'évènements, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2}\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]\cap[\mathbb{Y}=1])$ est convergente et

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{Y}=1]) &= \sum_{k=2}^{+\infty}\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]\cap[\mathbb{Y}=1])\\ &= \mathbf{P}([\mathbb{X}=2]\cap[\mathbb{Y}=1])+\sum_{k=3}^{+\infty}\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]\cap[\mathbb{Y}=1])\\ &= 2pq+\sum_{k=3}^{+\infty}pq^{k-1}\\ &= 2pq+p\sum_{i=2}^{+\infty}q^i \quad \text{en posant } i=k-1\\ &= 2pq+p\left(\sum_{i=2}^{+\infty}q^i-1-q\right) \quad (1-q=p \text{ et } 1-p=q)\\ &= 2pq+p\left(\frac{1}{1-q}-1-q\right)\\ &= 2pq+1-p-pq\\ &= pq+1-p=pq+q\\ &= q(1+p).\end{aligned}$$

iii. Puisque l'évènement « n'obtenir que des boules noires » est quasi-impossible, on peut considérer que $\mathbb{Y}(\Omega)=\mathbb{N}^*$.

— On a déjà $\mathbf{P}([\mathbb{Y}=1])=q(1+p)$.

— Soit ensuite $n\in[\![2\,;+\infty[\![$.

$[\mathbb{Y}=n]$ est réalisé $\iff$ on obtient n blanches à la fin du jeu

$\iff$ on obtient n blanches, avec $n \geqslant 2$, et les deux couleurs

$\iff$ on obtient n blanches et une noire

$\iff$ les tirages 1 à n ont donné une blanche et le $n+1$-ième tirage a donné une noire.

D'où,

$$[\mathbb{Y}=n] = \mathrm{B}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{B}_n \cap \mathrm{N}_{n+1},$$

intersection d'événements indépendants car venant de tirages avec remise.

Par conséquent,

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=n]) = p^n q.$$

Conclusion, $\mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall\, n \in [\![2\,;+\infty[\![$,

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=n]) = \begin{cases} q(1+p) & \text{si } n=1, \\ p^n q & \text{si } n \geqslant 2. \end{cases}$$

d. En échangeant les rôles des boules noires et blanches, on échange $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{Z}$.
Par conséquent, $\mathbb{Z}$ a la même loi que celle de $\mathbb{Y}$, en échangeant p et q.
Conclusion, $\mathbb{Z}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\forall\, n \in [\![2\,;+\infty[\![$,

$$\mathbf{P}([\mathbb{Z}=n]) = \begin{cases} p(1+q) & \text{si } n=1, \\ q^n p & \text{si } n \geqslant 2. \end{cases}$$

DM 0 Rentrée

Exercice 1 – (Puissance d'une matrice carrée) : *Les deux Parties I et II sont indépendantes.*

Partie I : Puissance et matrice diagonale

On considère les trois matrices :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{D} = \mathrm{QMQ}.$$

1. a. À l'aide du pivot de Gauss, justifier que la matrice Q est inversible et expliciter Q^{-1}.

   b. Calculer Q^2 et retrouver les résultats précédents.

2. a. Calculer D. Que remarque-t-on ?

   b. Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{M}^n = \mathrm{QD}^n\mathrm{Q}$.

3. Expliciter les neuf coefficients de la matrice M^n.

Partie II : Puissance et binôme de Newton

On considère les matrices suivantes :

$$\mathrm{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Déterminer les réels a et b tels que $\mathrm{A} = a\mathrm{I} + b\mathrm{J}$.

5. Calculer J^2 puis établir que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\mathrm{J}^k = 4^{k-1}\mathrm{J}$.

6. a. À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier n non nul, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et J.

   b. Expliciter les coefficients de A^n et vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$.

Exercice 2 – (Étude de fonction, suite réelle, fonction définie par une intégrale) : *Les parties I et II sont indépendantes.*

Partie I : Fonction et suite réelle

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\forall\, t \in]0\,;+\infty[,\ f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

A : Étude d'une fonction d'une variable

1. a. Étudier les variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

   b. Dresser le tableau des variations de f en précisant les limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que f réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ vers $[2\,;+\infty[$.

3. On note $g : [2\,;+\infty[\to [1\,;+\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1\,;+\infty[$.

   a. Dresser le tableau de variations de g.

   b. Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2\,;+\infty[$.

   c. Soit $y \in [2\,;+\infty[$. En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0\,;+\infty[$.
   En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

B **:** Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f\left(n u_n\right).$$

4. Montrer, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.

5. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n.

Éditeur

```
1  def suite(n):
2      u = 1
3      for k ...:
4          u = ...
5      return ...
```

6. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

   a. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

   b. Majorer les sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ en fonction d'une somme d'une série usuelle.

   En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$.

   c. Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k$ par télescopage.

   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

7. a. Soit un entier k supérieur ou égal à 2 .

   Montrer, après avoir minoré la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur $[k-1\,;k]$, que on a : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2} dt$.

   b. Pour tous entiers n et p tels que $2 \leqslant p < n$, calculer $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

c. En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2$.
Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2\,;3]$.

d. Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}.$$

e. Compléter cette fonction Python qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près :

Éditeur
```python
def approx():
    u = ....
    p = 2
    while .... 0.0001:
        u = ....
        p = ....
    return ...
```

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Dans toute cette partie, h désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad h(x) = x - \ln(x).$$

8. Dresser le tableau de variations de h en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$. On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{h(t)}\,\mathrm{d}t.$$

9. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et que l'on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

10. a. Montrer que $\Phi'(x)$ a le signe du numérateur en s'appuyant sur le signe de $h(x)$ et $h(2x)$.

b. En déduire les variations de Φ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

11. a. Justifier l'encadrement : $0 \leqslant \dfrac{1}{h(t)} \leqslant 1$ pour tout $t > 0$.

b. Montrer : $\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

12. a. Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

b. Montrer : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$. (On pensera à simplifier par $\ln(x)$)

13. On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.
On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$.
Tracer, en annexe, l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Exercice 3 – (Probabilités et suites récurrentes) :

La Partie I consiste à calculer en fonction de n les termes d'une suite récurrente $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

La Partie II étudie l'obtention du premier double PILE lors de lancers d'une pièce déséquilibrée.

Les résultats de la Partie I peuvent être utilisés librement dans la Partie II .

Partie I : Formule explicite d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{4}{9} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n.$$

Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right].$$

Partie II : Probabilités discrètes

On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir PILE vaut $\frac{2}{3}$.

On suppose donnée un espace probabilisé muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ modélisant cette expérience.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dit qu'il y a apparition d'un double PILE au rang n si on obtient PILE au $(n-1)$-ième lancer et PILE au n-ième lancer. On note :

— pour tout entier $n \geqslant 1$, F_n l'évènement « on obtient FACE au n-ième lancer »,

— pour tout entier $n \geqslant 2$, D_n l'évènement « on obtient un double PILE au rang n »,

— pour tout entier $n \geqslant 2$, $v_n = \mathbb{P}(\mathrm{D}_n)$. On conviendra que $v_1 = 0$.

Par exemple, si les lancers donnent successivement : (PILE, FACE, FACE, FACE, PILE, FACE, PILE, PILE) alors l'évènement D_8 est réalisé.

1. On lance n fois de suite la pièce de monnaie.
   On note A_k l'évènement : « on a obtenu k PILE au cours de ces n lancers ».
   a. Préciser l'ensemble, noté I, des valeurs prises par k.
   b. Donner la valeur de $\mathbb{P}(\mathrm{A}_k)$ lorsque $k \in \mathrm{I}$.
2. Calculer v_2 et v_3. Vérifier que $v_3 = \frac{1}{3}v_2 + \frac{2}{9}v_1$.
3. Soit $n \in [\![2\,;+\infty[\![$.
   On suppose qu'au premier lancer, PILE est obtenu et on souhaite la réalisation de l'évènement D_{n+2}.
   a. Quel est alors le résultat du second lancer ?
   À l'issue de ces deux premiers lancers, combien de lancers reste-t-il à effectuer pour que D_{n+2} puisse se réaliser ?
   b. En déduire que $\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{F}_1}}(\mathrm{D}_{n+2}) = \frac{1}{3}v_n$.
4. Pour $n \in [\![2\,;+\infty[\![$, justifier que $\mathbb{P}_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{D}_{n+2}) = v_{n+1}$.
5. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que :
   $$\forall\, n \in [\![2\,;+\infty[\![\,, \quad v_{n+2} = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{2}{9}v_n.$$
   En outre, d'après la question II.2, cette formule est vraie pour $n = 1$.

6. À l'aide de la Partie I, justifier que :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \mathbb{P}\left(\mathrm{D}_n\right) = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right].$$

7. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note E_n l'évènement« il n'y a pas eu deux PILE consécutifs au cours des n premiers lancers ».

   Exprimer l'évènement $\overline{\mathrm{E}_n}$ en fonction des évènements $\mathrm{D}_2, \ldots, \mathrm{D}_n$.

   En déduire que :

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{E}_n\right) = 1 - \sum_{k=2}^{n} v_k.$$

8. Calculer la limite de $\mathbb{P}\left(\mathrm{E}_n\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

I

Rappels d'ECG-1
Suites et séries réelles

Les suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure (mesures d'un phénomène prises à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse (une suite numérique est l'équivalent discret d'une fonction numérique). La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul.

On en trouve, par exemple, chez Archimède, pour des calculs d'aires et de volumes, ou en Égypte vers 1700av. J.-C. et plus récemment au I^{er} siècle apr. J.-C. dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de Héron d'Alexandrie :

Pour extraire la racine carrée de A*, choisir une expression arbitraire* a *et prendre la moyenne entre* a *et* $\dfrac{\mathrm{A}}{a}$ *et recommencer aussi loin que l'on veut le processus précédent*

En notation moderne, cela définit la suite de nombres $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{\mathrm{A}}{u_n}\right).$$

On retrouve ensuite cette préoccupation plusieurs siècles plus tard (à partir du XV^{ème} siècle) avec la méthode des indivisibles (Cavalieri, Torricelli, Pascal, Roberval). Dans l'Encyclopédie Raisonnée de d'Alembert et Diderot (1751), une grande part est laissée aux suites et séries dont le principal intérêt semble être leur *convergence*.

C'est ainsi que l'on voit Bernoulli, Newton, Moivre, Stirling et Wallis, s'intéresser aux suites pour approcher des valeurs numériques. C'est à Lagrange que l'on doit, semble-t-il, la notation indicielle. L'étude des suites numérique ouvre la porte à bien d'autres notions séquentielle comme les suites de fonctions, séries, séries entières ou de Fourier. Voyez ce chapitre comme leur préambule.

Deux suites adjacentes décident d'aller s'éclater dans une soirée « no limit ».
Mais elles se font refouler à l'entrée...

Plan du chapitre

I Suites numériques réelles 66
I.1 Vocabulaire et généralités 66
I.2 Premières suites usuelles 67
I.3 Suites bornées 71
I.4 Variations 72
I.5 Convergence et divergence 73
I.6 Opérations algébriques sur les limites 80
I.7 Suites extraites 84
I.8 Théorèmes d'existence de limites 85
I.9 Suites adjacentes 88
I.10 Suites récurrentes linéaires d'ordre deux 89
II Séries numériques réelles 93
II.1 Condition nécessaire de convergence 98
II.2 Séries à terme positif 99
II.3 Condition suffisante de convergence 100
Programme : Compléments sur les suites et séries réelles 101

I. Suites numériques réelles

I.1 – Vocabulaire et généralités

Définition 1 – Suite réelle :

Une *suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction définie sur $\mathbb{N}$.

Une *suite numérique* est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rccc} u : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

À chaque *indice* $n \in \mathbb{N}$ on associe un nombre u_n appelé *terme* de rang n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'ensemble des suites est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Attention
$u_n \neq (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$!

Remarque : Fondamentalement, cela ne change rien de considérer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir d'un certain rang n_0.

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rencontrées sont définies :

— de manière *explicite* : $u_n = \dfrac{3n-1}{n+2}$.

Le terme de rang n est directement obtenu en fonction de n.

C'est une définition qui ressemble beaucoup à la définition usuelle d'une fonction, et qui est extrêmement pratique pour les calculs. C'est celle que l'on cherchera à obtenir le plus souvent.

— de manière *récurrente* : $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = 5 - \dfrac{16}{u_n + 3}. \end{cases}$ Le terme de rang $n+1$ est obtenu en fonction du terme précédent.

C'est beaucoup moins pratique pour les calculs qu'une définition explicite, mais c'est souvent la définition la plus naturelle que nous aurons d'une suite et souvent celle qu'obtiennent nos chers physiciens.

Il pourra arriver qu'une suite soit définie par récurrence double (u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n), auquel cas il faudra préciser les valeurs de u_0 et u_1, voire par récurrence triple ou pire (mais c'est plus rare !).

— de manière *implicite* : $e^{u_n} - u_n - 2 = n$.

Le terme de rang n est défini comme solution d'une équation voire en fonction de u_{n+1}.

Pas vraiment extrêmement pratique pour les calculs et on n'arrive pas toujours à obtenir une formule explicite comme pour les primitives. Dans ce cas, on arrive quand même à étudier la suite à l'aide d'études de fonctions.

L'ensemble des suites réelles $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est naturellement muni d'opérations de somme (on additionne les deux suites terme à terme), de produit et de produit par un réel :

$\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et on dit que $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times, .\right)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.

I.2 – Premières suites usuelles

Définition 2 – Suite arithmétique et géoémtrique :

Suite arithmétique : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *arithmétique* lorsqu'il existe un scalaire r, appelé *raison*, tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Suite géométrique : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *géométrique* lorsqu'il existe un scalaire q, appelé *raison*, tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \times q.$$

Suite arithmético-géométrique : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *arithmético-géométrique* lorsqu'il existe un couple $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque : Si $a = 1$, la suite arithmético-géométrique précédente est une suite arithmétique, géométrique si $b = 0$.

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison $(m < n)$	Définition explicite	Somme de termes $u_m + ... + u_n$
$u_{n+1} - u_n = r$	$u_{n+1} = u_n + r$	$r = \dfrac{u_n - u_m}{n - m}$	$u_n = u_m + (n-m)r$	$(n - m + 1) \times \dfrac{u_m + u_n}{2}$

FIGURE I.1 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

Preuve : Histoire de réviser le raisonnement par récurrence, montrons le dernier résultat.

On suppose $m \in \mathbb{N}$ fixé et on montre que la propriété $\mathcal{P}_n$: $u_m + ... + u_n = (n-m+1) \times \dfrac{u_m + u_n}{2}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ plus grand que m.

1. Pour $n = m$, on a bien $(\cancel{n} - \cancel{m} + 1) \times \dfrac{u_m + u_m}{2} = 1 \times \dfrac{\cancel{2}u_m}{\cancel{2}} = u_m$ donc $\mathcal{P}_m$ est vérifiée.
2. Supposons qu'il existe un entier $k > m$, tel que $\mathcal{P}_k$ soit vérifiée *i.e.*

$$u_m + ... + u_k = (k-m+1) \times \frac{u_m + u_k}{2}.$$

Montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vérifiée sous cette hypothèse *i.e.*

$$u_m + ... + u_k + u_{k+1} = (k+1-m+1) \times \frac{u_m + u_{k+1}}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Or, } u_m + ... + u_k + u_{k+1} &= (k-m+1) \times \frac{u_m + u_k}{2} + u_{k+1} \\
&= \frac{(k-m+1)(u_m + u_k) + 2u_{k+1}}{2} \\
&= \frac{(k-m+1)(u_m + u_k) + u_{k+1} + u_m + (k+1-m)r}{2} \\
&= \frac{(k-m+1)(u_m + u_k + r) + u_{k+1} + u_m}{2} \\
&= \frac{(k-m+1)(u_m + u_{k+1}) + u_{k+1} + u_m}{2} \\
&= \frac{(k-m+2)(u_m + u_{k+1})}{2}.
\end{aligned}$$

La relation $\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vérifiée et la propriété est héréditaire.

3. La propriété $\mathcal{P}$ est donc initialisée au rang m et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, plus grand que m.

Méthode 1 – Montrer qu'une suite est arithmétique :

Une suite est arithmétique si, et seulement si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$ donc, pour montrer :

— qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r, on exprime, pour n quelconque, $u_{n+1} - u_n$ indépendamment de n.

— qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique, on trouve deux entiers m et n tels que $u_{m+1} - u_m \neq u_{n+1} - u_n$.

Exemple 1 :

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $z_0 = 2$ et $z_{n+1} = 2z_n + 2^n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Montrons que la suite de terme général $t_n = \dfrac{z_n}{2^n}$ est arithmétique.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} - t_n = \dfrac{z_{n+1}}{2^{n+1}} - \dfrac{z_n}{2^n} = \dfrac{1}{2^n} z_n + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^n} z_n = \dfrac{1}{2}$.
La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $t_0 = \dfrac{z_0}{2^0} = 2$
i.e. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $t_n = 2 + \dfrac{1}{2}n$.
On en déduit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ z_n = 2^n t_n = 2^{n+1} + n2^{n-1}.$$

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison $(m < n)$	Définition explicite	Somme de termes $u_m + ... + u_n$
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$	$u_{n+1} = u_n \times q$	$q = \sqrt[n-m]{\dfrac{u_n}{u_m}}$	$u_n = u_m \times q^{n-m}$	$u_m(n-m+1)$ si $q = 1$.
				$u_m \times \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$

FIGURE I.2 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

Preuve : De même pour une suite géométrique de raison q, le raisonnement est identique en plus facile.

On pose :

$$\mathcal{P}_n :\ u_m + ... + u_n = u_m \times \frac{1-q^{n+1-m}}{1-q}$$

pour $q \neq 1$, le cas $q = 1$ étant trivial.

1. Pour $n = m$, on a : $u_m \times \dfrac{1-q^{\cancel{m}+1-\cancel{m}+1}}{1-q} = u_m \dfrac{\cancel{1-q}}{\cancel{1-q}} = u_m$. La propriété est initialisée.
2. Supposons qu'il existe un entier $k > m$ tel que $\mathcal{P}_k$ soit vérifiée. On a alors :

$$\begin{aligned} u_m + ... + u_k + u_{k+1} &= u_m \times \frac{1-q^{k+1-m}}{1-q} + u_{k+1} \\ &= u_m \times \frac{1-q^{k+1-m}}{1-q} + u_{k+1} + q^{k+1-m} u_m \\ &= u_m \times \frac{1-q^{k+1-m} + (1-q)q^{k+1-m}}{1-q} \\ &= u_m \times \frac{1-q^{k+1-m} + q^{k+1-m} - q^{k+1-m+1}}{1-q} \\ &= u_m \times \frac{1-q^{k+2-m}}{1-q}. \end{aligned}$$

   La relation $\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vraie sous l'hypothèse $\mathcal{P}_k$. La propriété est héréditaire.
3. Initialisée au rang m et héréditaire, la relation $\mathcal{P}$ est donc vraie pour tout $n \geqslant m$.

Méthode 2 – Montrer qu'une suite est géométrique :

Une suite est géométrique si, et seulement si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$ donc, pour montrer :

— qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q, on montre que u_n n'est jamais nul et on exprime, pour n quelconque, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ indépendamment de n.

— qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique, on montre que u_n s'annule pour un certain n ou on trouve deux entiers m et n tels que $\dfrac{u_{m+1}}{u_m} \neq \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Théorème 1 – Suite aritmético-géométrique :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique définie par $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$.

Alors $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n(u_0 - c) + c \quad$ avec $\quad c = \dfrac{b}{1-a}$.

À retenir

Le réel c, solution de l'équation $x = ax + b$, est appelé *point fixe* de la suite.

Preuve :

1. On commence par résoudre l'équation $x = ax + b$ dont l'unique solution est

$$c = \frac{b}{1-a}.$$

Remarque : c est appelé « point invariant » ou « point fixe » de la fonction f associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $x \longmapsto ax + b$. On verra plus tard que c est l'unique candidat à la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. On introduit alors la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = u_n - c.$$

   a. La $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.
   En effet, des deux équations :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & au_n + b \\ c & = & ac + b \\ \hline u_{n+1} - c & = & a(u_n - c) \end{array}$$

   on obtient, par soustraction $v_{n+1} = av_n$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien une suité géométrique de raison a et de premier terme $v_0 = u_0 - c$.

   b. On en déduit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = a^n v_0 = a^n(u_0 - c).$$

3. On revient enfin à la suite initiale : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + c$.

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n(u_0 - c) + c \quad$ avec $\quad c = \dfrac{b}{1-a}$.

Remarque : La démonstration montre que la suite définie par $v_n = u_n - c$ est une suite géométrique de raison a.

Méthode 3 – Plan d'étude d'une suite arithmético-géométrique :

En pratique, en présence d'une suite arithmético-géométrique, on présentera les calculs de la façon suivante :

1. Recherche du point fixe c solution de l'équation $ax + b = x$.

2. Vérification que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - c$ est une suite géométrique.
3. Conclusion : expression du terme général u_n.

I.3 – Suites bornées

Définition 3 – Suites réelles majorées, minorées, bornées :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

— *majorée* s'il existe un réel M tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \mathrm{M}$.

— *minorée* s'il existe un réel m tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.

— *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

Attention

Les majorants (ou minorants) d'une suite sont, par définition des constantes. Une majoration (une minoration) de u_n par un réel **qui dépend** de n ne montre **PAS** que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (ou minorée).

Exemples 2 :

— La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1 et minorée par -1. Elle est donc bornée.

— La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
En revanche, elle n'est pas majorée (et donc non bornée).

— Toute suite croissante est minorée par son premier terme et toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Méthode 4 – Encadrer une suite :

Avant de se lancer, on réfléchira à la méthode la plus adaptée :

— En général, on étudie le signe de la différence $u_n - m$ ou $u_n - \mathrm{M}$.

— Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = f(n)$ ou $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut utiliser le tableau de variations de la fonction f pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, minorée ou bornée.

— Si le terme général est donné sous la forme d'un quotient, on peut majorer/minorer numérateur et dénominateur.

Méthode 5 – Suite non majorée :

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée :

— On se donne un réel A quelconque.

— On montre que l'on peut toujours trouver un terme de la suite plus grand que A en résolvant, par exemple, l'inéquation $u_n \geqslant \mathrm{A}$.

I.4 – Variations

Définition 4 – Suites monotones :

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles est :

— *croissante* si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

— *décroissante* si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.

— *stationnaire* si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+1}$.

Une suite croissante ou décroissante est dite *monotone*.

Attention
Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissante, ni monotones, ni rien.

Remarque
On parlera aussi de suites *strictement monotones* lorsque les inégalités larges ci-contre seront remplacées par des inégalités strictes.

Exemples 3 :

E1 • $u_n = (-1)^n$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$, $u_n = \tan(n)$ ne sont pas monotones.

E2 • La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \prod_{k=0}^{n}(100-k)$ est stationnaire à 0 à partir du rang $n = 100$.

Exemple 4 – Suite stationnaire :

Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $n \geqslant 0$, on pose $u_n = \cos\left(\dfrac{2\pi n!}{p!}\right)$.

Justifions que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Pour tout n supérieur à p, $\dfrac{n!}{p!} = (p+1)\ldots(n-1)n \in \mathbb{N}$ et $\dfrac{2\pi n!}{p!} \equiv 0 \mod 2\pi$ donc $u_n = 1$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire à partir du rang p.

Proposition 2 – Suites arithmétique et géométrique :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

P1 • Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison r :

(1) si $r \geqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,

(2) si $r = 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante,

(3) si $r \leqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,

P2 • Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique alors ses variations sont données par la position de sa raison q relativement à 1 et le signe de son premier terme u_0 :

(1) Si $q = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à 0 à partir de son deuxième terme.

À retenir
— Une suite arithmétique est donc monotone dans tous les cas.
— Si elle n'est pas constante, une suite géométrique est toujours strictement monotone.

(2) si $u_0 \geqslant 0$ et $q > 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante(strictement si $u_0 > 0$).

(3) Si $q = 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à u_0.

(4) Si $u_0 \geqslant 0$ et $0 < q < 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (strictement si $u_0 > 0$).

(5) Si $q < 0$ et $u_0 \neq 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

Comparer deux termes d'une suite est difficile à faire directement. On se ramène donc encore à comparer leur différence à 0 ou leur quotient à 1.

Méthode 6 – Montrer qu'une suite est croissante :

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :

— On exprime $u_{n+1} - u_n$, on factorise, réduit au même dénominateur, …

— À l'aide d'un tableau de signes, on montre que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

Méthode 7 – Montrer qu'une suite est croissante :

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous forme multiplicative et à termes strictement positifs est croissante :

— On exprime $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, on factorise, simplifie majore, minore, …

— On montre le numérateur est plus grand que le dénominateur *i.e.* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.

Exemple 5 – Suite croissante :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$.

Démontrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} = -\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} \geqslant 0.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

I.5 – Convergence et divergence

Il est temps de s'intéresser au comportement d'une suite lorsque $n \to +\infty$ *i.e.* son *comportement asymptotique*..

Deux cas, opposés l'un de l'autre se présentent : les suites convergentes et les suites divergentes. Parmi ces dernières, les divergentes vers l'infini et celle n'ayant pas de limites.

Définition 5 – Limite d'une suite réelle :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

D1 • On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si tout voisinage de ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang :

$$\forall\, \mathrm{V}_\ell \in \mathcal{V}(\ell), \exists\, n_o(\mathrm{V}_\ell) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies u_n \in \mathrm{V}_\ell.$$

En particulier :

(1) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *convergente* vers $\ell \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Attention
Le contraire de convergent n'est pas divergent vers l'infini !

(2) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *divergente* vers $+\infty$ si :

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, n_o(\mathrm{A}) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies u_n \geqslant \mathrm{A}.$$

(3) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *divergente* vers $-\infty$ si :

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, n_o(\mathrm{A}) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies u_n \leqslant \mathrm{A}.$$

D2 • On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge* si elle ne converge pas.

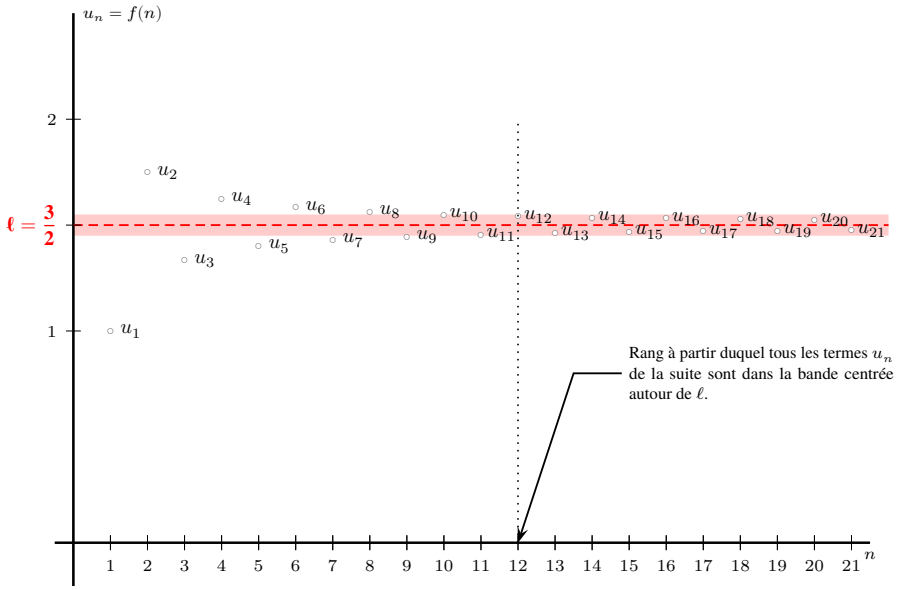


FIGURE I.3 : La suite définie par $u_n = \dfrac{3n + (-1)^n}{2n}$ converge vers $\ell = \dfrac{3}{2}$.

Rappel :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \iff u_n \in [\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon] \iff \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon.$$

Exemple 6 – Une suite sans limite :

La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

En effet, $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend que les valeurs 1 et -1 donc ne peut converger que vers une de ces valeurs.

Comme $\left[\frac{2}{3}\,;\frac{4}{3}\right]$ est un voisinage de 1 ne contenant pas $u_{2n+1} = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers 1. De même avec $\left[-\frac{4}{3}\,;-\frac{2}{3}\right]$ et $u_{2n} = 1$, $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers -1.

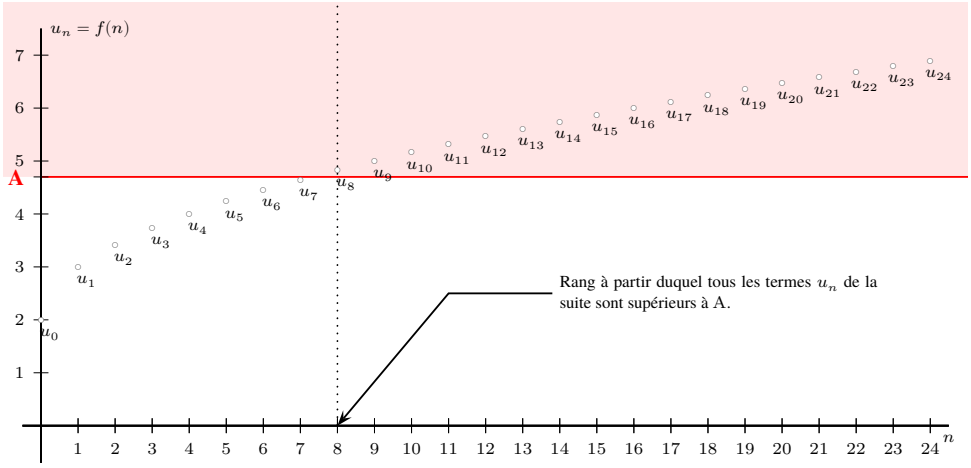


FIGURE I.4 : La suite définie par $u_n = \sqrt{n} + 2$ diverge vers $+\infty$.

Remarques : Le comportement asymptotique d'une suite ne dépend que du comportement de la suite à partir d'un certain rang.

Exemple 7 :

La suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Tout intervalle $[-a\,;a]$, $a \in \mathbb{R}^{+*}$, contenant 0 contient tous les termes de la suite à partir du rang $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{a} \right\rfloor + 1$.

Corollaire 3 – Suite à valeurs entières :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Z}$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si elle est stationnaire.

Remarque

Le résultat est bien entendu faux pour les suites réelles : la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, or elle n'est pas stationnaire.

Preuve :

($\Leftarrow$) : Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit stationnaire, et montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Par définition d'une suite stationnaire, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, n \geqslant \mathrm{N}, u_n = a$.
On a donc $\forall\, n \geqslant \mathrm{N}, |u_n - a| = 0$. Par conséquent, $\forall\, \varepsilon > 0, \forall\, n \geqslant \mathrm{N}, |u_n - a| < \varepsilon$.
On a prouvé que $\forall\, \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall\, n \geqslant \mathrm{N}, |u_n - a| < \varepsilon$. La suite converge donc.

$(\Rightarrow)$: On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrons qu'elle est stationnaire.
Soit ℓ sa limite.

— Montrons que $\ell \in \mathbb{Z}$.
Par l'absurde, supposons que $\ell \notin \mathbb{Z}$. En ce cas, on a $\lfloor \ell \rfloor < \ell < \lfloor \ell \rfloor + 1$.
On peut alors trouver $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ ne contienne aucun entier.
C'est absurde car il doit contenir tous les u_n.
On peut prendre $\varepsilon = \min\left(\dfrac{\ell - \lfloor \ell \rfloor}{2}, \dfrac{\lfloor \ell \rfloor + 1 - \ell}{2}\right)$.

— On sait désormais que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{Z}$. Montrons qu'elle est stationnaire en ℓ.
Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \ell$, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant \mathrm{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{10}$ *i.e.* $u_n \in \left[\ell - \dfrac{1}{10}, \ell - \dfrac{1}{10}\right]$.
Mais par ailleurs, l'intervalle $u_n \in \left[\ell - \dfrac{1}{10}, \ell - \dfrac{1}{10}\right]$ ne contient qu'un seul entier (ℓ) et u_n est entier.
D'où $\forall\, n \geqslant \mathrm{N}$, $u_n = \ell$. On a prouvé que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien stationnaire.

Proposition 4 – Convergence par majoration :

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

Si, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant \alpha_n$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.

Preuve : Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, il existe un rang n_1 à partir duquel $\alpha_n \leqslant \varepsilon$.
Pour $n \geqslant \max(n_0\,;n_1)$, on a donc $|u_n - \ell| \leqslant \alpha_n \leqslant \varepsilon$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Proposition 5 – Suites de référence :

P1 • $\forall\, p \in \mathbb{R}_+^*$, $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et $(n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$.

P2 • $\forall\, q \in]-1\,;1[$, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Preuve :

1. a. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\left|\frac{1}{n^p}\right| \leqslant \varepsilon \iff \frac{1}{e^{p\ln(n)}} \leqslant \varepsilon \underset{\varepsilon>0}{\iff} p\ln(n) \geqslant -\ln(\varepsilon) \underset{p>0}{\iff} n \geqslant e^{-\frac{1}{p}\ln(\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt[p]{\varepsilon}}.$$

Il suffit donc de poser $n_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt[p]{\varepsilon}} \right\rfloor + 1$.

b. Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$. Sans perte de généralités, on peut supposer $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+^*$.

$$|n^p| \geqslant \mathrm{A} \iff e^{p\ln(n)} \geqslant \mathrm{A} \underset{\mathrm{A}>0}{\iff} p\ln(n) \geqslant \ln(\mathrm{A}) \underset{p>0}{\iff} n \geqslant e^{\frac{1}{p}\ln(\mathrm{A})} = \sqrt[p]{\mathrm{A}}.$$

Il suffit donc de poser $n_0 = \left\lfloor \sqrt[p]{\mathrm{A}} \right\rfloor + 1$.

2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Si $q = 0$, le résultat est clair. Sinon, on cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$ implique

$$|q^n| = |q|^n \leqslant \varepsilon \iff n\ln|q| \leqslant \ln(\varepsilon) \underset{|q|<1}{\iff} n \geqslant \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln|q|}.$$

Il suffit donc de poser $n_0 = \left\lfloor \dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln|q|} \right\rfloor + 1$.

Corollaire 6 – Divergence des suites arithmétiques :

Une suite arithmétique de raison r diverge (vers $\pm\infty$) si, et seulement si $r \neq 0$.

Théorème 7 – Unicité de la limite :

Si une suite converge alors sa limite est unique.

On peut donc légitimement parler de LA limite d'une suite convergente.

Par la contraposée, si une suite possède plusieurs limites [1] alors elle diverge.

Par exemple, la suite définie par $u_n = (-1)^n$ qui possède deux valeurs d'adhérence 1 et -1 est divergente.

Preuve : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Supposons qu'elle admette deux limites distinctes ℓ et ℓ' et soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left|\ell - \ell'\right| \leqslant |u_n - \ell| + |u_n - \ell'|.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

— Par convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ, $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_1 \implies |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

— Par convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ', $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_2 \implies |u_n - \ell'| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Idée
Si vous n'êtes pas convaincus, posez $\varepsilon < \dfrac{|\ell - \ell'|}{2}$.

Pour $n \geqslant n_0 = \max(n_1\,;n_2)$, $\left|\ell - \ell'\right| \leqslant \varepsilon$. Majoration vraie pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ donc $\ell = \ell'$.

Proposition 8 – Limite et relation d'ordre :

Toute suite (réelle ou complexe) convergente est bornée.

Preuve : Posons $\varepsilon = 1$. Alors il existe un $n_0(1) \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0 \implies |u_n - \ell| \leqslant 1$.

D'où $\forall\, n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|$ d'après l'inégalité triangulaire.

Posons $\mathrm{M} = \max\left(|u_0|,\ |u_1|,\ \ldots, |u_{n_0-1}|, 1 + |\ell|\right)$.

On a alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant \mathrm{M}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

ATTENTION

La réciproque est encore fausse toujours en considérant $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

[1]. En mathématiques, on parle plutôt de valeurs d'adhérence. C'est mieux que de parler de plusieurs limites alors que l'on vient de dire qu'elle était unique.

Exemple 8 – L :

suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie $\forall\, n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (1+i)^n$ diverge.

Petit corollaire intéressant pour montrer, par exemple, qu'une suite convergeant vers un réel non nul est non nulle du même signe à partir d'un certain rang.

Corollaire 9 :

C1 • Toute suite convergeant vers un réel ℓ strictement positif ou divergeant vers $+\infty$ est minorée par un réel m strictement positif à partir d'un certain rang.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ et } \ell > 0 \implies \exists m \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m > 0.$$

C2 • Toute suite convergeant vers un réel ℓ strictement négatif ou divergeant vers $-\infty$ est majorée par un réel M strictement négatif à partir d'un certain rang.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ et } \ell < 0 \implies \exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}_-^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \mathrm{M} < 0.$$

Preuve :

1. — Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il suffit de prendre $\mathrm{A} = 1$ pour avoir $u_n \geqslant 1 > 0$ dès que $n \geqslant n_0(\mathrm{A})$ donné par la divergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   — Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, prenons $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0$.

   Il existe alors un rang n_0 au delà duquel $-\dfrac{\ell}{2} \leqslant u_n - \ell \leqslant \dfrac{\ell}{2} \implies 0 < \dfrac{\ell}{2} \leqslant u_n$.

   Ainsi, dans les deux cas, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée à partir d'un certains rang par un réel strictement positif.

2. Identique

Théorème 10 – Limites et inégalités strictes :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers un réel ℓ et et m, $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$.

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \mathrm{M}$ alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n < \mathrm{M}$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > m$ alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n > m$.

Preuve : Il suffit d'appliquer le corollaire (9) aux suites $u_n - \mathrm{M}$ et $u_n - m$.

Théorème 11 – Limites et inégalités larges :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles possédant une limite finie.

$$\text{Si } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Remarque

Ce résultat est utilisé le plus souvent lorsque l'une des deux suites est constante.

Attention

C'est **TRÈS** faux avec des inégalités STRICTES !
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} > 0$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Exemple 9 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente avec $u_n \leqslant A$ à partir d'un certain rang.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant A$.

Théorème 12 – Composition à gauche par une fonction :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$, $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une application et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I.

$$\text{Si } \begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \quad \text{alors} \quad f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Exemples 10 – Importants :

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
- Si f est continue en a et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x$.

En appliquant le théorème précédent aux fonctions de référence, on retrouve facilement les limites de quelques suites intuitives :

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. — $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$. — …

Exemples 11 :

- $\arctan(\sqrt{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$.
- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > 0$ alors $u_n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ indépendant de n.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- $n^{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

ATTENTION

Les derniers exemples montrent que 1^∞ est une forme indéterminée :

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \end{cases} \quad \cancel{cancelType = x, linecolor = Att@style, linewidth = 2pt} \implies u_n^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

De même ∞^0 est une forme indéterminée :

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{cases} \quad \cancel{cancelType = x, linecolor = Att@style, linewidth = 2pt} \implies u_n^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

En tout état de cause, il faudrait en rajouter d'autres : 0^0, 0^∞ et ∞^∞ que nous traiterons au cas par cas en nous ramenant aux précédentes.

En composant avec les limites usuelles de fonctions et en remarquant que $t^n = \mathrm{e}^{n\ln t}$ pour $t > 0$, on retrouve encore les limites usuelles.

Corollaire 13 – Limites usuelles et croissances comparées :

Puissances de n : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

	$\alpha < 0$	$\alpha = 0$	$\alpha > 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha$	0	1	$+\infty$

Croissances comparées : Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \in \mathbb{R}$, $q > 1$ et $x \in]-1\,;1[$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{q^n} = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha x^n = 0$

I.6 – Opérations algébriques sur les limites

Un peu d'histoire : *Les théorèmes qui suivent étaient jugés évidents au XVIII^{ème} siècle. Une tentative de démonstration aurait alors paru incongrue et superflue. Ces démonstrations nous sont cependant nécessaires pour plusieurs raisons :*

- *Montrer l'efficacité de notre définition de limite.*
- *Justifier la validité de notre intuition.*
- *Servir de modèle de démonstration pouvant être utilisé dans des cas plus complexes.*

Les résultats de certaines opérations sur les limites sont intuitifs et parfaitement déterminés.

Proposition 14 – Stabilité algébrique :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles admettant des limites ℓ et ℓ'.

Somme :

Attention

Les opérations $(+\infty)+(-\infty)$, $0\times(+\infty)$, $0\times(-\infty)$, $\dfrac{0^\pm}{0^\pm}$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $(0^\pm)^{\pm\infty}$ et $(\pm\infty)^{0^\pm}$ ne sont pas définies et appelées « formes indéterminées », c'est-à-dire qu'elles conduisent à plusieurs résultats possibles

Si $\ell + \ell'$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$.

Multiple :

Si $\lambda.\ell$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $\lambda.u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda.\ell$.

Produit :

Si $\ell \times \ell'$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $u_n \times v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \times \ell'$.

Inverse :

Si $\dfrac{1}{\ell}$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$.

Quotient :

Si $\dfrac{\ell}{\ell'}$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\ell}{\ell'}$.

À retenir

En particulier, l'ensemble des suites convergentes contient la suite nulle et est stable par combinaisons linéaires. C'est un *espace vectoriel*.
Dans la même idée, l'opérateur lim est un opérat

Attention L'ensemble des suites divergentes N'EST PAS stable par combinaisons linéaires.

Exemples 12 :

E1 • $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty \implies \dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

E2 • $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \implies \left|\dfrac{1}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Preuve :

Somme :

— Somme de deux limites finies ℓ et ℓ' : Soit $\varepsilon > 0$.

$$|u_n + v_n - (\ell + \ell')| \leqslant |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|.$$

Il suffit alors de prendre $\mathrm{N} = \max\left(n_{0,u_n}\left(\ell, \dfrac{\varepsilon}{2}\right); n_{0,v_n}\left(\ell', \dfrac{\varepsilon}{2}\right)\right)$.

— Somme d'une limite finie ℓ et d'une limite $+\infty$: On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
Soit $\mathrm{A} > 0$. Par hypothèse, $|u_n - \ell| < 1$ à partir d'un certain rang $n_0(1)$, donc, en particulier :

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ u_n > \ell - 1.$$

De même, pour $n \geqslant n_1(\mathrm{A} - \ell + 1)$, $v_n > \mathrm{A} - \ell + 1$.
Pour $n \geqslant \mathrm{N} = \max(n_0\,; n_1)$, on a donc :

$$u_n + v_n \geqslant (\ell - 1) + (\mathrm{A} - \ell + 1) = \mathrm{A}.$$

— Somme de deux limites $+\infty$: Soit $\mathrm{A} > 0$ et posons $\mathrm{N} = \max\left(n_{0,u_n}\left(\dfrac{\mathrm{A}}{2}\right); n_{0,v_n}\left(\dfrac{\mathrm{A}}{2}\right)\right)$.
Alors, pour $n \geqslant \mathrm{N}$, $u_n + v_n \geqslant \mathrm{A}$.

Produit et multiple :

— Produit de deux limites finies ℓ et ℓ' : Soit $\varepsilon > 0$.

$$|u_n v_n - \ell\ell'| \leqslant |(u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell')| \leqslant |u_n + \ell||v_n| + |\ell||v_n - \ell'|.$$

Or, d'après la proposition (8) , la suite convergente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, disons par un réel $\mathrm{K} > 0$.

Il suffit alors de prendre $\mathrm{N} = \max\left(n_{0,\,u_n}\left(\ell,\,\dfrac{\varepsilon}{2\mathrm{K}}\right) ; n_{0,\,v_n}\left(\ell',\,\dfrac{\varepsilon}{2|\ell|}\right)\right)$.

Remarque : Si jamais il arrivait que ℓ ou K soient nuls, il suffirait de prendre respectivement $n_{0,\,v_n}\left(\ell',\,\dfrac{\varepsilon}{2(|\ell|+1)}\right)$ ou $n_{0,\,u_n}\left(\ell,\,\dfrac{\varepsilon}{2(\mathrm{K}+1)}\right)$ sans que l'inégalité finale ne soit changée.

— Produit d'une limite finie $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ et d'une limite $+\infty$: On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Soit $\mathrm{A} > 0$. Par hypothèse, $|u_n - \ell| < \dfrac{\ell}{2}$ à partir d'un certain rang $n_0\left(\dfrac{\ell}{2}\right)$, donc, en particulier :

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ u_n > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0.$$

De même, il existe un rang $n_1\left(\dfrac{2\mathrm{A}}{\ell}\right)$ à partir duquel $v_n > \dfrac{2\mathrm{A}}{\ell} > 0$.

Pour $n \geqslant \mathrm{N} = \max(n_0\,;n_1)$, en multipliant membre à membre deux inégalités de même sens strictement positives, on a donc :

$$u_n v_n > \frac{\ell}{2} \times \frac{2\mathrm{A}}{\ell} = \mathrm{A}.$$

— Produit de deux limites $+\infty$: Soit $\mathrm{A} > 0$ et posons $\mathrm{N} = \max\left(n_{0,\,u_n}\left(\sqrt{\mathrm{A}}\right) ; n_{0,\,v_n}\left(\sqrt{\mathrm{A}}\right)\right)$.
Alors, pour $n \geqslant \mathrm{N}$, $u_n v_n \geqslant \mathrm{A}$.

Il suffira de considérer $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme la suite constante à λ pour avoir la limite de la suite $(\lambda.u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour peu que $\lambda.\ell$ soit défini dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$.

Quotient :

— Inverse d'une limite non nulle ℓ : Soit $\varepsilon > 0$. On peut supposer $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ d'après le corollaire (9) .

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n||\ell|}.$$

Par définition de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant n_1 \implies |u_n - \ell| \leqslant \min\left(\frac{|\ell|}{2}\,;\frac{|\ell|^2\varepsilon}{2}\right).$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire, pour $n \geqslant n_1$:

$$\big||\ell| - |u_n|\big| \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \frac{|\ell|}{2} \implies |u_n| \geqslant |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2}.$$

Il suffit alors de prendre $\mathrm{N} = \max(n_0\,;n_1)$, pour avoir :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n||\ell|} \leqslant \frac{\dfrac{|\ell|^2\varepsilon}{2}}{\dfrac{|\ell|}{2} \times |\ell|} = \varepsilon.$$

— Inverse d'une limite infinie : On suppose $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to\mathbb{N}} u_n = +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $n_1\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ à partir duquel $u_n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Pour $n \geqslant \mathrm{N} = \max(n_0\,;n_1)$, on a donc :

$$\left|\frac{1}{u_n}\right| = \frac{1}{u_n} < \varepsilon.$$

— Inverse d'une limite nulle d'une suite strictement positive : On suppose $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

Soit $A > 0$. Il existe un rang n_1 $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ à partir duquel $|u_n| < \frac{1}{A}$.

Pour $n \geqslant N = \max(n_0 ; n_1)$, on a donc :

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{|u_n|} > A.$$

Exemple 13 – Cas de la forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$:

E1 • On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+\ell) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} ((n+\ell)-n) = \ell$.

E2 • On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n-n) = +\infty$.

E3 • On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} n+(-1)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+(-1)^n - n)$ n'a pas de limite.

Attention
$(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut avoir une limite sans que ce ne soit le cas pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ni $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 14 – Cas de la forme indéterminée $0 \times (\infty)$:

E1 • On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ell}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ell}{n} \times n = \ell$.

E2 • On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times n^2 = +\infty$.

E3 • On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \times n$ n'a pas de limite.

Attention
$(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ peuvent avoir des limites sans que ce ne soit le cas pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ni $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On résume tous ces résultats dans un tableau :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	$\ell \neq 0$		0	∞		$\ell \neq 0$	0	$+\infty$		$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	0		$\ell' \neq 0$	0	∞		$+\infty$	$-\infty$	
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$\ell + \ell'$	ℓ	0	∞				$+\infty$	F.I	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n =$	$\ell \times \ell'$	0		∞	FI	∞	F.I	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	∞	F.I	∞		0		F.I		

Méthode 8 – Techniques pour lever une F.I :

Afin de lever une F.I, on pourra penser à utiliser l'une des méthodes (plus généralement une combinaison des méthodes) suivantes.

M1 • Les développements limités sont la méthode à privilégier et draient arriver à déterminer toutes les limites que vous rencontrerez.

M2 • Penser à la quantité conjuguée lorsqu'il y a des racines.

M3 • Pour les fonctions puissances : retour à la définition à l'aide des fonctions exp et ln.

M4 • Penser aux croissances comparées.

M5 • Factoriser par le terme dominant *i.e.* celui qui tend le plus vite vers $\pm\infty$ ou le moins vite vers 0. Cela revient à trouver un équivalent simple de la suite.

M6 • Utilisation d'inégalités précédemment démontrées. Le théorème d'encadrement est souvent utilisé pour déterminer un équivalent ou pour montrer qu'une suite tend vers 0.

M7 • Utilisation du taux d'accroissement.

I.7 – Suites extraites

Théorème 15 – Suite extraite :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

T1 • Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ alors toute sous-suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette même limite ℓ.

T2 • Réciproquement, si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Attention
La convergence d'une ou plusieurs suites extraites n'est en général pas suffisante pour assurer la convergence d'une suite.

En pratique, ce théorème est souvent utilisé pour montrer qu'une suite N'A PAS DE LIMITE. Il suffit pour cela d'en exhiber deux suites extraites n'ayant pas la même limite.

Remarque : Si le comportement de la suite initiale détermine le comportement d'une suite extraite, la réciproque est beaucoup plus délicate. Une suite extraite ne pouvant, par nature, fournir qu'une information partielle sur la suite totale.

Méthode 9 – Montrer qu'une suite diverge à l'aide de suites extraites :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour montrer qu'elle diverge, on peut :

M1 • Trouver une sous-suite qui diverge vers $\pm\infty$.

M2 • Trouver deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes.

I.8 – Théorèmes d'existence de limites

L'existence d'une limite n'est JAMAIS acquise.

Les théorèmes qui suivent gagnent à être connus comme de vrais théorèmes d'existence. Ce qu'ils nous fournissent de façon essentielle, ce n'est pas tant la VALEUR d'une limite que son EXISTENCE.

Théorème 16 – de comparaison et d'encadrement :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

Théorème d'encadrement :
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n = \ell$ et si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $m_n \leqslant u_n \leqslant \mathrm{M}_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Théorème de minoration : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = +\infty$ et si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $m_n \leqslant u_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Théorème de majoration : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n = -\infty$ et si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \mathrm{M}_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Preuve :

Théorème d'encadrement : Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{V}_\ell = [\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon]$ un voisinage de ℓ.
La suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Il existe donc un rang $n_1(\varepsilon,\ell,m_n)$ à partir duquel tous les termes $m_n \in \mathrm{V}_\ell$.
De même pour la suite $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il existe un rang $n_2(\varepsilon,\ell,\mathrm{M}_n)$ à partir duquel tous les termes $\mathrm{M}_n \in \mathrm{V}_\ell$.
Pour $n \geqslant \mathrm{N} = max(n_0,n_1,n_2)$, on a donc

$$\ell-\varepsilon \leqslant m_n \leqslant u_n \leqslant \mathrm{M}_n \leqslant \ell+\varepsilon.$$

Tous les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent donc aussi à V_ℓ à partir d'un certain rang N *i.e.* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Théorème de minoration : Soit A un réel quelconque.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = +\infty$, il existe un entier $n_1(\mathrm{A},m_n)$ tel que si $n \geqslant n_1$ alors $m_n \in [\mathrm{A}\,;+\infty[$.
Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $m_n \leqslant u_n$.
Donc si $n \geqslant \max(n_0,n_1)$ alors $\mathrm{A} \leqslant m_n \leqslant u_n \in [\mathrm{A}\,;+\infty[$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Théorème de majoration : Identique.

Remarque
Ne prenez pas le théorème d'encadrement pour un simple passage à la limite dans des inégalités larges. Quand on passe à la limite dans une inégalité, on sait déjà que son membre de gauche et son membre de droite ont une limite.
Or, dans le théorème d'encadrement au contraire, seules les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n$ sont réputées exister au départ et l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ en découle.

Lemme 17 :

Soit $q \in \mathbb{R}$.

	$q>1$	$q=1$	$-1<q<1$	$q\leqslant -1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$	$+\infty$	1	0	n'existe pas

Preuve :

Si $q > 1$: $\forall\, n \geqslant 2, q^n = \big((q-1)+1\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{(q-1)^k}_{\geqslant 0} = 1+n(q-1)+\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (q-1)^k \geqslant n(q-1)$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n(q-1) = +\infty$ car $q > 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ d'après le théorème (16) de comparaison.

Si $|q| < 1$: Il suffit de poser $\mathrm{Q} = \dfrac{1}{|q|}$. Comme $-1 < q < 1$ alors $\mathrm{Q} > 1$.

D'après la démonstration précédente, la suite $(\mathrm{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge donc vers $+\infty$.

D'après les relations sur les limites de quotients, la suite $\left(\dfrac{1}{\mathrm{Q}^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 0 et le résultat est prouvé.

Si $q = 1$: Relativement évident.

Si $q < -1$: Il suffit de regarder les suites extraites $(q^{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(q^{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ qui divergent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$. La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc divergente.

Exemple 15 – Le grand classique :

Si $x \in]-1\,;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$.

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q alors $u_n = u_o q^n$. Le lemme précédent permet donc de trouver sa limite :

Corollaire 18 – Limite d'une suite géométrique :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

— Si $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

— Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty \text{ si } u_0 > 0, \\ -\infty \text{ si } u_0 < 0. \end{cases}$

— Si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.

— Si $q \leqslant -1$ et $u_0 \neq 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Le théorème (16) d'encadrement est souvent utilisé sous la forme suivante :

Corollaire 19 – Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n u_n = 0$.

Preuve : Soit donc K un majorant de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a immédiatement $0 \leqslant |\varepsilon_n u_n| \leqslant \mathrm{K}|\varepsilon_n|$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{K}|\varepsilon_n| = 0$, d'après le théorème d'encadrement on obtient le résultat. ☑

Le théorème de la limite monotone est LE théorème d'EXISTENCE par excellence.

Théorème 20 – Limite monotone :

Toute suite monotone réelle admet une limite.

Plus précisément,

1. Toute suite croissante majorée converge (vers sa borne supérieure).
2. Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

L'énoncé est similaire pour les suites décroissantes.

À retenir

Si une suite monotone est bornée elle convergera, sinon elle divergera vers $\pm\infty$. Ce théorème donne toute sa force et leur importance aux suites monotones.

Autrement dit, toute suite monotone est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Attention

Ce théorème est un théorème d'existence, il justifie l'existence d'une limite finie mais ne précise pas cette limite mais seulement que c'est sa borne supérieure.

Preuve :

1. Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, un réel strictement positif quelconque et notons $\mathrm{M} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$, le plus petit des majorants de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a déjà, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \mathrm{M} < \mathrm{M} + \varepsilon$.
   - Tout intervalle $[\mathrm{M} - \varepsilon\,;\mathrm{M} + \varepsilon]$ contient au moins un terme u_p de la suite. Sinon, $\mathrm{M} - \varepsilon < \mathrm{M}$ serait un majorant de la suite, ce qui contredit le fait que M soit le plus petit des majorants.
   - Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour tout $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p \geqslant \mathrm{M} - \varepsilon$.
   - L'intervalle $[\mathrm{M} - \varepsilon\,;\mathrm{M} + \varepsilon]$ contient donc tous les termes de la suite à partir du rang p. Ceci est vrai, quel que soit le réel $\varepsilon > 0$.
   - La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite M.

   La démonstration est identique pour une suite décroissante et minorée.
2. Soit A un nombre réel quelconque.
   - Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, on peut trouver un entier p tel que $u_p \geqslant \mathrm{A}$.
   - La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, pour tout $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$ d'où $u_n \geqslant \mathrm{A}$.

   En conclusion, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, il suffira de considérer la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante puis appliquer les propositions précédentes. ☑

ATTENTION

Ce théorème permet de montrer qu'une suite converge vers une limite ℓ mais ne donne pas la valeur de cette limite. On peut seulement dire que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par M alors $\ell \leqslant \mathrm{M}$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par m alors $\ell \geqslant m$.

Remarque

La suite a une infinité de majorants ou de minorants suivant les cas mais un seul est sa limite.
La question et la difficulté sont de la trouver.

Ici encore, on voit une grande différence entre la question de prouver l'existence théorique et la recherche pratique de la dite limite qui peut demander à mettre en œuvre une quantité incommensurable de techniques qui feront les joies de vos devoirs de concours.

ATTENTION

La réciproque de ce théorème est fausse : si une suite diverge vers $+\infty$, elle n'est pas nécessairement croissante.

Il suffit de considérer la suite définie par $u_n = n + (-1)^n$ pour s'en convaincre.

De même, toute suite croissante majorée, donc convergente, sera un contre-exemple à une suite croissante qui ne diverge pas nécessairement vers $+\infty$ si on enlève la condition « non majorée ».

Enfin, il n'est pas nécessaire d'être monotone pour converger comme la suite définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $n > 0$.

I.9 – Suites adjacentes

Définition 6 – Suites adjacentes :

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si et seulement si :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Remarque
La définition impose que $\forall\, n \in \mathbb{N}$,
$u_n \leqslant v_n$.

Théorème 21 – Théorème des suites adjacentes :

Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent vers une même limite. [2]

Remarque
Le théorème (21) a de nombreuses applications.

Preuve :

- Montrons tout d'abord que les deux suites sont convergentes.
  Considérons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par exemple. Celle-ci étant croissante, il suffit de montrer qu'elle est majorée.
  D'après la remarque, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.
  Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant u_n \leqslant v_0$.
  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée.
  D'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers une limite ℓ.
  On montre de même que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ'.
- Enfin l'assertion $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0 \iff \ell - \ell' = 0$ entraîne que les deux suites convergent vers la même limite.

Remarque : En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$: u_n et v_n sont des valeurs approchées de ℓ, respectivement par défaut et par excès à $v_n - u_n$ près.

[2]. Pas de soirée « *no limit* » pour nos suites adjacentes !

Exemple 16 – Une série célèbre :

À l'aide des suites $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour $n \geqslant 1$ par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{n}$$

montrons que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.

Il suffit de montrer que les suites $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$ donc $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
2. $T_{n+1} - T_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)(n+1)} - \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{\leqslant (n+1)(n+1)} \leqslant 0$ donc $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n - S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Les suites $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ sont donc adjacentes.
La suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ (de même que $(T_n)_{n\geqslant 1}$) est donc convergente.

I.10 – Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

En mathématiques, on appelle suite récurrente linéaire d'ordre p toute suite à valeurs dans un corps commutatif comme $\mathbb{R}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par une relation de récurrence linéaire de la forme :

$$\forall\, n \geqslant n_0 \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n,$$

où a_0, a_1, … a_{p-1} sont p scalaires fixés de K, a_0 non nul).

Une telle suite est entièrement déterminée par la donnée de ses p premiers termes et par la relation de récurrence.

Les suites récurrentes linéaires d'ordre 1 sont les suites géométriques.

Exemple 17 – Point de vue matriciel :

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

La relation de récurrence sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se résume alors à une relation de récurrence d'ordre 1 sous la forme $U_{n+1} = AU_n$ mais dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Le terme général de la suite U_n est alors déterminé par $U_n = A^n U_0$. Le problème semble alors terminé. Mais la réelle difficulté consiste alors à calculer A^n…..

Définition 7 – Suite récurrente linéaire d'ordre 2 :

On appelle *récurrente linéaire d'ordre 2* toute suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad \text{avec} \quad (a\,;b) \in \mathbb{R}^2. \tag{I.1}$$

Remarque : Si $b = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a. Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 1.

Définition 8 – Équation caractéristique :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par (I.1).

On appelle *équation caractéristique* associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'équation

$$x^2 - ax - b = 0.$$

Remarque : L'hypothèse $b \neq 0$ assure qu'il s'agit bien d'une relation de récurrence d'ordre 2. En particulier, 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique.

Théorème 22 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique.

T1 • Si $\Delta > 0$ et r_1, r_2 sont les deux racines distinctes et réelles de l'équation caractéristique, alors

$$\exists !\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda {r_1}^n + \mu {r_2}^n.$$

T2 • Si $\Delta = 0$ et r est la racine double de l'équation caractéristique, alors

$$\exists !\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n) r^n.$$

T3 • **(Hors-Programme)** Si $\Delta < 0$ et $re^{\pm i\omega}$ sont les deux racines complexes et conjuguées de l'équation caractéristique, alors

$$\exists !\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \Big(\lambda\cos(\omega n) + \mu\sin(\omega n)\Big)\, r^n.$$

Preuve :

T1 • Supposons d'abord que l'équation admette deux solutions réelles $r_1 \neq r_2$.

Analyse : Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

On cherche $(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant cette relation.

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient $\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = u_1 \end{cases}$.

Comme $r_1 \neq r_2$, ce système admet une unique solution

$$(\lambda\,;\mu) = \left(\frac{u_1 - r_2 u_0}{r_1 - r_2}\,;\frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}\right).$$

Si λ et μ conviennent, alors leur valeur est donnée par la résolution de ce système et donc le couple $(\lambda\,;\mu)$ sera unique.

Synthèse : Montrons alors par une récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n,$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par définition de $(\lambda\,;\mu)$, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vérifiées.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies.
Par hypothèse de récurrence, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ et $u_{n+1} = \lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a u_{n+1} + b u_n = a(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b(\lambda r_1^n + \mu r_2^n) \\ &= \lambda r_1^n (a r_1 + b) + \mu r_2^n (a r_2 + b) = \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2}. \end{aligned}$$

car $r_1^2 = a r_1 + b$ et $r_2^2 = a r_2 + b$.
Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
En conclusion, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

T2 • Supposons maintenant que l'équation admette une solution double réelle $r \neq 0$.

Analyse : Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$. On cherche $(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant cette relation.
Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient $\begin{cases} \lambda = u_0 \\ \lambda r + \mu r = u_1 \end{cases}$.
Le déterminant de ce système est $r \neq 0$, donc il admet une unique solution

$$(\lambda\,;\mu) = \left(u_0\,; \frac{u_1 - r u_0}{r}\right).$$

S'il existe, le couple $(\lambda\,;\mu)$ sera unique.

Synthèse : Montrons alors par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \ u_n = \lambda r^n + \mu n r^n.$$

Par définition de $(\lambda\,;\mu)$, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vérifiées.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.
Par hypothèse de récurrence, $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$ et $u_{n+1} = \lambda r^{n+1} + \mu(n+1) r^{n+1}$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a u_{n+1} + b u_n = a(\lambda r^{n+1} + \mu(n+1) r^{n+1}) + b(\lambda r^n + \mu n r^n) \\ &= \lambda r^n (a r + b) + \mu n r^n (a r + b) + \mu r^{n+1} a \\ &= \lambda r^{n+2} + \mu(n+2) r^{n+2} \text{ car } r^2 = a r + b \text{ et } r = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
En conclusion, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

T3 • Le cas complexe $r_1 \neq r_2$ est hors-programme.

Exemple 18 – Suite de Fibonnacci [3] :

Un exemple classique de chez classique, la suite de Fibonacci définie par $\mathrm{F}_0 = 0$, $\mathrm{F}_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n.$$

Cette suite a pour équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 1 + 4 = 5$ et dont les racines sont :

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \psi = -\frac{1}{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

On peut donc écrire $\mathrm{F}_n = \lambda\phi^n + \mu\psi^n$ puis, avec les conditions initiales qui imposent $\lambda = -\mu = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$:

$$\mathrm{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n).$$

Méthode 10 – Plan d'étude des suites récurrentes linéaires :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique E_c.

M1 • On résout l'équation caractéristique. Le type des racines donne la forme explicite

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n \quad \text{ou} \quad u_n = (\lambda n + \mu)r^n,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

M2 • À l'aide de u_0 et u_1 on détermine λ et μ en résolvant un système linéaire.

Remarque

u_0 et u_1 sont les conditions initiales de la suite comme pour les équations différentielles.

Exemple 19 :

Déterminons u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sachant que $\begin{cases} u_0 = -1,\ u_1 = 0 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$.

$\mathrm{E}_c : r^2 - 4r + 4 = 0$ a une solution double 2.
D'après le cours, il existe k_1 et k_2 tels que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (k_1 n + k_2)2^n.$$

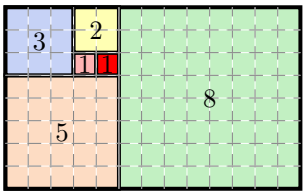
⌊3⌋. **FIBONACCI Leonardo**, italien, **1175**?-**1240**?. De son vrai nom Léonard de Pise, dit Fibonacci (signifiant « fils de Bonaccio »), Leonardo est le fils d'un administrateur de la ville de Pise. Commerçant et grand voyageur, il parcourut l'Europe et les pays d'orient tout en s'imprégnant des mathématiques de son époque inspirées des mondes grecs, indiens et arabes.

Dans son *Liber Abaci* (Livre de calcul), publié en 1202, principalement consacré aux calculs commerciaux, il affine et résout des problèmes algébriques déjà rencontrés dans l'œuvre du mathématicien **Al Khwarizmi**.

Fibonacci fait grand usage des nombres dits « arabes »(système décimal positionnel), du calcul fractionnaire et de la méthode de résolution des équations, dite de fausse position. Il publiera aussi un traité de géométrie, *Practica geometriae* (1220), où il applique des méthodes algébriques à des problèmes géométriques, et un traité sur le calcul des racines carrées et cubiques (*Liber Quadratorum*, 1225).

Le *Liber Abaci* est aussi un recueil de « petits » problèmes comme celui, resté célèbre, de la reproduction des lapins :

Possédant au départ un couple de lapins, combien de couples de lapins obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ?



On est ainsi conduit à la célèbre séquence des nombres de Fibonacci.

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k_2 = -1 \\ (k_1 + k_2) \times 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = 1 \end{cases}.$$

En conclusion,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n-1)2^n.$$

II. Séries numériques réelles

Définition 9 – Suites des sommes partielles :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

D1 • On appelle *série de terme général* u_n, notée $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou $\sum u_n$, la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Vocabulaire : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

- ◇ u_n s'appelle le *terme général* de rang n.
- ◇ S_n s'appelle la *somme partielle* de rang n.

D2 • On dit que *la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge* lorsque la suite des sommes partielles $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Vocabulaire : Dans ce cas,

- ◇ la limite de $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et appelée *somme de la série* :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n.$$

- ◇ On appelle *reste de rang* n l'élément R_n défini par :

$$\mathrm{R}_n = \mathrm{S} - \mathrm{S}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

D3 • Lorsque la série ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*.

Vocabulaire : Déterminer la nature d'une série revient à se poser la question de sa convergence.

En particulier, deux séries sont dites *de même nature* si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Remarques et commentaires :

— Ne pas confondre suite et série : $\sum u_n$ est une série. C'est la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— On s'intéresse essentiellement à la nature de la série et non de la suite, notions qui n'ont souvent rien à voir.

— La notation $\sum_{n\in\mathbb{N}}$ ne présume en rien de la convergence de la série et donc de l'existence de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

— Écrire la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ suppose implicitement que la série converge. On prendra donc bien garde à n'utiliser ce symbole que dans ce cas.

— $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la somme de la série. C'est un nombre (réel ou complexe) [4].

— Dans le cas de convergence, on peut remarquer que la suite $(\mathrm{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{R}_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S} - \mathrm{S}_n = 0.$$

Le reste d'ordre n représente l'erreur commise lorsque l'on remplace la somme S par la n$^{\text{ème}}$ somme partielle.

— Les premiers termes d'une suite ne changent pas la nature de la série : $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Attention
Deux séries peuvent être de même nature sans avoir la même somme.

— Enfin, remarquez que $\mathrm{S}_0 = u_0$ et $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1}$.
Le terme général définit la série et la réciproque est vraie : si l'on connaît la série, on peut donc retrouver son terme général.
Par exemple, si on sait que, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, la somme partielle S_n est définie par $\mathrm{S}_n = 1 - \dfrac{1}{n+2}$, alors $\mathrm{S}_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1} = \left(1 - \dfrac{1}{n+2}\right) - \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$
$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Exemple 20 – Série géométrique :

Les *séries géométriques* de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ où z est un nombre complexes sont convergentes si, et seulement si $|z|<1$ et on a :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{n+1}}{1-z} \xrightarrow[|z|<1]{n\to+\infty} \frac{1}{1-z}.$$

De plus, lorsque $|z|<1$, on a $\mathrm{R}_n = \dfrac{z^{n+1}}{1-z}$.

[4]. En conséquence, il ne diverge ou ne converge pas, il n'est équivalent à rien, il ne se dérive pas autrement que pour donner 0, il ne bouge pas, …

Remarque : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$. C'est, à une constante multiplicative près, le temps mis par Achille pour rejoindre la tortue.

Exemple 21 – Série harmonique :

La série harmonique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge.[a]

a. Son nom *harmonique* vient du fait qu'un terme est la moyenne harmonique des termes qui l'encadrent. Rappelons que la moyenne harmonique m_h de deux réels positifs a et b est définie par $\frac{2}{m_h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Ici, on a bien $2\left(\frac{1}{n}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{n-1}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{-1}$.

Les manières de montrer ce résultat sont nombreuses.
On a, par exemple,

$$\mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Si la série convergeait vers un réel S, on aurait alors, par passage à la limite, $0 = \mathrm{S} - \mathrm{S} \geqslant \frac{1}{2}$ ce qui est impossible.
Donc H_n diverge mais on ne sait pas encore si elle a une limite. Patientez jusqu'à l'exemple (26) !

Exemple 22 – Série télescopique :

Les *séries télescopiques* de la forme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n)$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Par exemple, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

$$\begin{aligned}\text{En effet, } \mathrm{S}_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\\ &= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \ldots - \cancel{\frac{1}{n}}\Big) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)\\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.\end{aligned}$$

D'une manière générale,

Proposition 23 – Série télescopique] :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(u_{n+1}-u_n\right)$ sont de même nature et on a :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n}\left(u_{k+1}-u_k\right)=u_{n+1}-u_0.$$

On peut donc étudier une suite en se servant des techniques spécifiques de la théorie des séries, ou au contraire étudier une série au moyen des techniques spécifiques de la théorie des suites.

Remarque : La simplification télescopique est l'analogue discret du théorème fondamental du calcul intégral.

En effet, la suite $\left(a_{n+1}-a_n=\dfrac{a_{n+1}-a_n}{n+1-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est en quelque sorte la « dérivée » de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tout comme la fonction f' définie par une limite de taux d'accroissement est la dérivée de la fonction f.

Or, comment passe-t-on de f' à f ? On somme au sens du calcul intégral, tout comme on le fait avec les suites dans le cadre d'une simplification télescopique :

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a)\quad\Longleftrightarrow\quad\sum_{k=m}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=a_n-a_m.$$

Exemple 23 :

Étudions les séries de terme général $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ et $\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

— $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln(n)$.

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, de même nature que $(\ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, est donc divergente (vers l'infini).

— $\forall\, n\geqslant 2,\ v_n=\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{1}{\frac{n}{n+1}}\right)$

$$=\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

Comme $\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, la série $\sum_{n\geqslant 2}\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge et on a :

$$\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\ln 2.$$

Exemple 24 – Série exponentielle :

$\forall\, z\in\mathbb{C}$, la série exponentielle $\sum\dfrac{z^n}{n!}$ est convergente et on a :

$$\forall\, z\in\mathbb{C},\quad\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=\exp(z).$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $f : x \longmapsto \exp(zx)$ est clairement de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est $x \longmapsto z^n \exp(zx)$.
L'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0\,;1]$ s'écrit :

$$\left|f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| = \left|\exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \left|z^{n+1}\exp(zx)\right|.$$

En notant $z = a + ib$, on obtient $|\exp(zx)| = \exp(ax) \leqslant \exp(|a|)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.
On en déduit :

$$\left|\exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\exp(|a|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On conclut avec le théorème d'encadrement.

Proposition 24 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors, la série $\sum(\lambda u_n + v_n)$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Preuve : La somme partielle associée à la série de terme général $\lambda u_n + v_n$ est $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k + v_k)$.

La linéarité de la somme permet d'écrire :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k + v_k) = \lambda\sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Or, l'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel.

Donc, la suite $\left(\lambda\sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente *i.e.* la série $\sum(\lambda u_n + v_n)$ converge.

Il suffit alors d'utiliser la linéarité de l'application limite sur ce même espace :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lambda\sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k\right) = \lambda\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k + \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} v_k = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Donc, $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Corollaire 25 :

L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel.

Pour le produit, c'est un peu plus compliqué et demande une notion de convergence un peu plus forte…

ATTENTION

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, il est possible que $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge … L'ensemble des séries divergentes n'est pas stable par combinaisons linéaires.

Pire pour vous, même si $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, il est possible que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent.

Il est donc INTERDIT de découper une somme de série en deux comme écrire $\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda\sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \mu\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ sans avoir vérifié que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ étaient convergentes.

Retenez pour cela l' exemple (22) : La série $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ converge au contraire des deux séries $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$.

II.1 – Condition nécessaire de convergence

Une première conséquence des théorèmes généraux, condition nécessaire de convergence qui sera le plus souvent un critère de divergence :

Proposition 26 :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge} \implies \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Attention
La réciproque est fausse comme le montre la divergence de la série harmonique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$ ou de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Preuve : Il suffit de remarquer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - S_{n-1}$.

Par linéarité de la limite, si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente également et $\lim_{n\to+\infty} u_n = S - S = 0$.

Le terme général d'une série convergente doit tendre vers 0.

Par la contraposée, s'il ne le fait pas alors la série diverge. On dit dans ce cas que la série *diverge grossièrement*.

Exemples 25 – Séries grossièrement divergentes :

— Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n}{n+1}$ diverge.

— De même, $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement) si $\alpha \leqslant 0$.

— Enfin, comme $(-1)^n$ n'a pas de limite, la série $\sum(-1)^n$ de l' exemple (??) diverge de même que les séries du type $\sum\sin(n)$.

II.2 – Séries à terme positif

Le théorème (43) du paragraphe (??) donnera une place toute particulière aux séries à terme positif par la condition suffisante de convergence :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \text{ converge} \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.}$$

Dans tout ce paragraphe, on considèrera des séries numériques réelles à terme positif (au moins à partir d'un certain rang) *a fortiori* réel.

Si les séries sont à terme négatif, en travaillant sur la série des opposés et en utilisant la linéarité de la somme, on obtient les mêmes résultats. Les théorèmes de ce paragraphe s'appliquent donc à toutes les séries à *terme de signe constant*.

Dans le cas des séries à terme positif, la suite des sommes partielles $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est donc équivalent à trouver un majorant.

Théorème 27 :

T1 • Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ à terme positif converge si, et seulement si la suite $\left(\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est majorée :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge} \iff \exists\, \mathrm{M} > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_n \leqslant \mathrm{M}.$$

T2 • Le seul cas de divergence est la limite infinie.

Preuve : Comme $\sum u_n$ est une série à terme positif, la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est une suite croissante.

Il suffit alors d'appliquer le théorème de la limite monotone … valable que dans $\mathbb{R}$ donc !

Exemple 26 :

La série harmonique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n}$ à terme positif diverge donc vers $+\infty$.

Exemple 27 – Série de Riemann convergente :

$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge.

En effet, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 2 - \frac{1}{n}$.
La suite des sommes partielles est donc majorée. Elle converge vers un réel inférieur à 2. [5]

[5]. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

II.3 – Condition suffisante de convergence

Définition 10 – Séries absolument convergentes :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.

On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si la série $\sum |u_n|$ converge.

Par linéarité de la somme et l'inégalité triangulaire, l'ensemble des séries absolument convergentes hérite aussi d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Théorème 28 – CA $\Longrightarrow$ CV :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.

Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle converge, et on a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Attention

La convergence de $\sum |u_n|$ est une condition suffisante pour que $\sum u_n$ converge.
Elle n'est pas nécessaire : il existe des séries $\sum u_n$ convergentes telles que $\sum |u_n|$ diverge. Ces séries sont appelées *semi-convergentes*.

Preuve :

1. On suppose dans un premier temps que la série est à terme réel.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose alors $\begin{cases} u_n^+ = \max(0, u_n) \\ u_n^- = \max(0, -u_n) \end{cases}$.

   On a donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} 0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n| \\ 0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n| \end{cases}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_n = u_n^+ - u_n^- \\ |u_n| = u_n^+ + u_n^- \end{cases}$.

   Comme $\sum |u_n|$ converge, les séries à terme positif $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont donc convergentes. Soient ℓ^+, ℓ^- leurs limites.

   On a $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (u_k^+ - u_k^-) = \sum_{k=0}^{n} u_k^+ - \sum_{k=0}^{n} u_k^- \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^+ - \ell^-$ *i.e.* la série $\sum u_n$ converge.

   De plus, on a $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| = |\ell^+ - \ell^-| \leqslant |\ell^+| + |\ell^-| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

2. Si la suite est à terme complexe, on pose $u_n = a_n + ib_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

   On a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} |a_n| \leqslant |u_n| \\ |b_n| \leqslant |u_n| \end{cases}$. Par comparaison de séries à terme positif, les séries à terme réel $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes donc convergentes.

   La stabilité de l'ensemble des suites convergente par combinaisons linéaires entraîne que la série $\sum u_n$ converge.

   Comme $\forall\, N \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n|$, par passage à la limite, $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Exemple 28 :

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge.

En effet, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ converge donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument. Elle converge.

Programme Compléments sur les suites et séries réelles

Ce que dit le programme en ECG2 :

L'objectif de ce paragraphe est d'introduire de nouveaux outils d'étude des suites et des séries, en particulier les critères de comparaison, tout en consolidant les acquis de première année.

1 – Comparaison des suites réelles

Suite négligeable devant une suite, suites équivalentes.	Notations $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$. On réécrira les croissances comparées de première année. On pratiquera des études du comportement asymptotique de suites.

Ce que disait le programme en ECG1 :

I. Suites de nombres réels

L'étude des suites numériques au premier semestre permet aux étudiants de consolider la notion de suite réelle et de convergence abordée en classe terminale. Tout exposé trop théorique sur ces notions est à exclure.

Cette première approche des suites élargit la conception de la notion de fonction.

Les calculs d'intérêts, d'amortissement ou de multiplicateurs keynesiens peuvent les mettre en situation. L'étude des suites classiques pourra être motivée puis se faire en lien étroit avec la partie probabilités pour mettre en avant l'utilité de cet outil numérique.

On utilisera autant que possible la représentation graphique des suites pour illustrer ou conjecturer leur comportement, en particulier pour illustrer la notion de convergence.

1 – Généralités sur les suites réelles

Définitions, notations.

Exemples de définitions : par formules récursives ou explicites, par restriction d'une fonction de variable réelle aux entiers.

2 – Suites usuelles : formes explicites

Suite arithmétique, suite géométrique.	Formule donnant $\sum_{k=0}^{n} q^k$. Calculs de sommes portant sur les suites arithmétiques et géométriques.
Suite arithmético-géométrique.	Les étudiants devront savoir se ramener au cas d'une suite géométrique.

3 – Convergence d'une suite réelle

Aucune démonstration concernant les résultats de cette section n'est exigible.

Limite d'une suite, suites convergentes.	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, élément de $\mathbb{R}$, si tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient les termes u_n pour tous les indices n, hormis un nombre fini d'entre eux.
Généralisation aux limites infinies.	
Unicité de la limite.	
Opérations algébriques sur les suites convergentes.	Aucune technicité sur ces opérations ne sera exigée.
Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.	
Existence d'une limite par encadrement.	
Suites monotones.	
Théorème de la limite monotone.	Toute suite croissante (respectivement décroissante) et majorée (respectivement minorée) converge. Toute suite croissante (respectivement décroissante) non majorée (respectivement non minorée) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
Suites adjacentes.	Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.
Si les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes vers une même limite ℓ, la suite (u_n) converge vers ℓ.	

4 – Comportement asymptotique des suites usuelles

Croissances comparées.	Comparaison des suites (n^a) , (q^n) , $((\ln(n))^b)$. Résultats admis.

II. Étude élémentaire des séries

Ce chapitre fait suite au chapitre sur les suites numériques réelles du premier semestre, une série étant introduite comme une suite de sommes partielles. Aucune technicité n'est exigible en première année. L'étude des variables aléatoires discrètes sera l'occasion d'une mise en œuvre naturelle de ces premières connaissances sur les séries. L'étude des séries sera complétée en seconde année par les techniques de comparaison sur les séries à termes positifs.

1 – Séries numériques à termes réels

Série de terme général u_n.	
Sommes partielles associées.	
Définition de la convergence.	$\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge si $\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.
Combinaison linéaire de séries convergentes.	On pratiquera, sur des exemples simples, l'étude des séries (convergence, calcul exact ou approché de la somme).
	On soulignera l'intérêt de la série de terme général $u_{n+1}-u_n$ pour l'étude de la suite (u_n).
Série à termes positifs.	
Convergence absolue.	En première année, cette notion est abordée uniquement pour permettre une définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

La convergence absolue implique la convergence	Résultat admis.

2 – Séries numériques usuelles

Étude des séries $\sum q^n$, $\sum nq^{n-1}$, $\sum n(n-1)q^{n-2}$ et calcul de leurs sommes.	
Convergence et somme de la série exponentielle $\sum \dfrac{x^n}{n!}$.	Résultats admis.

I

Compléments sur les suites et séries réelles

Lorsque l'on parle de comportement asymptotique d'une suite, la première idée à avoir est l'étude de l'existence et, le cas échéant, la recherche de la limite de cette suite. Il s'agit en effet du premier élément à étudier. Mais ce qui nous intéresse ensuite, c'est la vitesse à laquelle la suite tend vers cette limite. Autant il semble relativement simple de répondre à cette question dans le cas des suites dont on connaît le terme général ; autant cela sera nettement plus délicat pour les suites récurrentes ou les suites implicites.

L'idéal quand on souhaite étudier précisément une suite est d'en obtenir un développement asymptotique : en gros, une somme de suites simples ayant des comportements de plus en plus précis, dont la suite étudiée serait très proche. Cette notion n'est pas au programme, même si nous pourrons rencontrer des recherches de tels développements en exercices. Nous nous limiterons donc bien souvent au premier terme de ce développement asymptotique : un équivalent de la suite.

L'objectif de ce chapitre est d'affiner l'étude du comportement asymptotique des suites en voyant deux notions qui seront essentiellement illustrées sur des suites dont le terme général est connu, puis d'en voir une application dans l'étude des séries. Dans les cas où le terme général de la suite étudiée n'est pas connu, l'exercice guidera.

Plan du chapitre

I Relations de comparaison **108**
I.1 Négligeabilité de suites 108
I.2 Équivalence de suites 112
II Séries numériques **121**
II.1 Premiers exemples et rappels de première année 121
II.2 Séries à terme positif 127
Test 1 : Suites et Séries **135**
Fiche 1 : Calcul de sommes (et produits) fini(e)s **138**
Fiche 2 : Nature d'une série – À l'aide de comparaisons **142**
Fiche 3 : Nature d'une série – À l'aide d'équivalences **143**

Fiche 4 : Nature d'une série – À l'aide de dominations 144
Fiche 5 : Nature d'une série – À l'aide de la divergence grossière 145
Fiche 6 : Nature d'une série – À l'aide de la convergence absolue 146
Fiche 7 : Nature d'une série et somme – À l'aide d'une somme télescopique 147
Fiche 8 : Nature d'une série et somme – Séries alternées 148
TD 2 : Compléments sur les suites et les séries réelles 151
DM 1 : D'après EM Lyon 2025 171

Pour bien démarrer

1. Quelles méthodes peut-on mettre en œuvre pour étudier les variations d'une suite ?

   — Étudier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de $u_{n+1} - u_n$.

   — Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant et ne s'annule pas, comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 .

2. Définition quantifiée de suite convergente, de suite divergente vers $+\infty$.

   — Suite *convergente* : $\exists\, \ell \in \mathbb{R} / \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \mathrm{N} \in \mathbb{N} / \forall\, n \in \mathbb{N}, (n \geqslant \mathrm{N} \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$.

   — Suite *divergente* vers $+\infty$: $\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, \mathrm{N} \in \mathbb{N} / \forall\, n \in \mathbb{N}, (n \geqslant \mathrm{N} \implies u_n \geqslant \mathrm{A})$.

3. Définition de suites adjacentes. Conséquence ?

   — Définition : On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *adjacentes* lorsque :

   (i) l'une de ces suites est croissante,

   (ii) l'autre est décroissante,

   (iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

   — Propriété : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors elles convergent et ont la même limite.

4. Définition de convergence d'une série. Condition nécessaire de convergence, est-elle suffisante ? Convergence absolue, lien avec la convergence.

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On définit la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

   — Définition : On dit que la série de terme général u_n est *convergente* lorsque la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

   — Condition nécessaire : Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

   Cette condition n'est pas suffisante, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et pourtant $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente .

   — Définition : On dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente lorsque $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ est convergente.

   — Propriété : Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est *absolument convergente*, alors elle est convergente (la réciproque est fausse …).

5. Séries usuelles.

   — Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ sont convergentes si, et seulement si, $q \in]-1\,;1[$ et en cas de convergence :

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

   — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ est convergente et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

— La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.

I. Relations de comparaison

I.1 – Négligeabilité de suites

Définition 11 – Négligeabilité :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *négligeable* devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsque

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=0.$$

Dans ce cas, on écrira $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

Notations (de Landau) : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

— On note $\underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ l'ensemble des suites négligeables devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$.

— Par abus, on écrira $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ au lieu de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.
On lira « u_n est un petit o de v_n quand n tend vers $+\infty$ ».

Exemples 29 :

1. $n = \underset{n\to+\infty}{o}(n^2)$, $n = \underset{n\to+\infty}{o}(n^3)$, ..., $\quad \forall\, p\leqslant q,\ n^p = \underset{n\to+\infty}{o}(n^q)$
2. $\dfrac{1}{n^2} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\quad \forall\, p\leqslant q,\ \dfrac{1}{n^q} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$
3. Comme $\dfrac{2}{3}\in\,]-1\,;1[$, $2^n = \underset{n\to+\infty}{o}(3^n)$.
4. Par croissances comparées : $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Interprétons cette nouvelle notion dans trois cas classiques…

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$:
   Dans ce cas, $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ si, et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend moins vite vers $+\infty$ que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$:
   Dans ce cas, $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ si, et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend plus vite vers 0 que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$ si, et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 .

Proposition 29 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cinq suites de réels telles qu'à partir d'un certain rang les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annulent pas.

P1 • $\left.\begin{array}{l} u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \\ u'_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \end{array}\right\} \implies \forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{R}, \lambda u_n + \mu u'_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$

P2 • $\left.\begin{array}{l} u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \\ v_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(w_n) \end{array}\right\} \implies u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(w_n)$ (transitivité)

P3 • $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \implies u_n w_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n w_n)$

P4 • $\left.\begin{array}{l} u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \\ u'_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v'_n) \end{array}\right\} \implies u_n u'_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n v'_n)$

P5 • $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \implies \forall\,\lambda\in\mathbb{R}^*, u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\lambda v_n)$

P6 • Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang :

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \implies \frac{1}{v_n} = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{u_n}\right)$$

De façon générale, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsqu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0 \text{ et } \exists N\in\mathbb{N}/\forall\, n\geqslant N, u_n = \varepsilon_n v_n.$$

Remarque : Dans l'écriture « $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$ », le n est muet.

Un peu d'histoire : *Edmund Landau (1877-1938, allemand) a concentré son travail sur la théorie des nombres ; il a, entre autres, fourni une démonstration du théorème des nombres premiers plus simple que celles alors connues. Il a également popularisé les notations o et $\sim$ vues dans ce chapitre.*

Preuve :

P1 • Supposons $\left\{\begin{array}{l} u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \\ u'_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \end{array}\right.$ et soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n\neq 0$ et

$$\frac{\lambda u_n + \mu u'_n}{v_n} = \lambda\frac{u_n}{v_n} + \mu\frac{u'_n}{v_n}.$$

Or, $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$, donc $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = 0$ et $u'_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$, donc $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{u'_n}{v_n} = 0$.

D'où, par opérations :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\lambda u_n + \mu u'_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty}\lambda\frac{u_n}{v_n} + \mu\frac{u'_n}{v_n} = 0.$$

Autrement dit, $\lambda u_n + \mu u'_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$.

P2 • Supposons $\begin{cases} u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \\ v_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(w_n) \end{cases}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $w_n \neq 0$ puis

$$\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n}.$$

Or, $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$ et $v_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(w_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{w_n} = 0$. D'où, par opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{w_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}\frac{v_n}{w_n} = 0.$$

Autrement dit, $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(w_n)$.

P3 • Supposons $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $w_n \neq 0$ puis

$$\frac{u_n w_n}{v_n w_n} = \frac{u_n}{v_n}.$$

Or, $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n w_n}{v_n w_n} = 0$, autrement dit, $u_n w_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n w_n)$.

P4 • Supposons $\begin{cases} u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \\ u'_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v'_n) \end{cases}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $v'_n \neq 0$ puis

$$\frac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{u'_n}{v'_n}.$$

Or, $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$ et $u'_n = \underset{n\to+\infty}{0}(v'_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u'_n}{v'_n} = 0$.
D'où, par opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} \times \frac{u'_n}{v'_n} = 0.$$

Autrement dit, $u_n u'_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n v'_n)$.

P5 • Supposons $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et

$$\frac{u_n}{\lambda v_n} = \frac{1}{\lambda} \times \frac{u_n}{v_n}.$$

Or, $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
D'où, par opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\lambda v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda} \times \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Autrement dit, $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\lambda v_n)$.

P6 • Supposons qu'à partir d'un certain rang, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas et que $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $u_n \neq 0$ puis

$$\frac{\dfrac{1}{v_n}}{\dfrac{1}{u_n}} = \frac{u_n}{v_n}.$$

Or, $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{v_n}}{\dfrac{1}{u_n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$, autrement dit, $\dfrac{1}{v_n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.

Exemples 30 :

— On a $n^2 = \underset{n\to+\infty}{o}(n^3)$, $n = \underset{n\to+\infty}{o}(n^3)$ et $1 = \underset{n\to+\infty}{o}(n^3)$.
D'où, $n^2 + 2n + 1 = \underset{n\to+\infty}{o}(n^3)$.

— $n^4 + n^2 + 2n + 1 = n^4 + \underset{n\to+\infty}{o}(n^3)$.

ATTENTION

On rappelle que « $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ » est un abus de notation. Ce n'est pas une égalité comme on la connaît.

En particulier :

$$\left.\begin{array}{l} u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \\ u'_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \end{array}\right\} \not\Longrightarrow u_n = u'_n.$$

$n^2 = \underset{n\to+\infty}{o}(n^3)$ et $n = \underset{n\to+\infty}{o}(n^3)$ mais $n^2 \neq n$ dès que $n \geqslant 2$.

On peut réécrire les croissances comparées avec la notation ci-dessus :

Proposition 30 – Croissances comparées :

P1 • $\forall\, p, q \in \mathbb{N}$ si $p < q$ alors $n^p = \underset{n\to+\infty}{o}(n^q)$.

P2 • $\forall\, a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ si $a < b$ alors $a^n = \underset{n\to+\infty}{o}(b^n)$.

P3 • $\forall\, p \in \mathbb{R}, \forall\, q \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \ln(n)^p = \underset{n\to+\infty}{o}(n^q)$.

P4 • $\forall\, p \in \mathbb{R},\ \forall\, q \in]1\,;+\infty[\,, \quad n^p = \underset{n\to+\infty}{o}(q^n)$.

P5 • $\forall\, q \in \mathbb{R}, \quad q^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$.

P6 • $n! = \underset{n\to+\infty}{o}(n^n)$.

Preuve : **(Non exigible)**

Il suffit simplement de réécrire les limites des quotients sous la forme d'un o ().

On les retient parfois ainsi :

Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\big(\ln(n)\big)^{\alpha} \underset{0\leqslant\alpha<\alpha'}{\ll} \big(\ln(n)\big)^{\alpha'} \ll n^{\beta} \underset{0<\beta<\beta'}{\ll} n^{\beta'} \ll a^n \underset{1<a<b}{\ll} b^n \ll n! \ll n^n.$$

Vocabulaire : Le symbole « $\ll$ » se lisant alors « est négligeable devant ».

Exemples 31 :

— Par croissances comparées, on a $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\sqrt{n}\right)$, donc $\dfrac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

— Par croissances comparées, on a $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\sqrt{n}\right)$ et $\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc $\dfrac{\ln(n)}{\mathrm{e}^n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Parfois, on écrira $u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$ qui se lit « u_n égale v_n + un petit o de v_n ». Cette écriture est équivalente à dire qu'il existe une suite (h_n), négligeable devant (v_n), telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + h_n$.

I.2 – Équivalence de suites

Définition 12 – Équivalence de suites :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *équivalente* à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsque :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Dans ce cas, on écrira $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

De façon générale, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsqu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 1 \quad \text{et } \exists\, \mathrm{N} \in \mathbb{N} / \forall\, n \geqslant \mathrm{N}, u_n = \alpha_n v_n.$$

ATTENTION

Si un jour on arrive à écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$, on peut directement arrêter la prépa !

Pourquoi ?

— D'une part, pour la définition que nous avons adoptée, l'écriture $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ n'est pas permise.

— D'autre part, les seules suites équivalentes à la suite nulle sont les suites nulles à partir d'un certain rang.

Exemples 32 :

— $n^2+2n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$.

— $\sqrt{2n^2-5n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}n$.

— Par croissances comparées, $\mathrm{e}^n+n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^n$.

Trouver une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équivalente à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$ c'est trouver une suite qui a le même comportement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$.

Le but étant de trouver une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont l'expression est plus simple que celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ...

Exemple 33 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ n\leqslant u_n\leqslant 2n$.

Donnons un équivalent de $\ln(u_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On a :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*, 0<n\leqslant u_n\leqslant 2n.$$

D'où, par croissance de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$,

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*, \ln(n)\leqslant\ln(u_n)\leqslant\ln(2)+\ln(n).$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, suffisamment proche de $+\infty$, $\ln(n)>0$ donc :

$$1\leqslant\frac{\ln(u_n)}{\ln(n)}\leqslant 1+\frac{\ln(2)}{\ln(n)}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{\ln(2)}{\ln(n)}=1$.
Donc, d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(u_n)}{\ln(n)}=1.$$

Autrement dit :

$$\ln(u_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n).$$

Proposition 31 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}, (u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cinq suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

P1 • $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. (réflexivité)

P2 • $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. (symétrie)

P3 • $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n.$ (transitivité)

P4 • $\forall \ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}, \left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell.$

P5 • $\forall \ell \in \mathbb{R}^*, \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell.$

P6 • $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n v'_n$ (compatibilité avec le produit)

En particulier, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda v_n.$

P7 • $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n \end{array}\right\} \Longrightarrow \dfrac{u_n}{u'_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{v'_n}.$ (compatibilité avec le quotient)

En particulier, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$

P8 • $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \forall m \in \mathbb{N}, u_n^m \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^m.$ (compatibilité avec la puissance)

Attention
L'exposant de la puissance ne doit pas dépendre de la variable !

P9 • $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont strictement positives à partir d'un certain rang} \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}, u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha.$

P10 • $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow |u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$ (compatibilité avec la valeur absolue)

P11 • Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors, à partir d'un certain rang, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même signe.

P12 • Trois choses souvent utiles (liens entre $\sim$ et o)

(1) $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n) \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$

(2) $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ u'_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n + u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$

(3) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \Longleftrightarrow u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$
$= v_n\left(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right).$

Vocabulaire : Une relation entre deux objets d'un même ensemble qui est réflexive, symétrique et transitive est une relation d'équivalence.

C'est le cas de $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ sur l'ensemble des suites réelles mais également de $\Longleftrightarrow$ sur l'ensemble des assertions mathématiques.

Remarque : Si on utilise **P11**, on voit qu'une seule des deux hypothèses de stricte positivité suffit en pratique...

Preuve :

P1 • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $u_n \neq 0$ et $\dfrac{u_n}{u_n} = 1$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{u_n} = 1$, autrement dit $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

P2 • Procédons par double implication.

$\Longrightarrow$ **:** Supposons $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ puis $\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{\frac{u_n}{v_n}}$.

Or, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{u_n}{v_n}} = 1$, autrement dit $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

$\Longleftarrow$ **:** De même, en échangeant u_n et v_n.

P3 • Supposons $\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $w_n \neq 0$ puis $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{v_n}{w_n}$.

Or, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ et $v_n = \underset{n\to+\infty}{\sim} (w_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{w_n} = 1$.

Par opérations $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{w_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}\dfrac{v_n}{w_n} = 1$.

Autrement dit, $u_n = \underset{n\to+\infty}{\sim} (w_n)$.

P4 • Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Supposons $\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \end{cases}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $u_n = \dfrac{u_n}{v_n} \times v_n$.

Or, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Par opération, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

P5 • Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$. Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Puisque $\ell \neq 0$, on a, par opération, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\ell} = 1$.

Conclusion : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

P6 • Supposons $\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $v'_n \neq 0$ puis $\dfrac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{u'_n}{v'_n}$.

Or, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ et $u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u'_n}{v'_n} = 1$.

D'où, par opération, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{u'_n}{v'_n} = 1$.

Autrement dit $u_n u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n v'_n$.

P7 • Supposons $\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $u'_n \neq 0$, $v_n \neq 0$ et $v'_n \neq 0$ puis $\dfrac{\dfrac{u_n}{u'_n}}{\dfrac{v_n}{v'_n}} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{v'_n}{u'_n}$.

Or, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ et $u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n$, donc d'après **P2**, $v'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u'_n$, et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v'_n}{u'_n} = 1$.

D'où, par opération, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{u_n}{u'_n}}{\dfrac{v_n}{v'_n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{v'_n}{u'_n} = 1$.

Autrement dit $\dfrac{u_n}{u'_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{v'_n}$.

P8 • Supposons $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et soit $m \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$, donc $v_n^m \neq 0$ et $\dfrac{u_n^m}{v_n^m} = \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^m$.

Or, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

D'où, par opération, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^m}{v_n^m} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^m = 1$.

Autrement dit $u_n^m \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^m$.

Remarque : Il s'agit bien d'une opération sur les limites, car m ne dépend pas de n.

P9 • On procède de la même façon mais ⚠ Les puissances à exposants non entiers ne sont bien définies que pour des réels strictement positifs ! Ce qui est bien le cas ici.

P10 • Supposons $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $\dfrac{|u_n|}{|v_n|} = \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right|$.

Or, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, dont $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_n|}{|v_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| = 1$.

Autrement dit $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$.

P11 •

Rappel :

$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ lorsque

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \mathrm{N} \in \mathbb{N} / \forall\, n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant \mathrm{N} \implies |w_n - \ell| \leqslant \varepsilon)\,.$$

Supposons $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Par conséquent :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \mathrm{N} \in \mathbb{N} / \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left(n \geqslant \mathrm{N} \implies \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right).$$

En particulier, avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, que nous considérons ensuite, tel que :

$$\forall\, n \geqslant \mathrm{N}, \quad \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

D'où,

$$\forall\, n \geqslant \mathrm{N}, \quad \frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{3}{2}.$$

À retenir
Deux réels non nuls ont même signe si, et seulement si, leur produit (ou quotient) est strictement positif.

En particulier :

$$\forall\, n \geqslant \mathrm{N}, \quad \frac{u_n}{v_n} > 0.$$

Par conséquent, à partir d'un certain rang (ici N) u_n et v_n ont même signe.

P12 •

(1) Supposons $\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(w_n) \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $w_n \neq 0$ et $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{v_n}{w_n}$.

Or, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ et $v_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(w_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{w_n} = 0$.

D'où, par opération, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{w_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{v_n}{w_n} = 0$.

Autrement dit, $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(w_n)$.

(2) Supposons $\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ u'_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $\dfrac{u_n + u'_n}{v_n} = \dfrac{u_n}{v_n} + \dfrac{u'_n}{v_n}$.

Or, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ et $u'_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u'_n}{v_n} = 0$.

D'où, par opération $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n + u'_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} + \dfrac{u'_n}{v_n} = 1$.

Autrement dit, $u_n + u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

(3) Par équivalences, on a :

$$\begin{aligned} u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) &\iff \frac{u_n}{v_n} = 1 + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1) \\ &\iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \\ &\iff u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(u_n) &\iff 1 = \frac{v_n}{u_n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1) \\ &\iff \frac{v_n}{u_n} = 1 + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1) \\ &\iff \lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1 \\ &\iff v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \\ &\iff u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n. \end{aligned}$$

Exemple 34 :

Donnons un équivalent simple de $\dfrac{(n^2+1)^4 + n + 7}{2n\,(n^3+5)}$ en $+\infty$.

On a :

— $n^2 + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$, donc $(n^2+1)^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^8$,

— $n+7 = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(n^8\right)$.

D'où $\left(n^2+1\right)^4 + n + 7 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^8$.
De la même manière, $2n\left(n^3+5\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n^4$.
Conclusion : $\dfrac{\left(n^2+1\right)^4+n+7}{2n\left(n^3+5\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^4}{2}$.

Exemple 35 :

Donnons un équivalent simple de $n^3 2^n + n3^n$ en $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, suffisamment proche de $+\infty$, en particulier non nul, on a :

$$n^3 2^n + n3^n = n3^n\left(n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right).$$

Or, $\dfrac{2}{3} \in]-1\,;1[$. Donc, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$.
Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 = 1.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3 2^n + n3^n}{n3^n} = 1$, autrement dit $n^3 2^n + n3^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n3^n$.

Exemple 36 :

Les suites $(\ln(n+1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont-elles équivalentes en $+\infty$?

Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ln(n) \neq 0$ et

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \qquad n \neq 0$$
$$= 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$.
D'où, par opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1.$$

Autrement dit $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exemple 37 – Il est interdit de composer à gauche par une fonction :

Les suites $(\exp(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\exp(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles équivalentes en $+\infty$?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\exp(n) \neq 0$ et

$$\frac{\exp(n+1)}{\exp(n)} = \mathrm{e}.$$

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\exp(n+1)}{\exp(n)} = \mathrm{e} \neq 1$ et les suites $(\exp(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\exp(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas équivalentes en $+\infty$.

Théorème 32 – Équivalents usuels :

T1 • Soient $k \in \mathbb{N}^*$, a_0, a_1, …, a_k des réels et b_0, b_1, …, b_k des réels tels que $b_0 < b_1 < \ldots < b_k$.
Si $a_k \neq 0$, alors $a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \ldots + a_k n^{b_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} a_k n^{b_k}$.

T2 • Si, à partir d'un certain rang $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas **et** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors

(1) $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

(2) $e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

(3) $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ (1+u_n)^a - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} a u_n$

Autrement dit, une expression polynomiale est équivalente en $+\infty$ à son terme non nul de plus haut degré.

Preuve :

T1 • Supposons $a_k \neq 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \ldots + a_k n^{b_k}}{a_k n^{b_k}} = \frac{a_0}{a_k n^{b_k - b_0}} + \frac{a_1}{a_k n^{b_k - b_1}} + \ldots + 1.$$

Or, pour tout $i \in [\![0\,;k-1]\!]$, $b_k - b_i > 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{n_k - b_i} = +\infty$.

Ainsi, par opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0}{a_k n^{b_k - b_0}} + \frac{a_1}{a_k n^{b_k - b_1}} + \ldots + 1 = 1.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \ldots + a_k n^{b_k}}{a_k n^{b_k}} = 1$, autrement dit $a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \ldots + a_k n^{b_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} a_k n^{b_k}$.

T2 • Supposons qu'à partir d'un certain rang $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Rappel :

— $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

— $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$

— $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ \lim\limits_{x\to0} \dfrac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$

Méthode 11 :

Pour retrouver ces limites, les voir comme des limites de taux d'accroissements de fonctions dérivables entre 0 et x.

(1) On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Donc, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1$.
Conclusion : $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

(2) On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Donc, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{u_n} - 1}{u_n} = 1$.
Conclusion : $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

(3) Soit $a \in \mathbb{R}^*$.
On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^a - 1}{x} = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, $1 + u_n > 0$.
Donc, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(1+u_n)^a - 1}{u_n} = a$.
Conclusion : $(1+u_n)^a - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} a u_n$.

Exemples 38 – Utilisation classique :

1. $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
2. $\ln(1+e^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$.
3. $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.
4. $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Exemple 39 :

Déterminons la limite de la suite de terme général $\dfrac{7n^6 - 3n^5 + n^3 - n^2 + 3}{3n^6 + 7n^2 + 1}$.

On a $\dfrac{7n^6 - 3n^5 + n^3 - n^2 + 3}{3n^6 + 7n^2 + 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{7n^6}{3n^6} = \dfrac{7}{3}$.
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n^6 - 3n^5 + n^3 - n^2 + 3}{3n^6 + 7n^2 + 1} = \dfrac{7}{3}$.

Exemple 40 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

Distinguons deux cas :

— Si $x = 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\dfrac{0}{n}\right)^n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = 1$.

— Si $x \neq 0$:
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{x}{n} = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment proche de $+\infty$, on a $1 + \dfrac{x}{n} > 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand, on peut écrire :

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).$$

Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{x}{n} \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n} = 0$.

Par conséquent, $\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n}$.

Ainsi, $n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} x$.

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = x.$$

Et donc, par continuité de l'exponentielle en x :

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \exp(x).$$

Les deux cas se regroupent :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x.$$

À retenir

En particulier :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

II. Séries numériques

II.1 – Premiers exemples et rappels de première année

Définition 13 – Suites des sommes partielles :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

D1 • On appelle *série de terme général* u_n, notée $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou $\sum u_n$, la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Vocabulaire : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

— u_n s'appelle le *terme général* de rang n.

— S_n s'appelle la *somme partielle* de rang n.

D2 • On dit que *la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *converge* lorsque la suite des sommes partielles $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Vocabulaire : Dans ce cas,

— la limite de $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et appelée *somme de la série* :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n.$$

— On appelle *reste de rang* n l'élément R_n défini par :

$$\mathrm{R}_n = \mathrm{S} - \mathrm{S}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Attention R_n n'existe que si série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge !

D3 • Lorsque la série ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*.

Vocabulaire : Déterminer la nature d'une série revient à se poser la question de sa convergence.

En particulier, deux séries sont dites *de même nature* si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Attention Deux séries peuvent être de même nature sans avoir la même somme.

Remarques :

— Ne pas confondre suite et série : $\sum u_n$ est une série. C'est la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— On s'intéresse essentiellement à la nature de la série et non de la suite, notions qui n'ont souvent rien à voir.

— La notation $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ne présume en rien de la convergence de la série et donc de l'existence de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Attention Les sommes infinies ne se manipulent pas comme les sommes finies. En général, on calculera d'abord les sommes partielles qui sont finies, et donc manipulable facilement, avant de passer à la limite.

— Écrire la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ suppose implicitement que la série converge. On prendra donc bien garde à n'utiliser ce symbole que dans ce cas.

— $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la somme de la série. C'est un nombre réel [1].

— Dans le cas de convergence, on peut remarquer que la suite $(\mathrm{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{R}_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S} - \mathrm{S}_n = 0.$$

Le reste d'ordre n représente l'erreur commise lorsque l'on remplace la somme S par la $n^{\text{ème}}$ somme partielle.

— Les premiers termes d'une suite ne changent pas la nature de la série : $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

— Enfin, remarquez que $\mathrm{S}_0 = u_0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1}$.
Le terme général définit la série et la réciproque est vraie : si l'on connaît la série, on peut donc retrouver son terme général.

Par exemple, si on sait que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, la somme partielle S_n est définie par $\mathrm{S}_n = 1 - \dfrac{1}{n+2}$, alors $\mathrm{S}_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1} = \left(1 - \dfrac{1}{n+2}\right) - \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

[1]. En conséquence, il ne diverge ou ne converge pas, il n'est équivalent à rien, il ne se dérive pas autrement que pour donner 0, il ne bouge pas, …

Exemple 41 – La série harmonique :

La série harmonique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$ diverge. [2]

Les manières de montrer ce résultat sont nombreuses.
On a, par exemple,

$$S_{2n}-S_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\geqslant n\times\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Si la série convergeait vers un réel S, on aurait alors, par passage à la limite, $0=S-S\geqslant\frac{1}{2}$ ce qui est impossible.
Donc H_n diverge.
Comme la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, d'après le théorème de la limite monotone, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}=+\infty.$$

Définition 14 – Série géométrique :

On appelle *série géométrique* de raison $q\in\mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geqslant 0}q^n$.

Proposition 33 :

La série $\sum_{n\geqslant 0}q^n$ converge si et seulement si $|q|<1$ et dans ce cas

$$S=\sum_{k=0}^{+\infty}q^k=\frac{1}{1-q}\qquad\text{et}\qquad R_p=\sum_{k=p+1}^{+\infty}q^k=\frac{q^{p+1}}{1-q}.$$

Preuve : Il suffit de se rappeler la formule de la somme des termes d'une suite géométrique de raison q :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad S_n=\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1}{1-q}-\frac{q^{n+1}}{1-z}\xrightarrow[|q|<1]{n\to+\infty}\frac{1}{1-q}.$$

De plus, lorsque $|q|<1$, on a $R_n=\frac{q^{n+1}}{1-q}$. ☑

[2]. Son nom *harmonique* vient du fait qu'un terme est la moyenne harmonique des termes qui l'encadrent. Rappelons que la moyenne harmonique m_h de deux réels positifs a et b est définie par $\frac{2}{m_h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.
Ici, on a bien $2\left(\frac{1}{n}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{n-1}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{n+1}\right)^{-1}$.

Proposition 34 – Séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2 :

P1 • La série $\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ converge si et seulement si $|q|<1$ et dans ce cas

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

P2 • La série $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ converge si et seulement si $|q|<1$ et dans ce cas

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Remarque : La dérivation d'une série n'est pas permise au programme cependant elle constitue un bon moyen mnémotechnique pour retenir les résultats :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (q^k)' = \left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} (q^k)'' = \left(\frac{1}{1-q}\right)'' = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Définition 15 – Série exponentielle :

Pour tout réel x, on appelle série exponentielle de x la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$.

Proposition 35 :

Pour tout réel x, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Preuve : **(Résultat admis)** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $f : t\longmapsto \exp(xt)$ est clairement de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est $x\longmapsto x^n\exp(tx)$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0\,;1]$ s'écrit :

$$\left|f(1)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| = \left|\exp(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|x^{n+1}\exp(xt)\right|.$$

Or, pour $0\leqslant t\leqslant 1$, $\left|x^{n+1}\exp(xt)\right| \leqslant \left|x^{n+1}\right|\exp(x)$.

Comme, pour tout x fixé dans $\mathbb{R}$, $x^{n+1} = \underset{n\to+\infty}{o}((n+1)!)$, on en déduit :

$$\left|\exp(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\exp(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On conclut avec le théorème d'encadrement :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = e^x$$

Exercice I.1

Après avoir démontré son existence, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Proposition 36 – Série télescopique :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(u_{n+1} - u_n\Big)$ sont de même nature et on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \Big(u_{k+1} - u_k\Big) = u_{n+1} - u_0.$$

On peut donc étudier une suite en se servant des techniques spécifiques de la théorie des séries, ou au contraire étudier une série au moyen des techniques spécifiques de la théorie des suites.

Exemple 42 :

Montrons que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

$$\begin{aligned}
\text{En effet, } \mathrm{S}_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \ldots - \cancel{\frac{1}{n}}\Big) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.
\end{aligned}$$

Proposition 37 – Combinaison linéaire de séries convergentes :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors, la série $\sum(\lambda u_n + v_n)$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Preuve : La somme partielle associée à la série de terme général $\lambda u_n + v_n$ est $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k + v_k)$.

La linéarité de la somme permet d'écrire :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Or, l'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel.

Donc, la suite $\left(\lambda \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente *i.e.* la série $\sum(\lambda u_n + v_n)$ converge.

Il suffit alors d'utiliser la linéarité de l'application limite sur ce même espace :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lambda\sum_{k=0}^{n}u_k+\sum_{k=0}^{n}v_k\right)=\lambda\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}u_k+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}v_k=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\sum_{n=0}^{+\infty}v_n.$$

Donc, $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n+v_n)=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$. ☑

Corollaire 38 – Structure de l'ensemble des suites convergentes :

L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel.

Pour le produit, c'est un peu plus compliqué et demande une notion de convergence un peu plus forte…

ATTENTION

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, il est possible que $\sum(\lambda u_n+\mu v_n)$ converge … L'ensemble des séries divergentes n'est pas stable par combinaisons linéaires.

Pire pour vous, même si $\sum(\lambda u_n+\mu v_n)$ converge, il est possible que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent.

Il est donc INTERDIT de découper une somme de série en deux comme écrire $\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda u_n+\mu v_n)=\lambda\sum_{n=1}^{+\infty}u_n+\mu\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ sans avoir vérifié que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ étaient convergentes.

Retenez pour cela l' exemple (42) : La série $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ converge au contraire des deux séries harmoniques $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$.

Une première conséquence des théorèmes généraux, condition nécessaire de convergence qui sera le plus souvent un critère de divergence :

Proposition 39 – Condition nécessaire de convergence :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n \text{ converge} \implies \lim_{n\to+\infty}u_n=0.$$

À retenir

Le terme général d'une série convergente doit tendre vers 0.

Preuve : Il suffit de remarquer que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=S_n-S_{n-1}$.

Par linéarité de la limite, si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente également et $\lim_{n\to+\infty}u_n=S-S=0$. ☑

Par la contraposée, si le terme général ne tend pas vers 0, pas alors la série diverge. On dit dans ce cas que la série *diverge grossièrement*.

Exemples 43 :

— Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{n}{n+1}$ diverge.

— De même, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement) si $\alpha \leqslant 0$.

— Enfin, comme $(-1)^n$ n'a pas de limite, la série $\sum (-1)^n$ diverge de même que les séries du type $\sum \sin(n)$.

ATTENTION

La réciproque est fausse comme le montre la divergence de la série harmonique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n}$ ou de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

II.2 – Séries à terme positif

Le théorème (43) donnera une place toute particulière aux séries à terme positif par la condition suffisante de convergence :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \text{ converge} \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.}$$

Dans tout ce paragraphe, on considèrera des séries numériques réelles à terme positif (au moins à partir d'un certain rang) *a fortiori* réel.

Si les séries sont à terme négatif, en travaillant sur la série des opposés et en utilisant la linéarité de la somme, on obtient les mêmes résultats. Les théorèmes de ce paragraphe s'appliquent donc à toutes les séries à *terme de signe constant*.

1 — Condition nécessaire et suffisante de convergence

Dans le cas des séries à terme positif, la suite des sommes partielles $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante. Montrer la convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est donc équivalent à trouver un majorant.

Théorème 40 :

T1 • Une série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ à terme positif converge si, et seulement si la suite $\left(\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est majorée :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge} \iff \exists\, \mathrm{M} > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_n \leqslant \mathrm{M}.$$

T2 • Le seul cas de divergence est la limite infinie.

Preuve : Comme $\sum u_n$ est une série à terme positif, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est une suite croissante.

Il suffit alors d'appliquer le théorème de la limite monotone …

Exemple 44 :

La série harmonique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n}$ à terme positif diverge donc vers $+\infty$.

Exemple 45 :

$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge.

En effet, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 2 - \frac{1}{n}$.
La suite des sommes partielles est donc majorée. Elle converge vers un réel inférieur à 2.

À retenir
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2 — Application des relations de comparaison à l'étude des séries

Voyons trois critères pour étudier la nature de séries à **terme général positif**.

Théorème 41 – Critère de comparaison par inégalité :

T1 • $\left.\begin{array}{l} \forall\, n\in\mathbb{N}, 0\leqslant u_n\leqslant v_n \\ \sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ est convergente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ est convergente.}$

T2 • $\left.\begin{array}{l} \forall\, n\in\mathbb{N}, 0\leqslant u_n\leqslant v_n \\ \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ est divergente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ est divergente.}$

Ces critères sont encore valables si les inégalités ne sont vraies qu'à partir d'un certain rang.

Remarque : Si le terme général est négatif, il suffit de le multiplier par -1 et se ramener aux critères qui suivent.

En fait, le problème est seulement si le terme général n'est jamais de signe constant !

Preuve : Notons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

T1 • Supposons : $\left\{\begin{array}{l} \forall\, n\in\mathbb{N}, 0\leqslant u_n\leqslant v_n \\ \sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ est convergente} \end{array}\right.$ et montrons que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.

— Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} \geqslant 0.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $u_k \leqslant v_k$.
D'où, en sommant de 0 à n :
$$\mathrm{U}_n \leqslant \mathrm{V}_n.$$
Mais, de façon analogue au point précédent, la suite $(\mathrm{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente.
Elle est donc majorée par sa limite, égale à $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.
Par transitivité, on obtient :
$$\mathrm{U}_n \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$
La suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée.
D'après le théorème de convergence monotone, la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Autrement dit, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.

T2 • Supposons $\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n \\ \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ est divergente.} \end{cases}$

On sait que $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante comme **T1**. D'après le théorème de limite monotone, comme $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{U}_n = +\infty.$$
Or, comme dans **T1** :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{U}_n \leqslant \mathrm{V}_n.$$
D'après le théorème de comparaison, on a $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{V}_n = +\infty$. Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est divergente.

Définition 16 – Séries de Riemann :

On appelle *série de Riemann* de paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Proposition 42 :

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve :

— Si $\alpha = 1$, c'est le résultat de l' exemple (41) .

— Si $\alpha \leqslant 1$ alors $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$
Or, la série harmonique est divergente.
D'après les critères de comparaison de séries à terme positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
Remarque : Si $\alpha \leqslant 0$, la série est grossièrement divergente.

— Supposons que $\alpha > 1$. Comme $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ est de terme général positif, sa convergence ne dépend que 'une majoration de sa somme partielle $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}$.

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$.

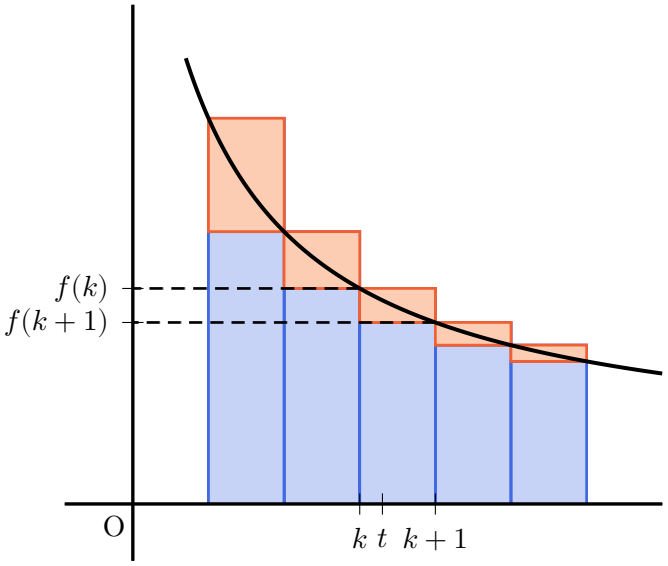


FIGURE I.1 : Une fonction continue positive et décroissante permet d'encadrer son intégrale.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1\,;n]\!]$. Pour tout $t \in [\![k\,;k+1]\!]$, on a :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha}.$$

D'après l'inégalité de la moyenne, on peut intégrer cette inégalité entre k et $k++1$:

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha}\int_k^{k+1} \mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

En sommant ces inégalités de même sens pour k variant de 1 à n, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

On effectue un changement d'indice :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

On se ramène à notre série en ajoutant et retranchant ce qu'il manque :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t + 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t + 1.$$

Or, $\displaystyle\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[-\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^n = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha-1} < +\infty.$

La somme partielle est donc majorée par $\dfrac{1}{\alpha-1} + 1$ indépendant de n. Le théorème (41) nous affirme alors que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge.

Le théorème (41) permet d'élargir notre champ d'étude à des séries dont le terme général n'est pas nécessairement positif.

Définition 17 – Série absolument convergente :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.

On dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge absolument* si la série $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge.

Théorème 43 – La convergence absolue entraine la convergence :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.

Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente alors elle converge, et on a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Attention

Si $\sum |u_n|$ est divergente, alors on ne peut pas conclure sur la nature de $\sum u_n$!

Preuve : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose alors $\begin{cases} u_n^+ = \max(0, u_n) \\ u_n^- = \max(0, -u_n) \end{cases}$.

On a donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} 0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n| \\ 0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n| \end{cases}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_n = u_n^+ - u_n^- \\ |u_n| = u_n^+ + u_n^- \end{cases}$.

Comme $\sum |u_n|$ converge, les séries à terme positif $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont donc convergentes. Soient ℓ^+, ℓ^- leurs limites.

On a $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (u_k^+ - u_k^-) = \sum_{k=0}^{n} u_k^+ - \sum_{k=0}^{n} u_k^- \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^+ - \ell^-$ *i.e.* la série $\sum u_n$ converge.

De plus, on a $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| = |\ell^+ - \ell^-| \leqslant |\ell^+| + |\ell^-| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. ☑

On déduit aussi du théorème (41) les deux suivants :

Théorème 44 – Critère de comparaison par négligeabilité :

T1 •
$$\left.\begin{array}{l} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \\ \sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ est convergente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ est convergente.}$$

T2 •
$$\left.\begin{array}{l} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \\ \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ est divergente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ est divergente.}$$

Preuve :

T1 • Supposons $\begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \\ \sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ est convergente} \end{cases}$

On va montrer que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est divergente en montrant, via le théorème de comparaison sur les suites, que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

On sait que $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$, donc à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
Ainsi :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \mathrm{N} \in \mathbb{N} / \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left(n \geqslant \mathrm{N} \implies \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leqslant \varepsilon \right).$$

En particulier, avec $\varepsilon = 1$, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, que nous considérons ensuite, tel que :

$$\forall\, n \in [\![\mathrm{N}; +\infty[\![, \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leqslant 1.$$

D'où :

$$\forall\, n \geqslant \mathrm{N},\ 0 \leqslant |u_n| \leqslant |v_n|.$$

Et comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs :

$$\forall\, n \geqslant \mathrm{N},\ 0 \leqslant |u_n| \leqslant v_n.$$

Or, $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est convergente.
D'après le critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, on en déduit que $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ est convergente, donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.

Remarque : Il n'est donc pas nécessaire ici que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ soit à terme positif. La convergence absolue suffit à prouver sa convergence.

T2 • De la même façon qu'en **T1**, on obtient :

$$\forall\, n \geqslant \mathrm{N},\ 0 \leqslant |u_n| \leqslant v_n \implies \forall\, n \geqslant \mathrm{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

Or, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente.
D'après le critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, on en déduit que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est divergente.

Remarque : Ici, il est nécessaire que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ soit à terme positif.

On utilise souvent le premier point dans le cas où $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est une série de Riemann convergente.

Autrement dit, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs et qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $u_n = \underset{n\to+\infty}{0}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$, alors on pourra conclure sur la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

Théorème 45 – Critère de comparaison par équivalence :

$$\left.\begin{array}{l} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \end{array}\right\} \implies \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ et } \sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ ont même nature.}$$

Preuve : Supposons $\begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n. \end{cases}$

On sait que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.
Ainsi :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \mathrm{N} \in \mathbb{N} / \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left(n \geqslant \mathrm{N} \implies \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leqslant \varepsilon \right)$$

En particulier, avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, que nous considérons ensuite, tel que :

$$\forall\, n \geqslant \mathrm{N}, \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leqslant \frac{1}{2} \iff \forall\, n \geqslant \mathrm{N}, -\frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} - 1 \leqslant \frac{1}{2}.$$

Et comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs :

$$\forall\, n \geqslant \mathrm{N}, \underbrace{\frac{1}{2} v_n \leqslant}_{(1)} \overbrace{u_n \leqslant \frac{3}{2} v_n}^{(2)}.$$

D'après l'inégalité (1) :

— Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente alors d'après le critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ est convergente.

— Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ est divergente alors d'après le critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente.

Et, d'après l'inégalité (2) :

— Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ est convergente alors d'après le critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.

— Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente alors d'après le critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ est divergente.

Autrement dit, dans tous les cas, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ ont même nature. ☑

Remarque : Bien sûr, les critères sont encore valables si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont à termes positifs qu'à partir d'un certain rang.

Méthode 12 :

M1 • Si l'énoncé ne demande que la nature de $\sum u_n$:

(1) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 , alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

(2) On regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles.

(3) Sinon :

— Si $\sum u_n$ est à terme général positif : on peut utiliser un des trois critères ci-dessus (en comparant avec le terme général d'une série de Riemann par exemple).

— si $\sum u_n$ est à terme général négatif : on utilise le fait que $-\sum u_n = \sum -u_n$ et que les séries $-\sum u_n$ et $\sum u_n$ ont même nature, puis on se ramène au cas précédent.

— Si le terme général de $\sum u_n$ n'est pas de signe constant (alterné) :

— Étudier la convergence absolue : si $\sum |u_n|$ converge alors $\sum u_n$ converge.

— Revenir à la suite des sommes partielles.

— Utiliser le résultat : la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente si, et seulement si, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

M2 • Si l'énoncé demande de justifier la convergence et de calculer la somme d'une série :

(1) On regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles.

(2) On regarde si l'on peut mettre en place un télescopage.

Dans tous les cas, on regarde si l'énoncé fournit des pistes en mettant par exemple en place une comparaison série/intégrale.

Exemples 46 :

Déterminons la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^3}$.

On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \left|\dfrac{(-1)^n}{n^3}\right| = \dfrac{1}{n^3}$.

Or, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann d'exposant $3 > 1$, donc elle est convergente.

Conclusion : La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^3}$ est absolument convergente donc convergente.

Exemples 47 :

Déterminons la nature de $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{2n+7}{n^3+5n^2+3}$.

On a :

$$\frac{2n+7}{n^3+5n^2+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}.$$

En particulier, pour n assez proche de $+\infty$, $\dfrac{2n+7}{n^3+5n^2+3}$ et $\dfrac{2}{n^2}$ sont de même signe positif.

Or, $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{2}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2>1$, donc elle est convergente

Ainsi, d'après le critère de comparaison (par équivalence) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{2n+7}{n^3+5n^2+3}$ est convergente, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{2n+7}{n^3+5n^2+3}$ également.

Exemples 48 :

Déterminons la nature de $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{n^3}$.

Par croissances comparées $\dfrac{\ln(n)}{n^3} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

De plus, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{\ln(n)}{n^3}\geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n^2}\geqslant 0$.

Or, $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2>1$, donc elle est convergente.

Donc, d'après le critère de comparaison (par négligeabilité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{n^3}$ est convergente.

1 Suites et Séries

Compléter :

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas.
$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

2. Donner une suite équivalente à $\ln(1+e^{-n})$:
$$\frac{1}{e^n}.$$

3. Donner un équivalent de la suite réelle $u = (2^n \ln(n) + n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$:
$$u \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n \ln(n).$$

4. **T1** • Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \ldots, a_k$ des réels et $b_0, b_1, \ldots, b_k$ des réels tels que $b_0 < b_1 < \ldots < b_k$. Si $a_k \neq 0$, alors $a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \ldots + a_k n^{b_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} a_k n^{b_k}$.

   T2 • Si, à partir d'un certain rang $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas **et** $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors

   (2) $e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

1 Suites et Séries

Compléter :

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas.
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

2. Donner une suite équivalente à $e^{\frac{1}{n}} - 1$:
$$\frac{1}{n}.$$

3. Donner un équivalent de la suite réelle $u = \left(7^n - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)_{n\geqslant 2}$:
$$u \underset{n\to+\infty}{\sim} 7^n.$$

4. **T2** • Si, à partir d'un certain rang $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas **et** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors

   (1) $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

   (3) $\forall\, a \in \mathbb{R}^*,\ (1+u_n)^a - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} a u_n$

Remédiation 1 Calcul de sommes (et produits) fini(e)s

III. Sommes simples

Rappel – Sommes usuelles :

À retenir
Dans une somme télescopique, il ne reste que les deux extrêmes.

$$\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) = \cancel{u_1} - u_0 + \cancel{u_2} - \cancel{u_1} + \ldots + \cancel{u_n} - \cancel{u_{n-1}} + u_{n+1} - \cancel{u_n}$$
$$= u_{n+1} - u_0.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Remarque
Si $q \neq 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} q^k = q\,\frac{1-q^n}{1-q}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Exercice I.1 – (Sommes télescopiques) [Correction p. 139]

Calculer les sommes et les produits suivants :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.
4. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right)$.

Exercice I.2 [Correction p. 139]

Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$.
3. Pour $p < n$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} 3^k$.

IV. Sommes doubles

Exercice I.3 [Correction p. 140]

Calculer les sommes et produits suivants :

1. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)$.
2. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j}$.

Exercice I.4 – (Un produit) [Correction p. 140]

Calculer le produits suivant :

$$\prod_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} ij.$$

Exercice I.5 – (Somme triangulaire) [Correction p. 141]

Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$.

Correction de l'exercice I.1 : [Énoncé]

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k) - \ln(k+1)\right) = \ln(1) - \ln(n+1) = -\ln(n+1).$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ par décomposition en éléments simples puis télescopage.

3. $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k+1-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \\ &= \sqrt{n+1}-\sqrt{0} \\ &= \sqrt{n+1}.\end{aligned}$$

Idée
On commence par multiplier numérateur et dénominateur par la partie conjuguée.

4. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}.$

Correction de l'exercice I.2 : [Énoncé]

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2\,\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = n(n+1) + n + 1 = (n+1)^2.$

Commentaire
Une autre méthode est décrire $2k+1 = (k+1)^2 - k^2$ et de reconnaître une somme télescopique :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 - k^2 = (n+1)^2.$

2. Il suffit simplement de développer et d'utiliser les sommes classiques :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n+1)}{2} + 2n \\ &= \frac{n}{3}(n^2+6n+11).\end{aligned}$$

3. Pour $p < n$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n} 3^k &= 3^p \sum_{k=p}^{n} 3^{k-p} = 3^p \sum_{k=0}^{n-p} 3^k \\ &= 3^p\,\frac{1-3^{n-p+1}}{1-3} = \frac{3^p}{2}\left(3^{n-p+1}-1\right).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice I.3 : [Énoncé]

1. $$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(i+j)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n} j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(ni + \frac{n(n+1)}{2}\right)\\ &= n\sum_{i=1}^{n} i + \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} 1\\ &= n\,\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\times n\\ &= 2\,\frac{n^2(n+1)}{2}\\ &= n^2(n+1).\end{aligned}$$

2. On suppose $x \neq 1$ pour éviter le cas trivial égal à $(n+1)^2$.

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j} &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} x^{i+j}\\ &= \sum_{i=0}^{n}\left(x^i \sum_{j=0}^{n} x^j\right) && \text{(on factorise par } x^i\text{)}\\ &= \sum_{i=0}^{n}\left(x^i \times \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)\\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\sum_{i=0}^{n} x^i && \left(\text{on factorise par } \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)\\ &= \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)\\ &= \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^2.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice I.4 : [Énoncé]

$$\begin{aligned}\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} ij = \prod_{i=1}^{n}\left(i^n \prod_{j=1}^{n} j\right) && \text{(on sort le } i \text{ en facteur de chaque } j\text{)}\\ &= \prod_{i=1}^{n}(i^n\, n!) && \left(\prod_{j=1}^{n} j = n!\right)\\ &= (n!)^n\left(\prod_{i=1}^{n} i^n\right) && \text{(on sort le } n! \text{ en facteur de chaque } i^n\text{)}\\ &= (n!)^n\left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^n && (a^n b^n) = (ab)^n)\\ &= (n!)^n (n!)^n && \left(\prod_{i=1}^{n} i = n!\right)\\ &== (n!)^{2n}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice I.5 : [Énoncé]

En choisissant astucieusement l'ordre de sommation, il vient :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}i\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\cancel{j}}\times\frac{\cancel{j}(j+1)}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1)=\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right)=\frac{n(n+3)}{4}.$$

Remédiation 2

Nature d'une série -- À l'aide de comparaisons

Exercice I.1 [Correction p. 142]

Quelle est la nature des séries :

1. $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{\ln(n)}{n}$?

2. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2+\sin^2(n)}$?

Correction de l'exercice I.1 : [Énoncé]

Attention
Il n'y a qu'une seule démonstration en 3 points clés à vérifier !

1.
   - $\forall\, n \geqslant 2$, $\ln(n) \geqslant 1$ donc $\dfrac{\ln(n)}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$.
   - $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} \geqslant 0$ (ou de signe constant) donc $\dfrac{\ln(n)}{n}$ aussi.
   - La série de terme général $\dfrac{1}{n}$ est divergente.

   D'après le critère de comparaison des séries à terme positif, la série $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{\ln(n)}{n}$ est divergente.

Remarque
On peut préciser que c'est la série harmonique ou une série de Riemann pour $\alpha = 1$ mais ce n'est pas le plus important qui est de préciser le signe constant.

2.
   - $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\sin^2(n) \geqslant 0$ donc $n^2+\sin^2(n) \geqslant n^2$ et $\dfrac{1}{n^2+\sin^2(n)} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
   - $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$ (ou de signe constant) donc $\dfrac{1}{n^2+\sin^2(n)}$ aussi.
   - La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ est convergente.

   D'après le critère de comparaison des séries à terme positif, la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2+\sin^2(n)}$ est convergente.

Remédiation 3

Nature d'une série -- À l'aide d'équivalences

Exercice I.1 [Correction p. 143]

Quelle est la nature des séries :

1. $\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$?

2. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{n+1}$?

Correction de l'exercice I.1 : [Énoncé]

Attention
Il n'y a qu'une seule démonstration en 3 points clés à vérifier !

1.
   - $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \geqslant 0$ (ou de signe constant) donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ aussi.
   - La série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente.

   D'après le critère de comparaison des séries à terme positif, la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est divergente.

Remarque
On peut préciser que c'est la série harmonique ou une série de Riemann pour $\alpha = 1$ mais ce n'est pas le plus important qui est de préciser le signe constant.

2.
   - $\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n}}{n} = \frac{1}{n^2}$.
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2} \geqslant 0$ (ou de signe constant) donc $\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{n+1}$ aussi.
   - La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente.

   D'après le critère de comparaison des séries à terme positif, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{n+1}$ est convergente.

Remédiation 4

Nature d'une série -- À l'aide de dominations

Exercice I.1 [Correction p. 144]

Quelle est la nature des séries :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n2^n}$?

2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n}$?

Correction de l'exercice I.1 : [Énoncé]

Attention
Il n'y a qu'une seule démonstration en 3 points clés à vérifier !

1.
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\ln(n)}{n2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ par croissances comparées donc $\displaystyle\frac{\ln(n)}{n2^n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{2^n}\right)$.
- $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{\ln(n)}{n2^n}$ et $\displaystyle\frac{1}{2^n}$ sont de signe constant (positif).
- La série de terme général $\displaystyle\frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente.

D'après le critère de comparaison des séries à terme positif, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)}{n2^n}$ est convergente.

2.
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\ln(n)}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$ donc $\displaystyle\frac{1}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.
- $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{\ln(n)}{n}$ et $\displaystyle\frac{1}{n}$ sont de signe constant (positif).
- La série de terme général $\displaystyle\frac{1}{n}$ est divergente.

D'après le critère de comparaison des séries à terme positif, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)}{n}$ est divergente.

Remédiation 5

Nature d'une série -- À l'aide de la divergence grossière

Exercice I.1 [Correction p. 145]

Quelle est la nature des séries :

1. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{\ln(n)}$?
2. $\sum_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$?
3. $\sum_{n\geqslant 0} (-2)^n$?

Correction de l'exercice I.1 : [Énoncé]

Méthode
Le cas le plus simple à regarder en premier.

1. Par croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln(n)} = +\infty \neq 0$ donc le terme général ne tend pas vers 0 et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{\ln(n)}$ diverge (grossièrement).

2. $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\frac{1}{n} = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^1 \neq 0$ donc le terme général ne tend pas vers 0 et la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ diverge (grossièrement).

3. $\lim_{n\to+\infty} (-2)^{2n} = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} (-2)^{2n+1} = -\infty$ donc le terme général n'a pas de limite en $+\infty$ et surement pas 0 donc la série $\sum_{n\geqslant 0} (-2)^n$ diverge (grossièrement).

Remédiation 6

Nature d'une série -- À l'aide de la convergence absolue

Exercice I.1 [Correction p. 146]

Quelle est la nature des séries :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^2}$?

2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos(n)$?

Correction de l'exercice I.1 : [Énoncé]

1.
   - $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \left|\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right|=\dfrac{1}{n^2}$.
   - La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.

   La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^2}$ est donc absolument convergente donc convergente.

2.
   - $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ -1\leqslant\cos(n)\leqslant 1$ donc $\left|\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\cos(n)\right|\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   - $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \left|\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\cos(n)\right|$ et $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ sont de signe constant (positif).
   - La série de terme général $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique convergente.

   D'après le critère de comparaison des séries à terme positif, la série $\left|\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\cos(n)\right|$ est convergente.

   La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos(n)$ est donc absolument convergente donc convergente.

Attention
L'absolue convergence ne fonctionne pas pour montrer la divergence !

Remédiation 7 — Nature d'une série et somme -- À l'aide d'une somme télescopique

Exercice I.1 [Correction p. 147]

1. Déterminer deux réels a et b tels que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n}{(n+1)!} = \frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!}.$$
2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{(n+1)!}$ est convergente et déterminer la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

Correction de l'exercice I.1 : [Énoncé]

Idée
La seule manière pour nous de calculer une somme sont les sommes géométriques, exponentielles ou télescopiques.

1. Le plus simple ici est de réduire au même dénominateur et d'identifier :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!} = \frac{(n+1)a}{(n+1)!} - \frac{b}{(n+1)!} = \frac{(n+1)a-b}{(n+1)!} = \frac{na+a-b}{n+1)!}.$$
a et b sont donc solutions du système $\begin{cases} a & = 1 \\ a-b &= 0. \end{cases}$

À retenir
$(n+1)! = (n+1)\times n!$.

On trouve donc :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

2. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{n}{(n+1)!} &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) && \text{d'après la question précédente.} \\ &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{(\mathrm{N}+1)!} && \text{en reconnaissant une somme télescopique} \\ &= 1 - \frac{1}{(\mathrm{N}+1)!}. \end{aligned}$$
Comme $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} \dfrac{1}{(\mathrm{N}+1)!} = 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{(n+1)!}$ est convergente et on a :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$$

Remédiation 8 — Nature d'une série et somme -- Séries alternées

Commentaire
C'est un grand classique des concours en marge du programme. À savoir faire donc !

Exercice I.1 [Correction p. 148]

On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle.

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k, \qquad v_n = \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k \quad \text{et} \quad s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_0 \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant u_0$.
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite s et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet la même limite s.
3. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ est convergente de somme s.
4. **Application :** Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente. On note $\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{k+1}$ sa somme.

Correction de l'exercice I.1 : [Énoncé]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

À retenir
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si, et seulement si
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0.$

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{2(n+1)}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k \\
&= \sum_{k=0}^{2n+2}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k \\
&= \cancel{\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k} + (-1)^{2n+1}a_{2n+1} + (-1)^{2n+2}a_{2n+2} - \cancel{\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k} \\
&= -a_{2n+1} + a_{2n+2}.
\end{aligned}$$

Attention
L'indice $2n$ devient $2n+2$ lorsqu'on remplace n par $n+1$.

Idée
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (-1)^{2n+1} = -1$ et $(-1)^{2n} = 1$.

Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $a_{2n+1} \geqslant a_{2n}$ donc

$$\boxed{u_{n+1} - u_n \leqslant 0 : \text{ la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

Le raisonnement est identique pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k \\ &= \cancel{\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+3} a_{2n+3} - \cancel{\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k} \\ &= a_{2n+2} - a_{2n+3}. \end{aligned}$$

Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $a_{2n+2} \geqslant a_{2n+3}$ donc

$$\boxed{v_{n+1} - v_n \geqslant 0 : \text{ la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

2. Grâce aux variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a déjà :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_0 \leqslant v_n \qquad \text{et} \qquad u_n \leqslant u_0.$$

Méthode
$a \leqslant b \iff a - b \leqslant 0.$

Montrons que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant u_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a_{2n+1}$.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de réels strictement positifs, on en déduit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \leqslant 0 \iff v_n \leqslant u_n.$$

En conclusion, on a bien

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_0 \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant u_0.}$$

À retenir
Le théorème de convergence monotone : « tout suite monotone bornée converge. »

La suite

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par v_0,
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par u_0,

donc elles convergent d'après le théorème de convergence monotone respectivement vers s_u et s_v.

Remarque
On ne sait pas encore que $s_u = s_v$.

Or, $v_n - u_n = -a_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Par passage à la limite (autorisé car les suites sont convergentes), on a :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0 \iff s_v - s_u = 0 \iff s_u = s_v.$$

$$\boxed{\text{Les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent vers la même limite } s.}$$

3. **Remarque :** Pas d'autre choix que de revenir à la définition.

Globalement, comme les deux suites extraites d'indices pairs et impairs de la suite $\left(s_n = \sum_{k=0}(-1)^n(-1)^n a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, cela va être le cas de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit I un intervalle ouvert contenant s.

- Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers s, il existe un rang $\mathrm{N}_u \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant \mathrm{N}_u, \quad s_{2n} \in \mathrm{I}.$$

- Comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers s, il existe un rang $\mathrm{N}_v \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant \mathrm{N}_v, \quad s_{2n+1} \in \mathrm{I}.$$

Posons $\mathrm{N} = \max(2\mathrm{N}_u, 2\mathrm{N}_v)$. Soit $n \geqslant \mathrm{N}$:

— Si n est pair ($n = 2k$), alors $2k \geqslant 2\mathrm{N}_u \implies k \geqslant \mathrm{N}_u$, donc $s_n = s_{2k} \in \mathrm{I}$.

— Si n est impair ($n = 2k+1$), alors $2k+1 \geqslant 2\mathrm{N}_v \implies k \geqslant \mathrm{N}_v$, donc $s_n = s_{2k+1} \in \mathrm{I}$.

On en déduit :

$$\boxed{\forall n \geqslant \mathrm{N}, \quad s_n \in \mathrm{I}}$$

Ainsi, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers s *i.e.*

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n \text{ est convergente vers } s.}$$

4. Il s'agit juste d'appliquer le résultat que l'on vient de démontrer :

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \dfrac{1}{n+1}$.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle.

D'après la question précédente, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente $\left(\text{vers } \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$.

TD 2 Compléments sur les suites et les séries réelles

Rappels de limites usuelles

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

— $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

— $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{e^n} = 0$

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n}{n} = +\infty$

— Si $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

— Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\ln(n)} = +\infty$

— Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{n^\alpha} = +\infty$

— Si $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n n^\alpha = 0$

— Si $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n \ln(n) = 0$

— $\forall\, \alpha < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$

— $\forall\, \alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$

— $\forall\, \alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{e^n} = 0$

— $\forall\, \alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0$

— Si $u_n > 0$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \ln(u_n) = 0$

— Si $u_n > 0$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\forall\, \alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^\alpha \ln(u_n) = 0$.

V. Technique

Exercice I.1

Dans chacun des cas ci-dessous, dire quelle suite réelle est négligeable devant quelle autre.

1. $u = (4)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = \left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
2. $u = (\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (5\ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$
3. $u = (n^5)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (e^n)_{n\in\mathbb{N}}$
4. $u = \left(\dfrac{5}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = \left(\dfrac{2}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
5. $u = (n^\alpha e^{-n})_{n\in\mathbb{N}^*}, \alpha > 0$ et $v = \left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
6. $u = (3n-1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = \left(\dfrac{n^3+3n}{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
7. $u = \left(3n + \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = \left(3 - \dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
8. $u = \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (e^{-n})_{n\in\mathbb{N}^*}$
9. $u = \left(n^{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (\ln(n)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice I.2 – (Compatibilité avec la racine carrée et la valeur absolue) [Correction p. 158]

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes non nuls telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

1. Montrer que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$.
2. On suppose, de plus, qu'à partir d'un certain rang, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
   Montrer que $\sqrt{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{v_n}$.

Exercice I.3 – (Recherche d'équivalents)

Donner un équivalent de la suite réelle u :

1. $u = (n^3 + 3n^2 - 1)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $u = \left(\dfrac{n^5 - 3n^2 + 2}{n^8 + n^3 + 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
3. $u = (-5n^3 - 2n^2 + e)_{n\in\mathbb{N}}$
4. $u = \left(\dfrac{2 + n^3 - 8n^5}{3n^5 - 2n^4 + \sqrt{2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
5. $u = \left(\dfrac{5n^3 + \ln(n)}{ne^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
6. $u = (n + \ln(n) + 4^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
7. $u = (2^n \ln(n) + n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$
8. $u = (\ln(n^2 + 1))_{n\in\mathbb{N}}$
9. $u = \left(\dfrac{n2^n + 3n^2}{3^n + 5^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
10. $u = \left(7^n - \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\right)_{n\geqslant 2}$
11. u converge vers 1
12. $u = (\ln(n^3 e^{2n}))_{n\in\mathbb{N}^*}$
13. $u = \left(\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
14. $u = (\ln(n+1) - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$
15. $u = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$
16. $u = \left(e^{n+\frac{1}{n^2}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
17. $u = \left(e^{n^2+n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
18. $u = \left(n \ln\left(1 + \dfrac{4}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
19. $u = \left(n \ln\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) - 2\right)_{n\geqslant 3}$
20. $u = \left(\dfrac{e^{\frac{\ln(n)}{n}} - 1}{n\ln(n)}\right)$
21. $u = \left(\sqrt{1 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^3}\right)} - 1\right)_{n\geqslant 1}$
22. $u = \left(\sqrt{n+1}(\ln(n+1) - \ln(n))\right)_{n\in\mathbb{N}}$
23. $\lim\limits_{n\to+\infty} (nu_n + 2) = 3$
24. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 3n^2 + 1 \leqslant u_n \leqslant 3n^2 + e^{-n}$
25. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant nu_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{\ln(n)}$.

Exercice I.4 – (Un cas de non équivalence de deux suites réelles remarquables) [Correction p. 158]

On veut montrer que $n!$ et n^n ne sont pas équivalents au voisinage de $+\infty$.

On définit alors la suite u par, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$.

1. Déterminer la limite de $n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.
2. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
   a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   b. Conclure après un raisonnement par l'absurde.

Exercice I.5 – (Limite, négligeabilité et équivalence) [Correction p. 159]

Étudier la limite de la suite réelle u dans les cas suivants :

1. $u = (-5n^3 + 2n^2 + e)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $u = \left(\dfrac{2 + n^3 - 8n^5}{3n^5 - 2n^4 + \sqrt{2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
3. $u = \left(\dfrac{5n^3 + \ln(n)}{ne^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
4. $u = \left(\dfrac{n+1}{\sqrt{n^3 - 2n + 1}}\right)_{n\geqslant 2}$
5. $u = \left(\dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $0 < a < b$
6. $u = \left(\dfrac{n^2(\ln(n+1) - \ln(n))}{\sqrt{n^2+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
7. $u = \left(\dfrac{ne^n}{2\ln(n) + \dfrac{2}{5^n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
8. $u = \left(\left(1 + \dfrac{5}{n}\right)^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice I.6 [Correction p. 160]

1. Montrer que, pour tout $x \neq \pm 1$, $\dfrac{2}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$.

Exercice I.7 – (Développement asymptotique d'une suite)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + n + 1}$.

1. Écrire une fonction Python prenant en argument d'entrée un entier naturel n et renvoyant la valeur de u_n.
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes strictement positifs.
3. Établir : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$. En déduire un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.
5. a. Démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3\left(u_n - \dfrac{1}{n}\right) = -1$.

   b. En déduire : $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Exercice I.8 – (Suite d'intégrales)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Étudier les variations de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Démontrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer la valeur de sa limite.
4. Démontrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{n+1} = (n+1)\mathrm{I}_n - \mathrm{e}^{-1}$.

5. En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \mathrm{I}_n - \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.
   Trouver alors un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.
6. Écrire une fonction Python prenant en argument d'entrée un entier naturel n et renvoyant la valeur de I_n.

VI. Séries numériques réelles

Exercice I.9 – (Nature d'une série réelle par télescopage) [Correction p. 160]

Étudier la nature des séries réelles ci-dessous puis calculer leur somme.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2-1}$

Exercice I.10 – (Nature d'une série réelle par comparaison et par négligeabilité) [Correction p. 161]

Déterminer la nature des séries réelles ci-dessous.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2+3n+1}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n2^n}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^n}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^{n-1}}{n!}$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{3^n}$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2^{2n}}$
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n}{1+n!}$
9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2\ln(n)}$
10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} e^{\frac{1}{n^2}}$
11. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n}$
12. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{n}{\ln(n)}$
13. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$
14. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n$
15. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 2^{2n-1}e^{-n}$
16. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^3e^{-n}$.

Exercice I.11 – (Nature d'une série réelle par équivalence) [Correction p. 161]

Déterminer la nature des séries réelles ci-dessous.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{3n^2+7}{5n^4-2n+1}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3e^n}{e^n+n}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{n+\frac{1}{2}}-\sqrt{n}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sqrt{n}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]$
9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\left(e^{\frac{\pi}{n}}-1\right)$.

Exercice I.12 – (Vrai ou faux ?)

1. Si deux suites ont même limite, alors elles sont équivalentes.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, alors les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \ln(1+u_n)$ ont même nature.
3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs telles que $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$.
   Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente, alors $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ également.
4. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs telles que $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$.
   Si $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est divergente, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ également.
5. Si $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
7. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n}$, alors il existe un réel $a\in[1\,;2]$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{n}$.

Exercice I.13 – (Séries réelles diverses) [Correction p. 162]

1. Étudier l'existence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+2)}$ puis calculer sa somme S.
   $\left(\text{On pourra montrer que } \forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\right)\right)$.
2. Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln(n)}{n^3}$.
   Calculer la limite de $n^2\,|u_n|$ et en déduire la nature de la série.
3. On suppose qu'au voisinage de $+\infty$, $\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right) = \dfrac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right) - \dfrac{1}{n}$.

Exercice I.14 – (Une application de l'équivalence) [Correction p. 164]

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{n+1}$.

1. Montrer que, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Montrer que la suite (u_n) converge vers 1.
3. Déterminer un équivalent de $u_n - 1$, et en déduire l'existence d'un réel a tel que
$$u_n - 1 = \frac{a}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice I.15 – (Compléments sur des convergences de suites réelles) [Correction p. 165]

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que la suite $\left(\dfrac{x^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 .

2. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in]0\,;1[$. Montrer que la suite $\left(n^\alpha x^n\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0\,;n]\!]$ et $x \in]0\,;1[$.

   Montrer que la suite $\left(\binom{n}{k}x^n\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 de deux façons différentes.
4. a. Démontrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

   b. En déduire la limite de la suite $\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)\right)_{n\geqslant 1}$.

Exercice I.16 – (Série alternée) [Correction p. 167]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante, à termes positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

1. En considérant la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$ et ses deux suites extraites $(S_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$, montrer que la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.
2. Soit $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$.

   Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |R_n| \leqslant u_{n+1}$.
3. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ puis majorer $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right|$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exercice I.17 [Correction p. 169]

Établir la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}}$ et démontrer que $\dfrac{1}{2} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.

Exercice I.18 – ((⋆⋆) Dérivation d'une série de fonctions)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par f_n la fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I telle que $|f_n''|$ soit bornée et telle que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, les séries de terme général $f_n(x)$, $f_n'(x)$ et $\sup\limits_{t\in\mathrm{I}}|f_n''(t)|$ soient convergentes.

On suppose de plus que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathrm{I},\ \forall\, h \in \mathbb{R}, h+x \in \mathrm{I},\ \left|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)\right| \leqslant \frac{h^2}{2}\sup_{t\in\mathrm{I}}|f_n''(t)|\,.$$

Enfin, on définit alors la fonction S sur I par $\mathrm{S}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathrm{I},\ \forall\, h \in \mathbb{R},\ h+x \in \mathrm{I}$,
$$\left|\sum_{k=0}^{n}\Big(f_k(x+h) - f_k(x) - hf_k'(x)\Big)\right| \leqslant \frac{h^2}{2}\sum_{k=0}^{n}\sup_{t\in\mathrm{I}}|f_k''(t)|\,.$$
2. Montrer que $\forall\, x \in \mathrm{I},\ \forall\, h \in \mathbb{R}^*,\ h+x \in \mathrm{I}$,
$$\left|\frac{\mathrm{S}(x+h)-\mathrm{S}(x)}{h} - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\sup_{t\in\mathrm{I}}|f_{kn}''(t)|\,.$$

3. En déduire que S est dérivable sur I et déterminer une expression de S'.

VII. Pour s'entraîner

Exercice I.19 – (Croissances comparées)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

1. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Établir : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
3. En déduire : $n! = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(n^n)$.

Exercice I.20 – (Suite d'intégrales)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}_n = n\mathrm{I}_n$.

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{J}_n = \ln(2) - \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\mathrm{d}x$.
3. Établir : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\mathrm{d}x = 0$.
4. En déduire la limite de $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

VIII. Concours

Exercice I.21 – (Type oral)

1. Question de cours : Critères de comparaison sur les séries à terme général positif.
2. Soit $x \in [0\,;+\infty[$. Établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k+x}$.

   On notera $f(x)$ sa somme.
3. Calculer $f(0)$.
4. Étudier les variations de la fonction f ainsi définie sur $[0\,;+\infty[$.
5. Établir : $\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\ f(2x) = \dfrac{1}{2}f(x) + \dfrac{1}{2x+1}$.
6. Déduire des deux questions précédentes que f possède une limite en $+\infty$ et la déterminer.
7. a. Montrer que pour tous réels positifs x et y, on a : $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{4}{3}|x-y|$.

   b. En déduire que f est continue sur $[0\,;+\infty[$.

Corrigés

Correction de l'exercice I.2 : [Énoncé]

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes non nuls telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

1. Montrons que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$.

   Pour n assez grand, $\dfrac{|u_n|}{|v_n|} = \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right|$.

   Par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. De plus, $\lim\limits_{X\to 1} |X| = |1| = 1$ par continuité de la fonction valeur absolue en 1 .

   Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_n|}{|v_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| = 1$ par composition. D'où $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$.

2. On suppose, de plus, qu'à partir d'un certain rang, $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Montrons que $\sqrt{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{v_n}$.

   Pour n assez grand, $\dfrac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n}} = \sqrt{\dfrac{u_n}{v_n}}$.

   Par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. De plus, $\lim\limits_{X\to 1} \sqrt{X} = \sqrt{1} = 1$ par continuité de la fonction racine carrée en 1 .

   Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{u_n}{v_n}} = 1$ par composition. D'où $\sqrt{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{v_n}$.

Correction de l'exercice I.4 : [Énoncé]

1. **Remarque :** , les théorème généraux ne peuvent nous aider à trouver la limite. Nous allons donc utiliser une équivalence.

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on obtient l'équivalence $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. De plus, par réflexivité, $n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et par compatibilité avec le produit, $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \dfrac{1}{n}$ soit $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

   On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.

   Comme $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{X\to 1} e^X = e^1 = e$ par continuité de la fonction exp en 1, on en déduit par composition que :

   $$\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e.$$

   D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, un simple calcul donne :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)(n!)} = \frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n}{n!} \\ &= \frac{n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n!} = \frac{n^n}{n!}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ u_{n+1} &= u_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned} \tag{I.2}$$

b. Supposons, par l'absurde, que $n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$ *i.e.* la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 1$ également.

D'après (1.), $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ entraînerait alors, par passage à la limite dans l'équation (I.2), $1 = 1 \times e$ ce qui n'est pas.

On conclut donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 1 *i.e.* $n^n \not\underset{n\to+\infty}{\sim} n!$.

Correction de l'exercice I.5 : [Énoncé]

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -5n^3$ car polynomiale en n, par équivalence de référence.
   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -5n^3 = -\infty$.

2. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-8n^5}{3n^5} = \dfrac{-8}{3} \neq 0$ car suite rationnelle en n, par équivalence de référence.
   On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{8}{3}$.

3. $5n^3 + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 5n^3$ par croissance comparée.
   Par compatibilité de l'équivalence avec le quotient, on aboutit à $\dfrac{5n^3+\ln(n)}{ne^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{5n^3}{ne^n} = \dfrac{5n^2}{e^n}$.
   Comme $5n^2 = \underset{n\to+\infty}{o}(e^n)$, on conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^2}{e^n} = 0$.

4. $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $\sqrt{n^3-2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n^3}$.
   Par compatibilité de l'équivalence avec le quotient, on obtient $\dfrac{n+1}{\sqrt{n^3-2n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{\sqrt{n^3}} = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
   On conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$.

5. On factorise par la suite qui domine au numérateur et au dénominateur.

$$\forall\, n\in\mathbb{N}, u_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n} = \frac{b^n\left(\frac{a^n}{b^n}-1\right)}{b^n\left(\frac{a^n}{b^n}+1\right)} = \frac{\frac{a^n}{b^n}-1}{\frac{a^n}{b^n}+1} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n-1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}.$$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = 0$ par suite géométrique de raison ayant une valeur absolue strictement inférieure à 1, on a $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -1$ et $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.
   Par compatibilité de l'équivalence avec le quotient, on obtient $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{1} - 1$.
   On conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

6. Pour n assez grand, $u_n = \dfrac{n^2(\ln(n+1)-\ln(n))}{\sqrt{n^2+1}} = \dfrac{n^2\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\sqrt{n^2+1}} = \dfrac{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2+1}}$.

   — Par compatibilité de l'équivalence avec le produit, au numérateur, on a :

$$n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\,\frac{1}{n} = n.$$

   — Par compatibilité de l'équivalence avec le passage à la puissance, au dénominateur on a :

$$\sqrt{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n^2} = n.$$

En conclusion, par compatibilité de l'équivalence avec le quotient, on obtient $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1$.
Il vient alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

7. $ne^n \underset{n\to+\infty}{\sim} ne^n$ et $2\ln(n) + \frac{2}{5^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln(n)$ (le montrer).
Par compatibilité de l'équivalence avec le quotient, on obtient $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{ne^n}{2\ln(n)}$.
Comme $\ln(n) = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$, on conclut, par produit, que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln(n)} \times \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{2} = +\infty.$$

Attention
Le passage à l'exponentielle n'étant pas compatible avec l'équivalence, nous allons procéder par limite et composition.

8. Pour n assez grand, $u_n = \left(1+\frac{5}{n}\right)^{2n} = e^{2n\ln\left(1+\frac{5}{n}\right)}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$ alors $\ln\left(1+\frac{5}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5}{n}$ et, par compatibilité de l'équivalence avec le produit,

$$2n\ln\left(1+\frac{5}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\frac{5}{n} = 10 \neq 0.$$

L'équivalence ci-dessus conduit à $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n\ln\left(1+\frac{5}{n}\right) = 10$.
Comme $\lim\limits_{X\to 10} e^X = e^{10}$, par continuité de la fonction exp en 10, on conclut par composition :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{5}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to+\infty} e^{2n\ln\left(1+\frac{5}{n}\right)} = e^{10}.$$

Correction de l'exercice I.6 : [Énoncé]

1. Il suffit simplement de réduire au même dénominateur :

$$\forall x \neq \pm 1,\ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}.$$

2. $$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2S_n &= 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Idée
Cette méthode, consistant à se servir de la décomposition en éléments simples est assez générale pour trouver les sommes de séries de terme général une fraction rationnelle.

Donc la série converge et on a : $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2-1} = \sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{3}{4}$.

Correction de l'exercice I.9 : [Énoncé]

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$.
La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est donc de même nature que la suite $(\ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Elle est donc divergente (vers l'infini).
On peut préciser :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(n+1).$$

3. De la même manière,

$$\begin{aligned}\forall\, n \geqslant 2,\ v_n &= \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)\\ &= \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{\frac{n}{n+1}}\right)\\ &= \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ est donc de même nature que la suite $\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Comme $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge et on a même :

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2.$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = -\ln 2.$$

Correction de l'exercice I.10 : [Énoncé]

14. — $\forall\, n \in [\![2\,;+\infty[\![,\ \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}$ donc $\forall\, n \geqslant 2,\ \frac{1}{3}+\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ soit $\frac{1}{3}+\frac{1}{n} \leqslant \frac{5}{6}$.

Par croissance des fonctions puissances, $\forall\, n \geqslant 2,\ \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

— La série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n$ et la série géométrique $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{5}{6}\right)^n$ sont à termes positifs.

— Comme $\left|\frac{5}{6}\right| < 1$, la série géométrique $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{5}{6}\right)^n$ converge.

— Par comparaison globale, il vient que la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n$ converge également.

15. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 2^{2n-1}e^{-n} = 2^{-1}\times 2^{2n}\times e^{-n} = 2^{-1}\times (2^2)^n \times \frac{1}{e^n} = 2^{-1}\times\left(\frac{2^2}{e}\right)^n = \frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{e}\right)^n$.

La série $\sum_{n\geqslant 0} 2^{2n-1}e^{-n}$ est donc une série géométrique de raison $\frac{4}{e} > 1$ donc elle diverge.

16. — Par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3e^{-n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^5}{e^n} = 0$.

Donc $n^3e^{-n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

— La série $\sum_{n\geqslant 1} n^3e^{-n}$ et la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs.

— Comme la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge car $2>1$, alors, par négligeabilité, la série $\sum_{n\geqslant 1} n^3e^{-n}$ converge également.

Correction de l'exercice I.11 : [Énoncé]

7. — Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, alors $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

— La série $\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ sont à termes positifs.

— Comme la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge (Série de Riemann avec $\alpha \leqslant 1$), alors, par équivalence, il vient que la série $\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge également.

8. — Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0$, alors $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}-1\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\times\frac{1}{2n}=\frac{1}{4n}$.
Par produit, on alors $\sqrt{n}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{n}\times\frac{1}{4n}=\frac{1}{4\sqrt{n}}$.

— La série $\sum_{n\geqslant 1}\sqrt{n}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]$ et la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{4\sqrt{n}}$ sont à termes positifs.

— Comme les séries $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{4\sqrt{n}}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ sont de même nature et que la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverge $\left(\frac{1}{2}\leqslant 1\right)$, alors, par équivalence, on peut affirmer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\sqrt{n}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]$ diverge également.

9. — Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}=0$, alors $e^{\frac{\pi}{n}}-1\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\pi}{n}$ et donc par produit, $\frac{1}{n}\left(e^{\frac{\pi}{n}}-1\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{n^2}$.

— La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{\pi}{n}}-1\right)$ et la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\pi}{n^2}$ sont à termes positifs.

— Comme les séries $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\pi}{n^2}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ sont de même nature et que la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge $(2>1)$, alors, par équivalence, on peut affirmer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{\pi}{n}}-1\right)$ converge également.

Correction de l'exercice I.13 : [Énoncé]

1. **Existence de la somme :** La somme existe si et seulement si la série converge.
Or,

— par compatibilité de l'équivalence avec le produit et le passage à l'inverse, $\frac{1}{n(n+2)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$.

— Les séries S et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs.

— La série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$ converge $(2>1)$.

Par conséquent, d'après les critères de comparaison sur l'équivalence la série converge. La somme S existe

Décomposition du terme général : On montre que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$ soit par identification, soit en factorisant le membre de droite soit par les limites.

— Le plus simple quand on a le résultat : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{n+2}{n(n+2)}-\frac{n}{n(n+2)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{(n+2)-n}{n(n+2)}\right)=\frac{1}{n(n+2)}.$$

— Autres méthodes : on décompose le quotient en éléments simples :

$$\exists (a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid \forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n(n+2)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+2}.$$

Reste à déterminer les coefficients a et b :

— Par identification : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{a(n+2)}{n(n+2)}+\frac{bn}{n(n+2)}=\frac{a(n+2)+bn}{n(n+2)}=\frac{(a+b)n+2a}{n(n+2)},$$

ce qui équivaut à

$$1=(a+b)n+2a\iff\begin{cases}a+b=0\\2a=1\end{cases}\iff\begin{cases}b=-\dfrac{1}{2}\\a=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

— Par usage des limites :

$$a=\lim_{n\to 0} n\times\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad b=\lim_{n\to -2}(n+2)\times\frac{1}{n(n+2)}=-\frac{1}{2}.$$

Dans tous les cas, on trouve le résultat.

Calcul de la somme : Pour calculer la somme, on revient à la définition de la convergence d'une série à savoir on calcule la limite des sommes partielles. Pour N assez grand,

$$\begin{aligned}
\mathrm{S_N}&=\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n+2}\right) && \text{par linéarité d'une somme finie}\\
&=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n}-\sum_{k=3}^{\mathrm{N}+2}\frac{1}{k}\right) && \text{en posant } k=n+2\\
&=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n}-\sum_{n=3}^{\mathrm{N}+2}\frac{1}{n}\right) && \text{en posant } k=n\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{n}+\sum_{n=3}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n}\right)-\left(\sum_{n=3}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n}+\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\mathrm{N}+2}\frac{1}{n}\right)\right] && \text{par la relation de Chasles}\\
&=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{n}+\sum_{n=3}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n}-\sum_{n=3}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n}-\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\mathrm{N}+2}\frac{1}{n}\right] && \text{après simplification par } \sum_{n=3}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n}\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\mathrm{N}+1}-\frac{1}{\mathrm{N}+2}\right]\\
&=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(\mathrm{N}+1)}-\frac{1}{2(\mathrm{N}+2)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

En conclusion, $\mathrm{S}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{3}{4}$.

2. Soit la série de terme général $u_n=\dfrac{(-1)^n\ln(n)}{n^3}$. c'est une série alternée donc, dans ce cas simple, on regarde s'il y a convergence absolue.

— $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\left|u_n\right|=\lim_{n\to+\infty} n^2\left|\frac{(-1)^n\ln(n)}{n^3}\right|=\lim_{n\to+\infty} n^2\frac{\ln(n)}{n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n}=0$ par croissance comparée.

— Pour n assez grand, $n^2|u_n| = \dfrac{|u_n|}{\dfrac{1}{n^2}}$. Par conséquent, la limite ci-dessus équivaut à $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\text{o}}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

— Les séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}|u_n|$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs.

— La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$ converge $(2>1)$, par conséquent la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}|u_n|$ converge par négligeabilité *i.e.* la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}u_n$ converge absolument.

La convergence absolue impliquant la convergence, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n\ln(n)}{n^3}$ est convergente.

3. On suppose qu'au voisinage de $+\infty$, $\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right) = \dfrac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{\text{o}}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
D'après l'égalité au voisinage de $+\infty$, on a

$$\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - \frac{1}{n} = \frac{2}{n} - \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{\text{o}}\left(\frac{1}{n}\right) \iff \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{\text{o}}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Le lien entre équivalence et négligeabilité permet de dire que $\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right) - \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

— Les séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)-\frac{1}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$ sont à termes positifs au moins à partir d'un certain rang par équivalence.

— La série harmonique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$ diverge, donc, d'après le critère de comparaison par équivalence, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)-\frac{1}{n}$ également.

Correction de l'exercice I.14 : [Énoncé]

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{n+1}$.

1. On raisonne par récurrence pour montrer que, $\forall n\in\mathbb{N}, 1\leqslant u_n\leqslant 2$.
On pose, pour $n\in\mathbb{N}, \mathcal{P}_n$: «$1\leqslant u_n\leqslant 2$».

— $u_0 = 1$ donc $1\leqslant u_0\leqslant 2$ soit $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}_n$ vraie i.e. $1\leqslant u_n\leqslant 2$ et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie i.e. $1\leqslant u_{n+1}\leqslant 2$.

On a $1\leqslant u_n\leqslant 2$ soit $\dfrac{1}{n+1}\leqslant\dfrac{u_n}{n+1}\leqslant\dfrac{2}{n+1}$ puis $1+\dfrac{1}{n+1}\leqslant 1+\dfrac{u_n}{n+1}\leqslant 1+\dfrac{2}{n+1}$
Il vient alors que $1\leqslant 1+\dfrac{1}{n+1}\leqslant u_{n+1}\leqslant 1+\dfrac{2}{n+1}\leqslant 2$ soit $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
(Remarquons que les dernières inégalités ne sont vraies que si $n\in\mathbb{N}^*$; si $n=0$ alors $\mathcal{P}_n$ vraie implique $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie)

— En conclusion, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $1\leqslant u_n\leqslant 2$.

2. Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 à l'aide d'encadrements.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + \dfrac{u_{n-1}}{n}$ d'après la définition de la suite u. On en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - 1 = \dfrac{u_{n-1}}{n}$.

Comme $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant u_{n-1} \leqslant 2$, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{u_{n-1}}{n} \leqslant \dfrac{2}{n}$, soit $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n} \leqslant u_n - 1 \leqslant \dfrac{2}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$, par application du théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - 1 = 0$.
Ceci équivaut à $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - 1) + 1 = 1$.

3. — D'après la définition, $u_n - 1 = \dfrac{u_{n-1}}{n}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et que $1 \neq 0$, on peut affirmer que $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.
De plus, $n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ donc par compatibilité de l'équivalence avec le quotient, on aboutit à $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

— On conclut par le lien entre équivalence et négligeabilité,

$$u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \iff (u_n - 1) = \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'où l'existence d'un réel $a = 1$ tel que $u_n - 1 = \dfrac{a}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Correction de l'exercice I.15 : [Énoncé]

1. On va utiliser la définition de la convergence d'une suite vers 0 *i.e.*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \geqslant n_0,\ \left|\frac{x^n}{n!} - 0\right| = \left|\frac{x^n}{n!}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Soient donc $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ quelconque.
Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $|x| \leqslant \mathrm{N}$. Par exemple, prenez $\mathrm{N} = \lfloor x \rfloor + 1$.
Pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, on aura alors $\left|\dfrac{x}{n}\right| \leqslant \dfrac{|x|}{\mathrm{N}}$.
D'où,

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^n}{n!}\right| &= \left(\frac{|x|}{1} \times \frac{|x|}{2} \times \ldots \times \frac{|x|}{\mathrm{N}-1} \times \frac{|x|}{\mathrm{N}}\right) \times \left(\frac{|x|}{\mathrm{N}+1} \times \frac{|x|}{\mathrm{N}+2} \times \ldots \times \frac{|x|}{n}\right) \\ &\leqslant \frac{|x|^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!} \times \left(\frac{|x|}{\mathrm{N}}\right)^{n-\mathrm{N}}.\end{aligned}$$

— À x fixé, $\dfrac{|x|^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!}$ est un réel indépendant de $n \in \mathbb{N}$.

— De plus, $0 \leqslant \dfrac{|x|}{\mathrm{N}} < 1$ donc, par limite d'une suite géométrique, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{|x|}{\mathrm{N}}\right)^{n-\mathrm{N}} = 0$.

— Ainsi, pour x fixé, on peut choisir un entier n_0 tel que $n_0 \leqslant \mathrm{N} \implies \left(\dfrac{|x|}{\mathrm{N}}\right)^{n-\mathrm{N}} \dfrac{|x|^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!} \leqslant \varepsilon$ et donc $\left|\dfrac{x^n}{n!}\right| \leqslant \varepsilon$ par transitivité de $\leqslant$.

— On a bien montré la convergence de $\left(\dfrac{x^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0.

Remarque
Ce résultat est cohérent avec la condition nécessaire de convergence car la série exponentielle converge.

2. On revient à la définition :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ n^\alpha x^n = e^{\alpha \ln(n)} e^{n \ln(x)} = e^{\alpha \ln(n) + n \ln(x)} = e^{n\left(\alpha \frac{\ln(n)}{n} + \ln(x)\right)}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha\dfrac{\ln(n)}{n} + \ln(x) = \ln(x)$ et comme $x \in]0\,;1[$, $\ln(x) < 0$, ce qui se traduit par :

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\alpha\frac{\ln(n)}{n} + \ln(x)\right) = -\infty.$$

On conclut par composition par exp :

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha x^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\left(\alpha\frac{\ln(n)}{n}+\ln(x)\right)} = 0.$$

3. **Première méthode :** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0\,;n]\!]$ et $x \in]0\,;1[$.

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)\times(n-k)\times\ldots\times 2\times 1}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)\times(n-k)!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!},\end{aligned}$$

par produit car $\forall\, i \in [\![0,\, k-1]\!], n-i \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

D'après (2.), la suite $\left(n^k x^n\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 donc de même pour la suite $\left(\binom{n}{k}x^n\right)_{n\geqslant 1}$ par équivalence.

Deuxième méthode : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0\,;n]\!]$ et $x \in]0\,;1[$.

En revenant à la définition de $\binom{n}{k}x^n$, on a aussi :

$$0 \leqslant \binom{n}{k}x^n \leqslant \frac{n^k}{k!}x^n.$$

Il ne reste qu'à appliquer le théorème d'encadrement et le résultat du (2.) pour trouver la limite souhaitée.

4. a. Des études de fonction permettent de démontrer les deux inégalités, en posant par exemple,

$$f : x \longmapsto x - \ln(1+x) \qquad \text{et} \qquad g : x \longmapsto \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right).$$

Il suffit de montrer alors que f et g sont deux fonctions positives.

b. Pour la limite de la suite $\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)\right)_{n\geqslant 1}$, on passe par la fonction ln afin de transformer le produit en somme :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right).$$

D'après les inégalités de (a.),

$$\begin{aligned}\forall\, k \in \mathbb{N},\ \frac{k}{n^2} - \frac{\left(\frac{k}{n^2}\right)^2}{2} \leqslant \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) &\leqslant \frac{k}{n^2}\\ \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leqslant \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) &\leqslant \frac{k}{n^2}.\end{aligned}$$

On a ainsi, par somme :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)-\frac{1}{2n^4}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right) \leqslant \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right) \leqslant \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)$$

$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-\frac{1}{2n^4}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \leqslant \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right) \leqslant \frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$\frac{n+1}{2n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leqslant \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right) \leqslant \frac{n+1}{2n}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{2n}-\dfrac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$ par limite d'une suite rationnelle (ou par équivalence et compatibilité avec un quotient).

On en déduit par le théorème d'encadrement que :

$$\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)=\frac{1}{2}.$$

En passant à l'exponentielle et par continuité de celle-ci en $\dfrac{1}{2}$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\exp\left(\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)\right)=\exp\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}.$$

Correction de l'exercice I.16 : [Énoncé]

1. On considère la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall\, n\in\mathbb{N}, \mathrm{S}_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

   — Montrons que la suite $(\mathrm{S}_{2n})_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

$$\begin{aligned}\forall\, n\in\mathbb{N},\ \mathrm{S}_{2(n+1)}-\mathrm{S}_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+2}(-1)^k u_k-\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k u_k\\ &= \left(\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k u_k+\sum_{k=2n+1}^{2n+2}(-1)^k u_k\right)-\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k u_k\\ &= \sum_{k=2n+1}^{2n+2}(-1)^k u_k=(-1)^{2n+1}u_{2n+1}+(-1)^{2n+2}u_{2n+2}\\ &= -u_{2n+1}+u_{2n+2}.\end{aligned}$$

   En effet, $2n+1$ est impair et $2n+2$ est pair, donc $(-1)^{2n+1}=-1$ et $(-1)^{2n+2}=1$.
   On a alors $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{S}_{2(n+1)}-\mathrm{S}_{2n}=u_{2n+2}-u_{2n+1}\leqslant 0$ par décroissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   On en déduit que la suite $(\mathrm{S}_{2n})_{n\geqslant 0}$ est bien décroissante.

— Montrons, de même, que la suite $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ est croissante.

$$\begin{aligned}\forall\, n\in\mathbb{N},\ S_{2(n+1)+1}-S_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+3}(-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k u_k\\ &= \left(\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k u_k + \sum_{k=2n+2}^{2n+3}(-1)^k u_k\right) - \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k u_k\\ &= \sum_{k=2n+2}^{2n+3}(-1)^k u_k = (-1)^{2n+2}u_{2n+2} + (-1)^{2n+3}u_{2n+3}\\ &= u_{2n+2} - u_{2n+3}.\end{aligned}$$

En effet, $2n+3$ est impair et $2n+2$ est pair, donc $(-1)^{2n+3} = -1$ et $(-1)^{2n+2} = 1$.
On a alors $\forall\, n\in\mathbb{N},\ S_{2(n+1)+1}-S_{2n+1} = u_{2n+2}-u_{2n+3} \geqslant 0$ par décroissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On en déduit que la suite $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ est bien croissante.

— De plus,

$$\begin{aligned}\forall\, n\in\mathbb{N},\ S_{2n+1}-S_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k u_k\\ &= \left(\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k u_k + (-1)^{2n+1}u_{2n+1}\right) - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k u_k\\ &= u_{2n+1}.\end{aligned}$$

Comme par hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$, on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1}-S_{2n} = 0$.

Les trois points ci-dessus démontrent que les suites extraites d'indices pairs et impairs $(S_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite et on a (d'après une propriété de ECG1) :

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

En conclusion, la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.

2. En notant $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k$ la somme de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n u_n$ et tenant compte des variations des suites $(S_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$, on a :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ S_{2n+1}\leqslant S\leqslant S_{2n+2}\leqslant S_{2n}.$$

— Cas pair : Ainsi, $\forall\, n\in\mathbb{N},\ R_{2n} = \sum\limits_{k=2n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k = S - S_{2n}$.

Il vient alors que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ |R_{2n}| = |S-S_{2n}| = S_{2n}-S\leqslant S_{2n}-S_{2n+1}$$

car $S_{2n+1}\leqslant S\leqslant S_{2n}$.
Or, $S_{2n}-S_{2n+1} = -(-1)^{2n+1}u_{2n+1} = u_{2n+1}$.
On a alors : $\forall\, n\in\mathbb{N}, |R_{2n}|\leqslant u_{2n+1}$.

— Cas impair : De la même façon, $\forall\, n\in\mathbb{N},\ R_{2n+1} = \sum\limits_{k=2n+2}^{+\infty}(-1)^k u_k = S - S_{2n+1}$.

Il vient alors que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ |R_{2n+1}| = |S-S_{2n+1}| = S-S_{2n+1}\leqslant S_{2n+2}-S_{2n+1}$$

car $S_{2n+1}\leqslant S\leqslant S_{2n+2}$.
Or, $S_{2n+2}-S_{2n+1} = (-1)^{2n+2}u_{2n+2} = u_{2n+2}$.
On a alors : $\forall\, n\in\mathbb{N}, |R_{2n+1}|\leqslant u_{2n+2}$.

En conclusion, dans tous les cas, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |\mathrm{R}_n| \leqslant u_{n+1}$.

3. La suite de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est de la forme $(-1)^n u_n$ avec la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, à termes positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Les hypothèses sont donc vérifiées pour appliquer les résultats précédents :
La série alternée de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |\mathrm{R}_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Correction de l'exercice I.17 : [Énoncé]

Convergence de la série :

Soit $u_n = \dfrac{1}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}$ pour tout $n \geqslant 0$.

— **Équivalent :** Lorsque $n \to +\infty$, on a $\mathrm{e}^{-n} \to 0$, d'où :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{e}^n} = \mathrm{e}^{-n} = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$$

— **Nature :** La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ est une série géométrique à termes positifs de raison $q = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
Comme $0 < \dfrac{1}{\mathrm{e}} < 1$, cette série géométrique converge.

— **Conclusion :** Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}$ converge.

Démonstration de l'encadrement :

Borne inférieure : $\dfrac{1}{2} \leqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

Tous les termes u_n étant strictement positifs, on minore la somme infinie par son tout premier terme $(n = 0)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \geqslant u_0 = \frac{1}{\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{-0}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Borne supérieure : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$

Pour tout $n \geqslant 0$, comme $\mathrm{e}^{-n} > 0$, on a $\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n} > \mathrm{e}^n$. En passant à l'inverse, on obtient :

$$u_n = \frac{1}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}} < \frac{1}{\mathrm{e}^n} = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$$

En sommant cette inégalité de $n = 0$ à $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}} < \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$$

La somme de la série géométrique vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$

On en déduit donc l'encadrement souhaité :

$$\frac{1}{2} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$

DM 1 D'après EM Lyon 2025

Exercice 1 :

Partie A

Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On s'intéresse à la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{1/u_n}.$$

1. a. Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   b. Donner le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   c. Démontrer, en raisonnant par l'absurde, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ comme limite.

2. Recopier et compléter le programme Python ci-dessous de sorte qu'il affiche le premier entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant 10^6$.

Éditeur

```
import numpy as np
u = 1
n = 0
while ... :
    u = ...
    n = ...
print(...)
```

Partie B

Étude de la fonction f On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = x\mathrm{e}^{1/x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

3. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en 0 .

4. Dresser le tableau de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

5. Soit $x > 0$.

   a. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^{-k}}{k!}$ et calculer sa somme.

b. En déduire que :

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{2-k}}{k!}.$$

6. Soit $x \geqslant 1$.

a. Établir séparément les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{2} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{2-k}}{k!} \leqslant \mathrm{e}.$$

b. En déduire que :

$$(\star) \qquad \frac{1}{2x} \leqslant f(x) - (x+1) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{x}.$$

7. Montrer que $f(x) = x + 1 + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(1)$ au voisinage de $+\infty$.

8. Représenter sur un même dessin la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x + 1$.

Partie C

Comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

9. a. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathrm{N}$, $\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \dfrac{1}{u_k}$.

b. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k}$.

10. a. À l'aide de l'encadrement $(\star)$ montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$1 + \frac{1}{2u_k} \leqslant u_{k+1} - u_k \leqslant 1 + \frac{\mathrm{e}}{u_k}.$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, établir :

$$n + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k} \leqslant u_n - 1 \leqslant n + \mathrm{e}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k},$$

puis

$$1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) \leqslant u_n - n \leqslant 1 + \mathrm{e}\ln(u_n).$$

11. a. Justifier que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$.

b. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

12. Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 – (Partie A : Réduction simultanée et spectre) :

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois à coefficients réels.

On pose :

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et on considère $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par les matrices I, J et K.

1. Montrer que $(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K})$ est une base de $\mathcal{E}$, en déduire la dimension de $\mathcal{E}$.
2. **(khûbe)** Justifier sans calcul que les matrices J et K sont diagonalisables.
3. a. Exprimer la matrice J^3 comme un multiple de J.
   b. **(khûbe)** En déduire que les valeurs propres de J appartiennent à l'ensemble $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$.

On pose $\mathrm{U}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. a. **(khûbe)** Vérifier que U_1 et U_2 sont des vecteurs propres de J.
   a. Vérifier que $\mathrm{JU}_1 = \sqrt{2}\mathrm{U}_1$ et $\mathrm{JU}_2 = 0_{3,1}$.
   b. **(khûbe)** Déterminer un vecteur propre U_3 de J associé à la valeur propre $-\sqrt{2}$.
   b. Montrer que $\mathrm{JU}_3 = -\sqrt{2}\mathrm{U}_3$ où l'on a posé $\mathrm{U}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
5. a. Justifier que $(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   b. Donner une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
   $$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{JP} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$
6. a. Montrer que $(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3)$ est aussi une base (de vecteurs propres) de K.
   b. Déterminer la matrice $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{KP}$.
7. Soit M une matrice de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ dans la base $(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K})$.
   a. Exprimer la matrice $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ sous la forme d'un tableau de nombres dépendant de a, b et c.
   b. **(khûbe)** En déduire les valeurs propres de M.
8. On considère l'application linéaire $s : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^3$ définie par :
   $$s(\mathrm{M}) = s(a\mathrm{I} + b\mathrm{J} + c\mathrm{K}) = (a + b\sqrt{2} + c, a - c, a - b\sqrt{2} + c)$$
   pour toute matrice $\mathrm{M} = a\mathrm{I} + b\mathrm{J} + c\mathrm{K}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
   a. **(khûbe)** Donner la matrice S de s relativement à la base $(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K})$ de $\mathcal{E}$ et à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   b. **(khûbe)** Montrer que l'application linéaire s est bijective.

Khôlles 1

Compléments sur les suites et les séries réelles

1. Questions de Cours (Au choix de l'interrogateur)

Relations de comparaison (Négligeabilité et Équivalents)

1. **Définitions & Notations**
   - Donner la définition avec la limite de $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$. Comment cette propriété se caractérise-t-elle à l'aide d'une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   - Donner la définition quantifiée de $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Quelle est la seule suite équivalente à la suite nulle ?
2. **Propriétés algébriques**
   - Rappeler la propriété de compatibilité des équivalents avec le produit, le quotient et les puissances fixes ($\alpha \in \mathbb{R}$).
   - Est-il vrai que $u_n \sim v_n \implies e^{u_n} \sim e^{v_n}$? Justifier ou donner un contre-exemple (ex. $u_n = n+1$ et $v_n = n$).
   - Que peut-on dire du signe de deux suites équivalentes à partir d'un certain rang ? En donner la démonstration.
3. **Équivalents usuels & Croissances comparées**
   - Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Rappeler les équivalents usuels :

Opération / Fonction	**Équivalent quand** $u_n \to 0$
Exponentielle	$e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
Logarithme	$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
Puissance ($\alpha \neq 0$)	$(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$

   - Ranger par ordre de négligeabilité croissante en $+\infty$ (chaîne de croissances comparées) :

$$n!, \quad n^\beta\ (\beta>0), \quad (\ln n)^\alpha\ (\alpha>0), \quad a^n\ (a>1), \quad n^n$$

Séries numériques

1. **Généralités & Définitions**
   - Soit $\sum u_n$ une série numérique. Définir la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que le reste d'ordre n, noté R_n (en précisant sa condition d'existence).
   - Quelle est la condition nécessaire de convergence d'une série ? La réciproque est-elle vraie ? Justifier à l'aide d'un contre-exemple.
2. **Séries usuelles**

— **À savoir :**

— **Géométrique :** $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

— **Exponentielle :** $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.

— **Riemann :** $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

— Énoncer la condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série géométrique $\sum q^n$, ainsi que la formule de sa somme et de son reste R_p en cas de convergence.

— Donner la condition de convergence et la somme des séries géométriques dérivées d'ordre 1 $\sum nq^{n-1}$ et d'ordre 2 $\sum n(n-1)q^{n-2}$.

— Énoncer le théorème sur la convergence et la somme de la série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$.

— Énoncer le théorème de convergence des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

3. **Séries à termes positifs & Critères de comparaison**

— Pourquoi la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est-elle monotone ? En déduire la condition nécessaire et suffisante de convergence pour une telle série.

— Énoncer le théorème de comparaison par inégalité pour deux séries à termes positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ($0 \leqslant u_n \leqslant v_n$).

— Énoncer le critère de comparaison par négligeabilité ($u_n = o(v_n)$) et le critère par équivalence ($u_n \sim v_n$) pour des séries à termes positifs.

4. **Convergence absolue**

— Définir la convergence absolue d'une série $\sum u_n$.

— Quel est le lien entre convergence absolue et convergence ? Quelle inégalité relie $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right|$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$?

— **Méthode :** Pour étudier une série dont le terme général n'est pas de signe constant, on étudie d'abord sa convergence absolue afin d'utiliser les théorèmes de comparaison/équivalence réservés aux séries à termes positifs.

2. Exercices Types & Savoir-faire attendus

1. Convergence absolue & Équivalents directs :

a. **Signe non constant :** Étudier la convergence absolue puis la convergence de la série $\sum u_n$ avec :

$$u_n = \frac{(-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n}$$

b. **Utilisation directe des équivalents** ($u_n \to 0$) **:** Déterminer la nature de la série de terme général :

$$v_n = 1 - \exp\left(\frac{1}{n}\right)$$

2. Séries usuelles & Changement de signe

a. **Convergence absolue et exponentielle :** Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n(n+1)}{n!}$ est absolument convergente, puis calculer sa somme.

b. **Combinaison logarithme / puissance :** Déterminer la nature de la série $\sum w_n$ où :

$$w_n = \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$$

3. Méthode mixte : Équivalent du module / Télescopage

a. **Décomposition & Convergence absolue :** Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

i. Justifier que la série $\sum u_n$ converge absolument.

ii. En utilisant la décomposition $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

b. **(khûbe) Reste d'une série de Riemann :** Justifier la convergence de $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$, puis par comparaison intégrale, montrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Corrigés

II

Rappels d'ECG-1
Espaces vectoriels

La notion d'*espace vectoriel* est une structure fondamentale des mathématiques modernes comme on a commencé à l'entrevoir dans les chapitres précédents.

Il s'agit de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles pourtant très différents. Par exemple, on peut additionner deux vecteurs du plan, et aussi multiplier un vecteur par un réel (pour l'agrandir ou le rétrécir). Mais on peut aussi additionner deux fonctions, ou multiplier une fonction par un réel. Même chose avec les polynômes, les matrices, …

$\overrightarrow{\mathcal{P}}$	$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R}[X]$	$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
$3\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$	$f-2g$	$3P+2Q$	$3A+2B$	$3(u_n)_{n\in\mathbb{N}}+2(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\vec{0}$	$x\longmapsto 0_{\mathbb{R}}$	$0_{\mathbb{R}[X]}$	$(0)_{n,p}$	$(0)_{n\in\mathbb{N}}$

FIGURE II.1 : Exemples d'espaces vectoriels

Plan du chapitre

I ESPACES VECTORIELS **179**
I.1 ESPACES VECTORIELS DE RÉFÉRENCE ET FONDAMENTAUX 182
I.2 SOUS-ESPACES VECTORIELS 184
II DIMENSION FINIE **189**
II.1 FAMILLES LIBRES ET GÉNÉRATRICES 189
II.2 DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL 194
FICHE 9 : RAPPELS D'ECG-1 - SYSTÈME LINÉAIRES **201**
FICHE 10 : SYSTÈME LINÉAIRE – DE RANG 3. ..... **208**
FICHE 11 : SYSTÈME LINÉAIRE – DE RANG 2. ..... **209**
FICHE 12 : SYSTÈME LINÉAIRE – DE RANG 1. ..... **210**
PROGRAMME : ESPACES VECTORIELS **211**

I. Espaces vectoriels

Définition 1 – Structure d'espace vectoriel :

Soit E un ensemble non vide muni de deux lois :

D1 • Une loi de *composition interne* notée $+_{\mathrm{E}}$ (l'addition) :

$$\begin{array}{rccc} +_{\mathrm{E}} : & \mathrm{E}\times\mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ & (x\,;y) & \longmapsto & x+_{\mathrm{E}}y \end{array}$$

D2 • Une loi de *composition externe*, notée $\cdot_{\mathrm{E}}$ (la multiplication par un scalaire) :

$$\begin{array}{rccc} \cdot_{\mathrm{E}} : & \mathbb{R}\times\mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ & (\lambda\,;x) & \longmapsto & \lambda.{}_{\mathrm{E}}x \end{array}$$

On dit que $(\mathrm{E},+_{\mathrm{E}},\cdot_{\mathrm{E}})$ est un *espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$-*espace vectoriel* abrégé en $\mathbb{R}$-ev lorsque :

1. $(\mathrm{E},+_{\mathrm{E}})$ est un groupe abélien, *i.e.*
   a. $+_{\mathrm{E}}$ est *associative* : $\forall\,(x\,;y\,;z)\in\mathrm{E}^3$, $(x+_{\mathrm{E}}y)+_{\mathrm{E}}z=x+_{\mathrm{E}}(y+_{\mathrm{E}}z)=x+_{\mathrm{E}}y+_{\mathrm{E}}z$.
   b. $+_{\mathrm{E}}$ est *commutative* : $\forall\,(x\,;y)\in\mathrm{E}^2$, $x+_{\mathrm{E}}y=y+_{\mathrm{E}}x$.
   c. $+_{\mathrm{E}}$ admet un *élément neutre* noté 0_{E} et appelé *vecteur nul* :
   $$\forall\,x\in\mathrm{E},\quad x+_{\mathrm{E}}0_{\mathrm{E}}=0_{\mathrm{E}}+_{\mathrm{E}}x=x.$$
   d. Tout élément de E admet un *symétrique* pour $+_{\mathrm{E}}$ appelé *opposé de* x et noté $-x$:
   $$\forall\,x\in\mathrm{E},\quad x+_{\mathrm{E}}(-x)=0_{\mathrm{E}}.$$
2. La loi de composition externe vérifie les axiomes suivants :
   a. $\forall\,x\in\mathrm{E},\forall\,(\lambda\,;\mu)\in\mathbb{R}^2,\quad \lambda.{}_{\mathrm{E}}(\mu.{}_{\mathrm{E}}x)=(\lambda\times_{\mathbb{R}}\mu).{}_{\mathrm{E}}x$: *compatibilité avec* $\times_{\mathbb{R}}$ *dans* $\mathbb{R}$.
   b. $\forall\,x\in\mathrm{E},\forall\,(\lambda\,;\mu)\in\mathbb{R}^2,\quad (\lambda+_{\mathbb{R}}\mu).{}_{\mathrm{E}}x=\lambda.{}_{\mathrm{E}}x+_{\mathrm{E}}\mu.{}_{\mathrm{E}}x$: *compatibilité* $+_{\mathbb{R}}$ *dans* $\mathbb{R}$.
   c. $\forall\,(x\,;y)\in\mathrm{E}^2,\forall\,\lambda\in\mathbb{R},\quad \lambda.{}_{\mathrm{E}}(x+_{\mathrm{E}}y)=\lambda.{}_{\mathrm{E}}x+_{\mathrm{E}}\lambda.{}_{\mathrm{E}}y$: *compatibilité avec* $+_{\mathrm{E}}$ *dans* E.
   d. $\forall\,x\in\mathrm{E},\quad 1_{\mathbb{R}}.{}_{\mathrm{E}}x=x$: $1_{\mathbb{R}}$ est l'élément neutre pour $\cdot_{\mathrm{E}}$.

On appelle :

— *vecteurs* les éléments de E.

— *scalaires* les éléments de $\mathbb{R}$.

On dit que $\mathbb{R}$ est le *corps de base* de l'espace vectoriel E.

Ces conditions peuvent paraitre complexes, mais on ne les vérifie jamais en pratique et on peut, en fait, les résumer simplement par le fait qu'il y a deux opérations sur notre ensemble E : une addition, et un produit extérieur, qui vérifient des conditions assez naturelles.

Remarques :

— S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera les lois $+$ et $\cdot$ au lieu de $+_{\mathrm{E}}$ et $\cdot_{\mathrm{E}}$.

— On notera que l'existence du vecteur nul implique que tout espace vectoriel E est non vide.

— Pour éviter des parenthèses, on définit une priorité de la loi externe sur la loi interne : $\lambda.x+y$ signifie $(\lambda.x)+y$.

— L'élément neutre de $(\mathrm{E}\,;+)$ est unique.
En effet, supposant que l'on en ait deux e et e' alors :

$$e \underset{\text{def de } e'}{=} e+e' \underset{\text{def de } e}{=} e'.$$

C'est un fait général.

— De même, l'opposé d'un vecteur $x \in \mathrm{E}$ est unique. En effet, supposant qu'il en existe deux x' et $x"$ alors on aurait :

$$x' \underset{\text{def de } 0_{\mathrm{E}}}{=} x'+0_{\mathrm{E}} \underset{\text{def de } x"}{=} x'+(x+x") \underset{\text{associativité de } +}{=} (x'+x)+x" \underset{\text{def de } x'}{=} 0_{\mathrm{E}}+x" \underset{\text{def de } 0_{\mathrm{E}}}{=} x".$$

C'est également un fait général.

— Si elle est non ambigüe, on allège en général l'écriture en notant λu plutôt que $\lambda \cdot \vec{u}$ pour λ un scalaire et $\vec{u}$ un vecteur, même si la notation avec des flèches pour les vecteurs peut être utilisée dans un premier temps pour ne pas mélanger les objets. Les lettres grecques $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \ldots$ s'utilisent plutôt pour les scalaires que pour les vecteurs.

ATTENTION

— Ne pas confondre le zéro des scalaires $0_{\mathbb{R}}$ avec le vecteur nul 0_{E} : s'il y a une ambiguïté, préciser la notation en indice ou mettre une flèche sur le vecteur.

— La loi $\cdot$ est une loi de multiplication externe : ce n'est pas le produit de deux vecteurs.

Proposition 1 – Règles de calcul :

1. $\forall\,(x;x';y) \in \mathrm{E}^3,\quad x+y=x'+y \implies x=x'.$
2. $\forall\ (\lambda\,;x) \in \mathbb{R}\times\mathrm{E}, (-\lambda).x=\lambda.(-x)=-(\lambda.x).$
   En particulier, $(-1_{\mathbb{R}}).x=-x.$
3. $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}, \forall\ (x\,;y)\in\mathrm{E}^2,\quad \lambda.(x-y)=\lambda.x-\lambda.y.$
4. $\forall\ (\lambda\,;\mu)\in\mathbb{R}^2, \forall\,x\in\mathrm{E},\quad (\lambda-\mu).x=\lambda.x-\mu.x.$
5. $\forall\,x\in\mathrm{E},\quad 0_{\mathbb{R}}.x=0_{\mathrm{E}}\quad$ et $\quad\forall\,\lambda\in\mathbb{R},\quad \lambda.0_{\mathrm{E}}=0_{\mathrm{E}}.$

Réciproquement, $\forall\ (\lambda\,;x)\in\mathbb{R}\times \mathrm{E}$,

$$\lambda.x=0_{\mathrm{E}}\implies \lambda=0_{\mathbb{R}}\quad \text{ou}\quad x=0_{\mathrm{E}}.$$

En particulier,

6. Si $\lambda\neq 0$, alors $\forall\ (x\,;y)\in \mathrm{E}^2,\ \ \lambda.x=\lambda.y\implies x=y.$
7. Si $x\neq 0_{\mathrm{E}}$, alors $\forall\ (\lambda\,;\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \ \lambda.x=\mu.x\implies \lambda=\mu.$

Preuve :

1. Simple existence et définition du symétrique de y dans E.
2. Soit $(\lambda\,;x)\in\mathbb{R}\times \mathrm{E}$.
   On a :
   $$(-\lambda).x+\lambda.x=(-\lambda+\lambda).x=0_{\mathbb{R}}.x=0_{\mathrm{E}}\implies (-\lambda).x=-(\lambda.x),$$
   et
   $$\lambda.(-x)+\lambda.x=\lambda.(-x+x)=\lambda.0_{\mathrm{E}}=0_{\mathrm{E}}.\implies \lambda.(-x)=-(\lambda.x).$$
   Enfin, pour $\lambda=1_{\mathbb{R}}$, on a : $(-1_{\mathbb{R}}).x=-(1_{\mathbb{R}}.x)=-x$.
3. Conséquence de (**P2**.(2)).
4. Conséquence de (**P2**.(2)).
5. Soit $x\in \mathrm{E}$. Alors $0_{\mathbb{R}}.x=(0_{\mathbb{R}}+_{\mathbb{R}}0_{\mathbb{R}}).x=0_{\mathbb{R}}.x+_{\mathrm{E}}0_{\mathbb{R}}.x\implies 0_{\mathbb{R}}.x=0_{\mathrm{E}}$.
   Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, on a aussi $\lambda.0_{\mathrm{E}}=\lambda.(0_{\mathrm{E}}+0_{\mathrm{E}})=\lambda.0_{\mathrm{E}}+\lambda.0_{\mathrm{E}}\implies \lambda.0_{\mathrm{E}}=0_{\mathrm{E}}$.
   Réciproquement, soit $(\lambda\,;x)\in\mathbb{R}\times\mathrm{E}$ tel que $\lambda.x=0_{\mathrm{E}}$.
   Supposons que $\lambda\neq 0_{\mathbb{R}}$ et montrons que $x=0_{\mathrm{E}}$.
   On a alors $x=1_{\mathbb{R}}.x=(\lambda^{-1}\lambda).x=\lambda^{-1}.(\lambda.x)=\lambda^{-1}.0_{\mathrm{E}}=0_{\mathrm{E}}$.
   Remarque : Pour vous remémorer le premier chapitre de logique, afin de démontrer la relation $\mathcal{P}\implies(\mathcal{Q}\cup\mathcal{R})$ *i.e.* $\rceil\mathcal{P}\cup(\mathcal{Q}\cup\mathcal{R})$, on a démontré ici $(\mathcal{P}\cap\rceil\mathcal{Q})\implies\mathcal{R}$ *i.e.* $\rceil(\mathrm{P}\cap\rceil\mathcal{Q})\cup\mathcal{R}$.
6. Conséquence de (**P2**.(4)) et (**P3**).
7. Conséquence de (**P2**.(5)) et (**P3**).

I.1 – Espaces vectoriels de référence et fondamentaux

Exemple 1 – $\mathbb{R}$:

L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de son addition et de sa multiplication est un $\mathbb{R}$-espaces vectoriel de vecteur nul $\overrightarrow{0_{\mathbb{R}}} = 0_{\mathbb{R}}$ et muni des lois :

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x\,;y) & \longmapsto & x+y = x+_{\mathbb{R}} y \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\lambda\,;x) & \longmapsto & \lambda\cdot x = \lambda\times_{\mathbb{R}} x. \end{array}$$

Proposition 2 :

$(\mathbb{R}\,;+\,;\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarque : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ne sont pas des $\mathbb{R}$-ev.

Exemple 2 – $\mathbb{R}^n$:

De manière générale, pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}^n$ les lois :

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & ((x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)\,;(y_1,\,y_2,\,\ldots,\,y_n)) & \longmapsto & (x_1+y_1,\,x_2+y_2,\,\ldots,\,x_n+y_n) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (\lambda\,;(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)) & \longmapsto & (\lambda x_1,\,\lambda x_2,\,\ldots,\,\lambda x_n) \end{array}.$$

Proposition 3 :

L'ensemble $(\mathbb{R}^n\,;+\,;\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, où le vecteur nul est $\overrightarrow{0_{\mathbb{R}^n}} = (0,\,0\,\ldots,\,0)$.

Exemple 3 – $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

On munit $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des lois :

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ & \left((a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\,;(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\right) & \longmapsto & (a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R}\times\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ & \left(\lambda\,;(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\right) & \longmapsto & \lambda\cdot(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}=(\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}. \end{array}$$

Ainsi doté,

Proposition 4 :

L'ensemble $\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),+,\cdot\right)$ des matrices à n lignes et p colonnes est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Le vecteur nul est la matrice nulle $\overrightarrow{0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}}=(0)_{n,p}$.

Attention
Toutefois, l'ensemble de toutes les matrices (sans spécification de taille) n'est pas un espace vectoriel (on ne peut pas additionner deux matrices de taille différente).

Exemple 4 – $\mathcal{F}(\mathrm{I};\mathbb{R})$:

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{F}(\mathrm{I};\mathbb{R})$, noté aussi $\mathbb{R}^{\mathrm{I}}$ des fonctions de I à valeurs dans $\mathbb{R}$ peut être munis des lois :

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{R}^{\mathrm{I}}\times\mathbb{R}^{\mathrm{I}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathrm{I}} \\ & (f\,;g) & \longmapsto & \text{f+g}: \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & & f(x)+_{\mathbb{R}}g(x) \end{array} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\mathrm{I}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathrm{I}} \\ & (\lambda\,;f) & \longmapsto & \lambda.\text{f}: \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & & \lambda\cdot_{\mathbb{R}}f(x) \end{array} \end{array}$$

Proposition 5 – S :

I est non vide alors l'ensemble $(\mathbb{R}\,;\mathcal{F}(\mathrm{I};\mathbb{R}))+\cdot$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Le vecteur nul $\overrightarrow{0_{\mathcal{F}(\mathrm{I};\mathbb{R})}}$ est la fonction nulle $0_{\mathcal{F}(\mathrm{I};\mathbb{R})}:\begin{array}{ccc}\mathrm{I}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ x&\longmapsto&0_{\mathbb{R}}\end{array}$.

Corollaire 6 :

L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel dont le vecteur nul est la suite constante égale à $0_{\mathbb{R}}$.

Exemple 5 – $\mathbb{R}[X]$:

L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de vecteur nul le polynôme nul et muni des lois :

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & \left(\sum_{k\geqslant 0} a_k X^k ; \sum_{k\geqslant 0} b_k X^k\right) & \longmapsto & \sum_{k\geqslant 0} (a_k + b_k) X^k \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & \left(\lambda ; \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k\right) & \longmapsto & \lambda \cdot \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k = \sum_{k\geqslant 0} (\lambda a_k) X^k. \end{array}$$

En particulier, on a également vu que l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel.

Attention
L'ensemble des polynômes de degré exactement n n'est pas un espace vectoriel.

I.2 – Sous-espaces vectoriels

Définition 2 – Combinaisons linéaires :

Soit $(E ; + ; \cdot)$ un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

— Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \ldots, x_p \in E$.
On dit que $x \in E$ est *combinaison linéaire* des vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de E s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que :

$$x = \lambda_1 . x_1 + \lambda_2 . x_2 + \ldots + \lambda_p . x_p = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot x_k.$$

— Soit X une partie de E.
On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire de vecteurs de X si x est combinaison linéaire d'une famille ***finie*** de vecteurs de X.

Attention
Il n'y a pas, a priori, unicité des coefficients sans hypothèses supplémentaires sur $(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{p} \mu_k x_k$$

$$\not\Longrightarrow$$

$$\forall\, k \in [\![1 ; p]\!],\ \lambda_k = \mu_k.$$

Définition 3 – Sous-espaces vectoriels :

Soit $(E ; +_E ; \cdot_E)$ un $\mathbb{R}$-ev et $F \subset E$.

On dit que F est un *sous-espace vectoriel de* E, abrégé souvent en *sev* lorsque :

— $F \neq \emptyset$

— $\forall\, (x ; y) \in F^2,\quad x +_E y \in F$ *(stabilité de F pour $+_E$)*

— $\forall\, x \in F, \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\quad \lambda ._E x \in F$ *(stabilité de F pour $\cdot_E$)*

Attention
Aucun $\mathbb{R}$-ev, $\mathbb{R}$-ev, $\mathbb{C}$-ev ou sev n'est vide !!!!

Exemple 6 – S :

E est un $\mathbb{R}$-ev alors $\{0_E\}$ et E sont des sev de E (appelés sous-espaces vectoriels triviaux de E).

Ce sont, respectivement, le plus petit et le plus grand sev au sens de l'inclusion.

Remarque : Tout sous-espace F de E contient le vecteur 0_E : en effet, $F \neq \emptyset$ contient au moins un élément x et son symétrique d'où

$$0_E = \underbrace{x +_E (-x)}_{\in E} \in F.$$

En conséquence, pour montrer qu'un sev F de E est non vide, on cherchera souvent à montrer que $0_E \in F$. A contrario, une partie ne contenant pas 0_E ne pourra être un sev de E.

Corollaire 7 – Stabilité d'un sev par combinaisons linéaires :

$$F \text{ est un sev de } E \iff \begin{cases} 0_E \in F \\ \forall\ (x\,;y) \in F^2,\ \forall\ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda.x + \mu.y \in F. \end{cases}$$

Preuve :

($\Rightarrow$) Assez simple à montrer.

($\Leftarrow$) Comme $0_E \in F$, on a $F \neq \emptyset$.
En prenant $\lambda = \mu = 1$, on obtient la stabilité par $+$.
En prenant $\mu = 0$, on obtient la stabilité par $\cdot$.

Remarque : Mieux, on vérifiera que montrer que F est stable par des combinaisons linéaires du type $\lambda.x + y$ est équivalent à montrer que F est stable par combinaisons linéaires.

Le corollaire (7) nous entraîne à considérer les lois :

$$+_F : \begin{array}{ccc} F \times F & \longrightarrow & F \\ (x\,;y) & \longmapsto & x +_E y \end{array} \quad \text{et} \quad \cdot_F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times F & \longrightarrow & F \\ (\lambda\,;x) & \longmapsto & \lambda.{}_E x \end{array}.$$

Ces lois s'appellent les *lois induites* sur F (par celles de de E) ou les restrictions des lois de E à F. C'est un cas général de considérer de telles lois afin de faire hériter le sous-espace de la structure de l'espace parent.

Théorème 8 – Structure induite :

Soit F un sev d'un $\mathbb{R}$-ev $(E\,;+_E\,;\cdot_E)$.

Alors, $(F\,;+_F\,;\cdot_F)$ muni des lois induites de E sur F est un $\mathbb{R}$-ev.

Considérant une sous-partie F (non vide nécessairement) d'un $\mathbb{R}$-ev E, une des grandes conséquences de ce théorème est qu'il ne nous sera plus nécessaire de montrer les 9 critères de la définition (1) mais seulement de démontrer que F est un sev de E.

Preuve :

— L'ensemble F est muni d'une addition et d'une loi externe.

— L'addition reste évidemment associative et commutative car ceci est vraie dans E contenant F.

— Comme $0_E \in F$, l'addition de F possède un élément neutre :

$$\forall\, x \in F,\ x +_F 0_E = x +_E 0_E = x.$$

— Soit $x \in F$. Alors $-x = (-1).{}_E x = (-1).{}_F x \in F$: tout élément de F admet un opposé qui est bien dans F.

— Les dernières propriétés, qui sont vraies lorsque x et y appartiennent à E, sont a fortiori vraies lorsque x et y appartiennent à F.

Exemples 7 – Dans les espaces de fonctions :

— L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

— Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
Les ensembles $\mathcal{C}^\infty(I;\mathbb{R}) \sqsubset \mathcal{C}^k(I;\mathbb{R}) \sqsubset \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R}) \sqsubset \mathcal{C}^0(I;\mathbb{R})$ sont tous des sev de l'ensemble $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.
Ils forment même une suite de sev pour l'inclusion.

— Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est un sev du $\mathbb{R}$ev vectoriel $\mathbb{R}[X]$.
On retrouve une suite de sev pour l'inclusion :

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_0[X] \sqsubset \mathbb{R}_1[X] \sqsubset \ldots \sqsubset \mathbb{R}_n[X] \sqsubset \mathbb{R}_{n+1}[X] \sqsubset \ldots \sqsubset \mathbb{R}[X].$$

Exemples 8 – Dans les espaces de matrices :

Les ensembles

— $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales,

— $\mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures,

— $\mathcal{T}_{n,I}(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires inférieures,

— $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques,

— $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques,

sont des sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemples 9 – Dans l'espace des suites :

Notons $\mathcal{S}$ le $\mathbb{R}$ev des suites réelles.

— L'ensemble $\mathcal{S}_b$ des suites bornées est un sev de $\mathcal{S}$.

— L'ensemble $\mathcal{S}_c$ des suites convergentes est un sev de $\mathcal{S}_b$.

Exemples 10 – Et bien d'autres :

— L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

— L'ensemble des solutions sur un intervalle I, d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{I};\mathbb{R})$.

Plus précisément,

— $\left\{y \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I};\mathbb{R}) \ / \ y' + a(x)y = 0\right\}$ est un sev de $\mathcal{C}^1(\mathrm{I};\mathbb{R})$.

— $\left\{y \in \mathcal{C}^2(\mathrm{I};\mathbb{R}) \ / \ y'' + ay' + by = 0\right\}$ est un sev de $\mathcal{C}^2(\mathrm{I};\mathbb{R})$.

— L'ensemble des suites récurrentes linéaires est un sev du $\mathbb{R}$ev des suites réelles ou complexes.

Tout ceci pour dire que pour montrer qu'un ensemble E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on montrera systématiquement qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'un des exemples de référence vus dans le paragraphe (I.1) .

Définition 4 – Sev engendré par une partie :

Soit X une partie de E.

On note Vect (X), le plus petit sous-espace vectoriel contenant X.

C'est l'intersection de tous les sev contenant X :

$$\mathrm{Vect}(\mathrm{X}) = \bigcap_{\substack{\mathrm{F\ sev}\\ \mathrm{X}\subset\mathrm{F}}} \mathrm{F}.$$

Preuve : Soit X une partie de E et considérons $\bigcap_{\substack{\mathrm{F\ sev}\\ \mathrm{X}\subset\mathrm{F}}} \mathrm{F}$, l'intersection de tous les sev contenant X (dont fait partie E).

Alors,

— $\bigcap_{\substack{\mathrm{F\ sev}\\ \mathrm{X}\subset\mathrm{F}}} \mathrm{F}$ est bien un sous-espace vectoriel de E d'après la proposition (??) .

— C'est bien le plus petit au sens de l'inclusion car pour tout sev G de E tel que $\mathrm{X} \subset \mathrm{G}$, on a :

$$\bigcap_{\substack{\mathrm{F\ sev}\\ \mathrm{X}\subset\mathrm{F}}} \mathrm{F} = \mathrm{G} \cap \bigcap_{\substack{\mathrm{F\ sev}\\ \mathrm{X}\subset\mathrm{F}}} \mathrm{F} \subset \mathrm{G}.$$

Toute d'abord deux propriétés simples mais importantes découlant de la définition par superlatif :

Proposition 9 – S :

it $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{R}$-ev.

1. F est un sev de E si, et seulement si $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{F})$.
2. Pour toutes parties X et Y de E, $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y} \implies \mathrm{Vect}\,(\mathrm{X}) \subset \mathrm{Vect}\,(\mathrm{Y})$.

Faisons enfin le lien avec l'intérêt majeur de la structure : les combinaisons linéaires.

Théorème 10 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+)\cdot$ un $\mathbb{R}$-ev X une partie non vide de E.

$\mathrm{Vect}\,(\mathrm{X})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies des vecteurs de X.

Quoi de plus naturel que de former toutes les combinaisons linéaires possibles des éléments de X pour obtenir le plus petit sous-ensemble stable par combinaisons linéaires d'éléments de X ?

Preuve : Nommons provisoirement $\mathcal{C}$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de X et montrons que $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{X}) = \mathcal{C}$ par double inclusion.

$\supset$: $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{X})$ est un sev contenant X. Par stabilité, il contient donc toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de X *i.e.* $\mathcal{C} \subset \mathrm{Vect}\,(\mathrm{X})$.

$\subset$: Montrons que $\mathcal{C}$ est un sev de E contenant X.

Remarquons tout d'abord que tout vecteur x de X est clairement une combinaison linéaire de lui-même donc élément de $\mathcal{C}$.

En clair, $\mathrm{X} \subset \mathcal{C}$ et en particulier $\mathcal{C} \neq \emptyset$.

Soient maintenant $(x\,;y) \in \mathcal{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors x et y sont des combinaisons linéaires de vecteurs de X mais aussi $\lambda.x + y$ donc $\lambda.x + y \in \mathcal{C}$.

Ainsi $\mathcal{C}$ est un sev de E contenant X. Comme $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{X})$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) de ceux-là, on obtient $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{X}) \subset \mathcal{C}$.

Exemple 11 – IMPORTANT :

Si $\mathrm{X} = \{e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n\}$ est finie, on note $\mathrm{Vect}\,(\{e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n\})$ ou plus simplement $\mathrm{Vect}\,(e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n)$.

On a alors légalité :

$$\mathrm{Vect}\,(e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n) = \Big\{\lambda_1.e_1 + \lambda_2.e_2 + \ldots + \lambda_n.e_n \;/\; (\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\Big\}.$$

En particulier et à retenir,

$$x \in \mathrm{Vect}\,(e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n) \iff \exists\,(\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\; x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.e_i.$$

II. Dimension finie

II.1 – Familles libres et génératrices

Définition 5 – Familles libres et liées :

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathrm{E}^n$.

D1 • On dit que la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est *liée* si

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \cdots, 0)\}, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_{\mathrm{E}}. \qquad (\mathbb{L}\text{iée})$$

D2 • On dit que la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est *libre* si elle n'est pas liée *i.e.* si

$$\forall\, (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_{\mathrm{E}} \implies \forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k = 0 \right). \qquad (\mathbb{L}\text{ibre})$$

On dit alors que la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est *linéairement indépendante*.

Remarque : Une famille contenant le vecteur nul est liée et on convient que toute famille à zéro éléments est libre.

Exemple 12 – Une famille libre de polynômes :

Dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \ldots, \mathrm{X}^n)$ est une famille libre.

En effet, un polynôme est nul si, et seulement si tous ses coefficients le sont ce qui se traduit par :

$$\forall\, (\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{X}^k = 0_{\mathbb{R}[\mathrm{X}]} \implies \forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad \lambda_k = 0.$$

Corollaire 11 :

Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille libre d'éléments de E.

Pour tous $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(\mu_1, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k \implies \forall\, k \in [\![1\,;n]\!], \ \lambda_k = \mu_k.$$

Preuve : Immédiatement,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k \iff \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \mu_k) x_k = 0 \implies \forall\, k \in [\![1\,;n]\!], \ \lambda_k = \mu_k.$$

Vous devez vous douter à ce stade que la liberté d'une famille donnera l'unicité d'une certaine écriture ou d'une certaine décomposition.

Corollaire 12 – Important :

Une famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est libre si, et seulement si tout vecteur de Vect $(\{x_1, \cdots, x_n\})$ se décompose **de manière unique** comme combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \cdots, x_n$.

Preuve :

$(\Rightarrow)$: C'est exactement le corollaire (11) .

$(\Leftarrow)$: Supposons que la décomposition est unique, et montrons que $(x_1, \cdots, x_n)$ est libre.

Considérons alors une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille *i.e.* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$.

Ce qui s'écrit aussi $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 x_i$.

Par unicité de la décomposition, $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_i = 0$.

La famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est libre.

Exemples 13 – La base !:

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille d'éléments d'un $\mathbb{R}$-ev E.

E1 • Si $n = 0$: la famille vide est libre (convention).

E2 • Si $n = 1$: la famille (x_1) est libre $\iff x_1 \neq 0_E$.

E3 • Si $n = 2$: la famille (x_1, x_2) est libre $\iff$ x_1 et x_2 sont non colinéaires.

E3 •

- Si x_1 et x_2 sont colinéaires (ou nuls), on peut écrire $x_1 = \lambda x_2$ *i.e.* $1x_1 - \lambda x_2 = 0$: la famille est liée.
- Réciproquement, si la famille (x_1, x_2) est liée, on peut écrire $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$. Si $\lambda_1 \neq 0$, on peut écrire $x_1 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2$ et les vecteurs sont colinéaires. Idem si $\lambda_2 \neq 0$ et on ne peut avoir $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ par hypothèse.

Attention

Une famille de trois vecteurs $(e_1\,;e_2\,;e_3)$ deux à deux non colinéaires n'est pas forcément libre.
Prendre par exemple $\{(1\,;-1\,;0)\,;(0\,;1\,;-1)\,,(-1\,;0\,;1)\}$.

Exemple 14 :

Soit $x_1 = (1\,;1\,;1)$, $x_2 = (1\,;2\,;-1)$ et $x_3 = (-1\,;1\,;1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que $(x_1\,;x_2\,;x_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Soit a, b et c des scalaires tels que

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0. \qquad \text{(II.1)}$$

Montrons que $a = b = c = 0$.

La relation (II.1) est équivalente au système homogène de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} a+b-c &= 0 \\ a+2b+c &= 0 \\ a-b+c &= 0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \begin{cases} a+ b- c=0 \\ b+2c=0 \\ -2b+2c=0 \end{cases} \tag{II.2}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3+2L_2}{\iff} \begin{cases} a+b- c=0 \\ b+2c=0 \\ 6c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0. \end{cases}$$

Donc $a=b=c=0$ et la famille $(x_1\,;x_2\,;x_3)$ est libre.

D'un point de vue matriciel, la matrice de ce système est $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, on obtient :

$$\mathrm{A} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

, matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont non nuls et qui est donc inversible.
Le système (II.2) n'admet donc comme unique solution que le solution nulle. La famille est donc libre.

Plus généralement,

Proposition 13 :

Une famille est liée si, et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Ceci s'applique, en particulier, à une famille dont deux vecteurs sont égaux et, par conséquent, les vecteurs d'une famille libre sont nécessairement deux à deux distincts.

Preuve : Considérons une famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de vecteurs de E.

$(\Leftarrow)$ **:** Supposons, par exemple, que $x_n = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k$.

Alors, $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k - x_n = 0_E$ avec $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, -1) \neq (0, \cdots, 0)$

La famille est donc liée.

$(\Rightarrow)$ **:** Si $(x_1, \cdots, x_n)$ est liée, il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0)$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E$.

L'un des λ_i au moins est non nul, disons $\lambda_i \neq 0$. Alors, on peut écrire $x_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} -\frac{\lambda_k}{\lambda_i} x_k$ et le résultat.

Corollaire 14 – Application :

Soient $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille libre d'éléments de E et $x \in \mathrm{E}$.

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n, x) \text{ est liée } \iff x \in \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,.$$

Exemple 15 – O :

déduit également de la proposition précédente qu'une famille de trois vecteurs non coplanaires est libre.

En effet, si $(e_1\,;e_2\,;e_3)$ était liée, alors, par exemple, e_1 appartiendrait à Vect $(e_2\,;e_3)$ et les trois vecteurs seraient coplanaires.

Grâce à la contraposée de l'équivalence précédente, on peut ainsi agrandir une famille libre en lui adjoignant des vecteurs de E qui sont linéairement indépendants des vecteurs de la famille.

De la même manière, la contraposée de la proposition (13) s'écrit aussi :

Corollaire 15 :

Une famille est libre si, et seulement si aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres.

Définition 6 – Familles génératrices :

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathrm{E}^n$.

On dit que la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est *génératrice* (de E) lorsque tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de $x_1, \cdots, x_n$ ou, de manière équivalente,

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ est génératrice de E} \iff \mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \mathrm{E}.$$
$$\iff \forall\, x \in \mathrm{E},\ \exists\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \ /\ x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Pour toute famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ d'éléments de E, on a TOUJOURS

$$\mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) \subset \mathrm{E}.$$

C'est l'inclusion réciproque qui est intéressante.

En particulier, remarquez déjà que toute sur-famille d'une famille génératrice de E est aussi génératrice.

Exemples 16 :

— $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
D'une manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \ldots, \mathrm{X}^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ puisque tout polynôme P de degré au plus n s'écrit sous la forme $\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{X}^i$ où $(p_0, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

— $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \mathrm{X}+1, \mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. Elle n'est pas libre.

Exemple 17 :

Montrons que la famille $\big((1\,;1\,;0)\,,(0\,;1\,;1)\,,(1\,;0\,;1)\,,(0\,;0\,;1)\big)$ est génératrice dans $\mathbb{R}^3$.

Soit $(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3$ un vecteur quelconque.
Alors on a, par exemple :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + (y-x)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + 0\,(1\,;0\,;1) + (z-y+x)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

La famille $\big((1\,;1\,;0)\,,(0\,;1\,;1)\,,(1\,;0\,;1)\,,(0\,;0\,;1)\big)$ est donc génératrice de $\mathbb{R}^3$.
Pour montrer qu'elle n'est pas libre, deux méthodes :

1. Soit trouver une autre décomposition comme :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{2}x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}x\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

2. Soit montrer directement que la famille est liée en écrivant :

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

combinaison linéaire nulle des quatre vecteurs dont les coefficients ne sont pas tous nuls.

Exemples 18 – Usuels :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. La famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ où

$$\forall\, i\in[\![1\,;n]\!]\,,\ e_i = (0,\,0,\,\dots,\,0,\underbrace{\ 1\ }_{i^{\text{ème}}\text{ composante}},\,0).$$

Preuve : Tout $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ s'écrit $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ *i.e.* tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2, …, e_n.
Ainsi $\mathbb{R}^n = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$ *i.e.* $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ engendre $\mathbb{R}^n$.

2. De la même manière, tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *i.e.* comme combinaison linéaire des polynômes 1, X, …, X^n.
Il en résulte que $\mathbb{R}_n[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n)$ *i.e.* $(1, X, \dots, X^n)$ engendre $\mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 19 – Famille génératrice d'un sous-espace :

Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^3$, on considère le sev $F = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y-2z=0\}$.

Déterminons une famille génératrice de F.

Soit $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$.
Il suffit de résoudre un système linéaire homogène :

$$\begin{aligned}(x\,;y\,;z) \in F &\iff \{x+y-2z=0\\ &\iff \begin{cases} x & = y & -2z \\ & y = y & \\ & z = & z \end{cases}\\ &\iff (x\,;y\,;z) \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est donc génératrice de F.

II.2 – Dimension d'un espace vectoriel

Définition 7 – Bases :

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(e_1, e_2, \cdots, e_n) \in E^n$.

On dit que la famille $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une *base* de E si, et seulement si elle est *libre* et *génératrice*.

On convient que $\emptyset$ est une base de $\{0\}$.

Exemple 20 – Fondamentaux :

E1 • Dans $\vec{\mathcal{E}}_2$, toute famille constituée de deux vecteurs non colinéaires est une base.

E2 • $\mathbb{R}_2[X]$ admet pour base $(1, X, X^2)$ mais aussi $(1+X+X^2, 1+X, 2)$: les bases ne sont donc pas uniques.
La base $(1, X, X^2)$ est appelée *base canonique* de $\mathbb{R}_2[X]$.

Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(1, X, \dots, X^n)$ et $(1, X-a, \dots, (X-a)^n)$, $a \in \mathbb{R}$ sont des bases de $\mathbb{R}_n[X]$.

E3 • $\mathbb{R}^3$ admet pour base $\mathcal{B}_1 = (u, v, w)$, avec $u = (1, 2, 3)$, $v = (0, 1, 2)$ et $w = (0, 0, 1)$, mais aussi $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. $\mathcal{B}_0$ est la *base canonique* de $\mathbb{R}^3$.

E4 • $\mathbb{R}^n$ admet pour *base canonique* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, avec $e_k = (\delta_{1,k}, \delta_{2,k} \cdots, \delta_{n,k})$.

$$\text{où } \delta_{i,k} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } i = k \end{cases} \qquad \text{appelé Symbole de Kronecker.}$$

E5 • $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ admet pour *base canonique* $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, \cdots, E_{n,p},)$ où :

$$E_{k,l} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow k \quad \text{(ligne } k\text{, colonne } l\text{)}$$

$$\forall\ (k\,;l) \in \left(\,[\![1\,;n]\!]\,\right)^2,\ E_{k,\ell} = (\delta_{i,k}\delta_{j,\ell})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}.$$

Les matrices $E_{k,\ell}$, où l'unique coefficient non nul valant 1 est situé sur la $k^{\text{ème}}$ ligne et la $l^{\text{ème}}$ colonne sont appelées *matrices élémentaires.*

Théorème 16 :

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n) \in E^n$.

La famille $\mathcal{B}$ est une base de E si, et seulement si tout vecteur de E se décompose de manière unique comme combinaison linéaire de e_1, e_2, …, e_n.

$$(e_1, e_2, \cdots, e_n) \text{ est une base de E} \iff \forall\, x \in E,\ \exists !(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Les scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ s'appellent *les composantes* ou *les coordonnées* de x dans la base $\mathcal{B}$.

Attention
Les coordonnées d'un vecteur dépendent donc de la base $\mathcal{B}$ choisie. Lorsqu'on voudra préciser celle-ci on notera, par exemple,
$u = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)_{\mathcal{B}}$.

Preuve : L'existence d'une décomposition équivaut à dire que $\mathcal{B}$ est génératrice de E.

L'unicité équivaut à la liberté de $\mathcal{B}$.

Exemple 21 :

E1 • Dans $\mathbb{R}^3$, tout vecteur $(x\,;y\,;z)$ s'écrit $xe_1 + ye_2 + ze_3$ sur la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
$(x\,;y\,;z)$ sont les coordonnées de (x, y, z) sur la base canonique !

E2 • Dans $\mathbb{R}_2[X]$, $(1, 5, 2)$ sont les coordonnées de $1 + 5X + 2X^2$ sur la base canonique $(1, X, X^2)$.

Définition 8 – Espaces vectoriels de dimension finie :

Soit E un $\mathbb{R}$-ev.

On dit que E *est de dimension finie* lorsque E admet une famille génératrice finie.

Dans le cas contraire, on dit que E est de *dimension infinie.*

Exemples 22 – Fondamentaux :

E1 • $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie engendré par la base canonique qui compte n vecteurs.

E2 • $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie engendré par $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$.

E3 • $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension finie engendré par les matrices élémentaires $E_{k,l}$.

E4 • $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie. Pas plus que $Pol(\mathbb{R})$.
En effet, une famille finie de polynômes $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ ne peut engendrer $\mathbb{R}[X]$, car si on note $d = \max(\deg P_1, \deg P_2, \cdots, \deg P_n,)$, tout polynôme de Vect $(P_1, P_2, \cdots, P_n,)$ est de degré $\leqslant d$.

E5 • D'une manière générale, les espaces de fonctions $\mathcal{C}^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, …, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ qui contiennent $Pol(\mathbb{R})$ ne sont pas de dimension finie.

Théorème 17 – Théorème de la base extraite :

De toute famille génératrice *finie* d'un espace vectoriel E non réduit à $\{0\}$, on peut extraire une base.

Preuve : Soit $\mathcal{G} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice finie de E.

Notons :

$$A = \{\text{card}(\mathcal{F}) \ / \ \mathcal{F} \subset \mathcal{G} \text{ et } \mathcal{F} \text{ est génératrice de E}\}.$$

La partie A de $\mathbb{N}$ est non vide (car contient card $(\mathcal{G})$). Elle admet donc un plus petit élément p.

Soit $\mathcal{F}_p$ une famille de cardinal p contenue dans $\mathcal{G}$ et génératrice de E. Quitte à renuméroter, on peut supposer que $\mathcal{F}_p = (e_1, \dots, e_p)$.

Montrons que $\mathcal{F}_p$ est une base de E.

Elle est génératrice par définition. Montrons qu'elle est libre.

Par l'absurde, supposons $(e_1, \dots, e_p)$ liée *i.e.* l'un des vecteurs des e_1, …, e_p, disons e_p (quitte à les réordonner) est combinaison linéaire des autres.

Ainsi $e_p \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1})$.

D'après la proposition (??), la famille $(e_1, \dots, e_{p-1})$ est génératrice de E donc $p-1 \in A$ ce qui contredit la définition de p.

Ainsi, $\mathcal{F}_p$ est libre et génératrice de E. C'en est donc une base.

Comme conséquence, on a :

Corollaire 18 – Existence de bases dans un espace vectoriel de dimension finie :

Tout $\mathbb{R}$-ev *de dimension finie* admet une base (finie).

Preuve : E est de dimension finie. Il existe donc une famille génératrice finie $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \cdots, u_p)$.

On lui applique le théorème de la base extraite, et on obtient une base de E.

Le théorème (17) permet donc d'obtenir une base de E à partir d'une famille génératrice. Peut-il en être de même à partir d'une famille libre seulement ?

Théorème 19 – Théorème de la base incomplète :

Soit E un $\mathbb{R}$-ev *de dimension finie*.

Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Preuve : Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E. Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, il possède une famille génératrice finie $\mathcal{G}$.

Notons :

$$\mathrm{A} = \{\text{card}\,(\mathcal{F}) \ / \ \mathcal{L} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G} \text{ et } \mathcal{F} \text{ est libre}\}\,.$$

La partie A de $\mathbb{N}$ est non vide car contient card $(\mathcal{L})$ et est majorée par card $(\mathcal{L} \cup \mathcal{G})$.

Elle admet donc un plus grand élément $p \in \mathbb{N}$.

Soit $\mathcal{F}_p$ une famille libre de E de cardinal p telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}_p \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.

Notons $\mathcal{F}_p = (e_1, \ldots, e_p)$. Montrons que $\mathcal{F}_p$ est une base.

On sait par définition qu'elle est libre. Reste donc à montrer qu'elle est génératrice.

Pour cela, on va montrer que $\mathcal{G} \subset \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)$.

Supposons le contraire. Il existe alors un certain $x \in \mathcal{G}$ avec $x \notin \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)$.

D'après le corollaire (14), la famille $(e_1, \ldots, e_p, x)$ est alors libre, elle contient $\mathcal{L}$ et est contenue dans $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$ (puisque $x \in \mathcal{G}$).

Ainsi, $p + 1 \in \mathrm{A}$ ce qui est contredit la définition de p.

Donc, $\mathcal{G} \in \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p) = \text{Vect}\,(\mathcal{F}_p)$ et $\mathcal{F}_p = (e_1, \ldots, e_p)$ est génératrice de E. Comme elle est libre, c'en est bien une base.

À l'issue de la preuve, on peut être un peu plus explicite :

Corollaire 20 :

Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E à l'aide d'éléments d'une famille génératrice de E.

Théorème 21 :

Dans un $\mathbb{R}$-ev *de dimension finie*, toutes les bases ont le *même* nombre d'éléments.

Preuve : On considère deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de E.

$\mathcal{B}_1$ engendre E et $\mathcal{B}_2$ est libre, donc $\text{card}(\mathcal{B}_1) \geqslant \text{card}(\mathcal{B}_2)$.

Symétriquement, $\text{card}(\mathcal{B}_2) \geqslant \text{card}(\mathcal{B}_1)$.

D'où $\text{card}(\mathcal{B}_1) = \text{card}(\mathcal{B}_2)$.

Définition 9 – Dimension d'un espace vectoriel :

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie.

On appelle *dimension* de E, notée $\dim(\mathrm{E})$, le cardinal d'une de ses bases.

Remarque : Par convention, $\varnothing$ est une base de $\{0\}$, d'où $\dim(\{0\}) = 0$ et, lorsqu'il y aura ambiguïté sur le corps de base, on n'hésitera pas à noter $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{E})$ au lieu de $\dim(\mathrm{E})$.

Exemples 23 :

E1 • $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ car admet pour base $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots(0, 0, \dots, 1)$.

E2 • $\dim(\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]) = \mathbf{n+1}$ car admet pour base $(1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^n)$.

E3 • $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = n \times p$ car admet pour base $(\mathrm{E}_{k,l})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant l \leqslant p}}$.

Exemple 24 – Base d'un sous espace :

Déterminons une base et la dimension de

$$\mathrm{E} = \left\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z=0 \text{ et } x-3y=0\right\}.$$

Encore un système linéaire homogène à résoudre. Il suffit de traduire :

$$(x\,;y\,;z) \in \mathrm{E} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \underset{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}2 - \mathrm{L}_1}{\iff} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -4y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 3y \\ y = y \\ z = -4y \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right).$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, non nul, forme donc une base de E qui est, en conséquence, de dimension 1.

Corollaire 22 – Dimension et cardinal des familles :

C1 • Toute famille libre de n éléments d'un espace de dimension n en forme une base.

C2 • Toute famille génératrice de n éléments d'un espace de dimension n en forme une base.

Théorème 23 – Synthèse :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F}$ une famille formée de n éléments.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\mathcal{F} \text{ est une base de E} \iff \mathcal{F} \text{ est libre} \iff \mathcal{F} \text{ est génératrice de E.}$$

Preuve : Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de n éléments de E.

— Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, elle est libre et génératrice (par définition).

— Si $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. Par le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base $(e_1, \dots, e_p)$ de E.
Or, $p = dim(\text{E}) = n$.
Donc, $(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E.

— Si $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice. Par le théorème de la base extraite, on peut en extraire une base $(e_1, \dots, e_p)$ de E.
Or, $p = dim(\text{E}) = n$.
Donc, $(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E.

Méthode 1 – Montrer qu'une famille est une base :

Lorsqu'on connaît la dimension n d'un espace, il suffit de prouver qu'une famille de n vecteurs est libre *ou* génératrice pour montrer qu'elle est une base.

Théorème 24 – Dimension d'un sous-espace vectoriel :

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et F un sev de E.

Alors :

1. F est de dimension finie et $\dim(\text{F}) \leqslant \dim(\text{E})$.
2. $\dim(\text{F}) = \dim(\text{E}) \iff \text{F} = \text{E}$.

Méthode 2 – Montrer que deux espaces vectoriels sont égaux :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps. Pour montrer que $\mathrm{F} = \mathrm{E}$, il suffit de montrer que F est un sev de E et que $\dim(\mathrm{F}) = \dim(\mathrm{E})$.

Définition 10 – Rang d'une famille de vecteurs :

Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $(u_1, \dots, u_p) \in \mathrm{E}^p$ une famille d'éléments de E.

On appelle *rang de* $(u_1, \dots, u_p)$, noté $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p)$, la dimension du sous-espace engendré par cette famille :

$$\mathrm{rg}(u_1, u_2, \cdots, u_p) = \dim(\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)).$$

Remarque : Le rang est bien défini puisque $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est de dimension finie. En effet, il admet évidemment $(u_1, \dots, u_p)$ comme famille génératrice finie.

Proposition 25 :

Soit $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ une famille de vecteurs de E, un $\mathbb{R}$-ev de dimension n. Alors :

1. $\mathrm{rg}(u_1, u_2, \cdots, u_p) \leqslant n$.
2. $\mathrm{rg}(u_1, u_2, \cdots, u_p) \leqslant p$.

En particulier, $\mathrm{rg}(u_1, u_2, \cdots, u_p) \leqslant \min(n\,;p)$.

3. $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est libre si, et seulement si $\mathrm{rg}(u_1, u_2, \cdots, u_p) = p$.

Preuve : On pose $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_p)$

1. F est un sev de E donc $\mathrm{rg}(u_1, u_2, \cdots, u_p) = \dim(\mathrm{F}) \leqslant n$;
2. F est engendré par p vecteurs donc $\mathrm{rg}(u_1, u_2, \cdots, u_p) = \dim(\mathrm{F}) \leqslant p$;
3. ($\Rightarrow$) Si $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est libre alors c'est une base de F.
   Par conséquent, $\mathrm{rg}(u_1, u_2, \cdots, u_p) = \dim(\mathrm{F}) = p$;

   ($\Leftarrow$) Si $\mathrm{rg}(u_1, u_2, \cdots, u_p) = p$, alors $\dim(\mathrm{F}) = p$.
   La famille $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ étant génératrice de F et ayant autant d'éléments que $\dim(\mathrm{F}) = p$, c'en est une base. En particulier, elle est libre.

À retenir – Opérations ne changeant par le rang :

— Retirer un vecteur nul :

$$\mathrm{rg}(u, v, 0, w) = \mathrm{rg}(u, v, w).$$

— Retirer un vecteur figurant plusieurs fois (en en conservant un !) :

$$\mathrm{rg}(u, v, w, v, u, w, w, w) = \mathrm{rg}(u, v, w).$$

— Retirer un vecteur combinaison linéaire des *autres* vecteurs :

$$\text{rg}\,(u, v, 2u + 3v) = \text{rg}\,(u, v).$$

— Ajouter des multiples d'un vecteurs aux *autres* vecteurs :

$$\text{rg}\,(u, v, w) = \text{rg}\,(u, v - 2u, w + 7u).$$

— Ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des *autres* vecteurs :

$$\text{rg}\,(u, v, w) = \text{rg}\,(u, v, w + 2u + 3v).$$

Exemple 25 :

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère :

$$u = (1, 2, 3, 4), \quad v = (4, 3, 2, 1), \quad w = (1, 2, 1, 2), \quad x = (2, 1, 2, 1), \quad y = (1, 1, 1, 1).$$

Déterminons $\text{rg}\,(u, v, w, x, y)$.

— On constate que $u + v = 5y$ donc $v = 5y - u$.
Par conséquent,
$$\text{Vect}\,(u, v, w, x, y) = \text{Vect}\,(u, w, x, y).$$

— On a aussi $w + x = 3y$ donc $x = 3y - w$ et $\text{Vect}\,(u, w, x, y) = \text{Vect}\,(u, w, y)$.

On en déduit que $\text{rg}\,(u, v, w, x, y) = \text{rg}\,(u, w, x, y) = rg(u, w, y) \leqslant 3$.
Or, la famille (u, w, y) est libre. En effet,

$$au + bw + cy = 0 \implies \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + 2b + c = 0 \\ 3a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Par conséquent $\text{rg}\,(u, w, y) = 3$ puis,

$$\text{rg}\,(u, v, w, x, y) = 3.$$

Remédiation 9 — Rappels d'ECG-1 - Système linéaires

Exercice II.1 – (Ensemble des solutions) [Correction p. 203]

Résoudre les systèmes suivants et préciser leur ensemble solution :

1. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+3z=9 \\ -x+4y+z=8 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x+4y-2z=6 \\ x+2y-z=5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+2y+2z=8 \\ x-y+z=2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x-2y=4 \\ 2x+y=1 \end{cases}$
5. $\begin{cases} y-3z=5 \\ -5y+15z=10 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+6y=2 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x-y+2z=7 \end{cases}$
8. $\begin{cases} 2x+y-3z=5 \\ 4x+2y-6z=10 \\ x-y+z=1 \end{cases}$
9. $\begin{cases} x+3y-2z=2 \\ 2x+6y-4z=7 \\ -x-3y+2z=-5 \end{cases}$

Exercice II.2 – (Système dépendant d'un paramètre (Pivot de Gauss)) [Correction p. 204]

Résoudre et discuter selon la valeur du paramètre réel a le système linéaire suivant d'inconnues $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} az+x+y=1 \\ ay+x+z=1 \\ ax+y+z=1 \end{cases}$$

Exercice II.3 – (Inversion de matrice via un système linéaire) [Correction p. 205]

Soit la matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ le système $\mathrm{AX}=\mathrm{Y}$, d'inconnue $\mathrm{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et de second membre $\mathrm{Y}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice II.4 – (Noyau d'un endomorphisme et système homogène) [Correction p. 205]

Soit la matrice $\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base et la dimension de l'ensemble des solutions de l'équation matricielle $MX = 0_4$.

Exercice II.5 – (Ajustement polynomial et intégration) [Correction p. 206]

On cherche un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ de la forme $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ vérifiant :

$$P(0) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P'(1) = 0, \quad \int_0^1 P(x)\,dx = 0$$

Déterminer le système linéaire associé aux inconnues (a, b, c, d) et le résoudre.

Correction de l'exercice II.1 : [Énoncé]

Pour les systèmes linéaires, si on ne veut pas se tromper, seul l'algorithme de Gauss prévaut.

1. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 9 \\ -x & + & 4y & + & z & = & 8 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & - & 3y & + & z & = & -3 \\ & & 5y & + & 2z & = & 14 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 3L_3 + 5L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & - & 3y & + & z & = & -3 \\ & & & & 11z & = & 27 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow 11L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 11L_2 - L_3}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 11x & + & 11y & & & = & 39 \\ & - & 33y & & & = & -60 \\ & & & & 11z & = & 27 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 33x & & & & & = & 57 \\ & - & 33y & & & = & -60 \\ & & & & 11z & = & 27 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{19}{11} \\ y & = & \dfrac{20}{11} \\ z & = & \dfrac{27}{11} \end{array}\right. .$$

Donc, $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{19}{11}\,;\frac{20}{11}\,;\frac{27}{11}\right)\right\}$. (un unique élément)

2. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & 4y & - & 2z & = & 6 \\ x & + & 2y & - & z & = & 5 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} x + 2y - z & = & 3 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 2 \end{array}\right.$$

À cause de la dernière ligne, le système n'admet pas de triplet solution.

On dit que le système est *incompatible*.

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

3. $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 8 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 4 \\ 0 & = & 0 \\ -2y & = & -2 \end{array}\right.$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & 3 \\ & & y & & & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & = & 3 & - & z \\ y & = & 1 & & \\ z & = & & & z \end{array}\right.$$

Donc $\mathcal{S} = \{(3-t\,;1\,;t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

C'est une droite affine passant par le point $(3\,;1\,;0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (-1\,;0\,;1)$.
Une infinité de triplets solutions obtenus en faisant varier le paramètre $t \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice II.2 : [Énoncé]

Appliquons la méthode du pivot de Gauss au système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & y & + & az & = & 1 & \\ x & + & ay & + & z & = & 1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ ax & + & y & + & z & = & 1 & L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{array}\right.$$

Ce qui donne le système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & az & = & 1 \\ & & (a-1)y & + & (1-a)z & = & 0 \\ & & (1-a)y & + & (1-a^2)z & = & 1-a \end{array}\right.$$

- **1er cas :** $a = 1$
  Le système se réduit à une seule équation : $x + y + z = 1$.
  L'ensemble des solutions est un plan affine de $\mathbb{R}^3$:
  $$\mathcal{S} = \{(1-y-z, y, z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$$

- **2ème cas :** $a \neq 1$
  Puisque $a - 1 \neq 0$, la ligne L_2 simplifiée donne $y - z = 0$, soit $y = z$.
  En substituant $y = z$ dans L_3, on obtient :
  $$(1-a)z + (1-a^2)z = 1-a \iff (2-a-a^2)z = 1-a$$
  Factorisons le trinôme : $2 - a - a^2 = (1-a)(a+2)$. Le système équivaut à :
  $$(1-a)(a+2)z = 1-a$$

  - ◇ **Sous-cas** $a = -2$ **:**
    L'équation L_3 devient $0 = 3$, ce qui est impossible. Ainsi :
    $$\mathcal{S} = \emptyset$$

  - ◇ **Sous-cas** $a \neq -2$ **(et** $a \neq 1$**) :**
    Puisque $a \neq 1$, on peut diviser par $(1-a)$:
    $$z = \frac{1}{a+2}$$
    D'où $y = z = \dfrac{1}{a+2}$, puis $x = 1 - y - az = 1 - \dfrac{1+a}{a+2} = \dfrac{1}{a+2}$.
    Il y a donc une unique solution :
    $$\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right)\right\}$$

Correction de l'exercice II.3 : [Énoncé]

1. Écrivons le système $\mathrm{AX} = \mathrm{Y}$ sous forme explicite :

$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ y + 2z = b \\ x + z = c \end{cases}$$

Effectuons l'opération $\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ y + 2z = b \\ -2y = -a + c \end{cases}$$

Effectuons les opérations $\mathrm{L}_2 \leftarrow 2\mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3$ et $\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_3$:

$$\begin{cases} x + z = c \\ 4z = -a + 2b + c \\ -2y = -a + c \end{cases}$$

Enfin, effectuons l'opération $\mathrm{L}_1 \leftarrow 4\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2$:

$$\begin{cases} 4x = a - 2b + 3c \\ 4z = -a + 2b + c \\ -2y = -a + c \end{cases} \iff \begin{cases} 4x = a - 2b + 3c \\ -2y = -a + c \\ 4z = -a + 2b + c \end{cases}$$

Le système admet une unique solution pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left(\frac{a - 2b + 3c}{4} ; \frac{a - c}{2} ; \frac{-a + 2b + c}{4}\right).$$

2. Le système $\mathrm{AX} = \mathrm{Y}$ admettant une unique solution pour tout Y, la matrice A est inversible. De plus, l'écriture $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{Y}$ donne :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 3/4 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice II.4 : [Énoncé]

Soit $\mathrm{X} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$\mathrm{MX} = 0_4$ correspond au système homogène :

$$\begin{cases} x - y + 2t = 0 \\ 2x - 2y + z + t = 0 \\ z - 3t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

Injectons $z = 3t$ (déduit de L_3) dans les autres lignes :

$$\begin{cases} x - y + 2t = 0 \\ 2x - 2y + 4t = 0 \\ z = 3t \\ x - y + 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - 2t \\ z = 3t \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - 2t \\ y = y \\ z = 3t \\ t = t \end{cases}$$

Les variables y et t sont libres. L'ensemble des solutions est :

$$\text{Ker}(f) = \{(y - 2t, y, 3t, t) \mid (y, t) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Les deux vecteurs $v_1 = (1, 1, 0, 0)$ et $v_2 = (-2, 0, 3, 1)$ forment une famille libre (non colinéaires) et génératrice de l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$.

C'en est donc une base, et $\dim(\mathcal{S}) = 2$.

Correction de l'exercice II.5 : [Énoncé]

Traduisons les conditions sous forme d'équations :

1. $\mathrm{P}(0) = 1 \implies d = 1$.
2. $\mathrm{P}(1) = 0 \implies a + b + c + d = 0 \implies a + b + c = -1$.
3. $\mathrm{P}'(\mathrm{X}) = 3a\mathrm{X}^2 + 2b\mathrm{X} + c \implies \mathrm{P}'(1) = 3a + 2b + c = 0$.
4. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx\right]_0^1 = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + 1 = 0 \implies 3a + 4b + 6c = -12.$

Nous obtenons le système linéaire d'inconnues (a, b, c) :

$$\begin{cases} a + b + c = -1 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 3a + 4b + 6c = -12 \end{cases}$$

Par le pivot de Gauss, on effectue les opérations :

- $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
- $L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1$

$$\begin{cases} a + b + c = -1 \\ 2a + b = 1 \\ -3a - 2b = -6 \end{cases}$$

Puis, $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$:

$$\begin{cases} a + b + c = -1 \\ 2a + b = 1 \\ a = -4 \end{cases}$$

On trouve immédiatement :

- $b = 1 - 2(-4) = 9$
- $c = -1 - a - b = -1 - (-4) - 9 = -6$
- $d = 1$

L'unique polynôme répondant au problème est :

$$P(X) = -4X^3 + 9X^2 - 6X + 1$$

Remédiation 10 — Système linéaire -- De rang 3.

Exercice II.1 [Correction p. 208]

Résoudre le système suivant :

$$(\mathrm{S}_3)\begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ 4x+7y+z=11 \\ -2x+y+5z=9. \end{cases}$$

Correction de l'exercice II.1 : [Énoncé]

Une seule méthode, l'algorithme de Gauss : on effectue des opérations élémentaires sur les lignes du système afin de l'échelonner.

$$(\mathrm{S}_3)\begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ 4x+7y+z=11 \\ -2x+y+5z=9 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3+L_1}}{\iff} \begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ y+3z=5 \\ 4y+4z=12 \end{cases}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-4L_2}{\iff} \begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ y+3z=5 \\ -8z=-8 \end{cases}$$

— Le système est échelonné.

— il y a 3 inconnues principales x, y et z, 0 inconnues secondaires.

— À ce stade, on sait déjà que le système admet un unique triplet solution

À retenir

On dit que le système est un système de Cramer ou que le système est de rang 3.

On continue pour trouver les solutions. Ici commence l'« élimination de Jordan » :

$$\underset{L_3\leftarrow -\frac{1}{8}L_3}{\iff} \begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ y+3z=5 \\ z=1 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-3L_3\\ L_1\leftarrow L_1+L_3}}{\iff} \begin{cases} 2x+3y=4 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1-3L_2}{\iff} \begin{cases} 2x=-2 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

$$\underset{L_1\leftarrow -\frac{1}{2}L_1}{\iff} \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=1. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est un singleton :

$$\mathcal{S}_3=\{(-1,2,1)\}.$$

Remédiation 11 — Système linéaire -- De rang 2.

Exercice II.1 [Correction p. 209]

Résoudre le système suivant :

$$(S_2)\begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ 4x+7y+z=11 \\ 2x+2y-4z=-2. \end{cases}$$

Correction de l'exercice II.1 : [Énoncé]

Une seule méthode, l'algorithme de Gauss : on effectue des opérations élémentaires sur les lignes du système afin de l'échelonner.

$$(S_2)\begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ 4x+7y+z=11 \\ 2x+2y-4z=-2 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ y+3z=5 \\ -y-3z=-5 \end{cases}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\iff} \begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ y+3z=5 \\ 0=0 \end{cases}$$

On exprime alors les inconnues principales x et y en fonction de l'inconnue secondaire z choisie :

$$\iff \begin{cases} 2x+3y=z+3 \\ y=-3z+5 \\ z=z \end{cases}$$

On poursuit l'élimination dans la première équation à partir de la deuxième :

$$\underset{L_1\leftarrow L_1-3L_2}{\iff} \begin{cases} 2x=10z-12 \\ y=-3z+5 \\ z=z \end{cases}$$

$$\underset{L_1\leftarrow \frac{1}{2}}{\iff} \begin{cases} x=-6+5z \\ y=5-3z \\ z=z. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est une droite affine :

$$\mathcal{S}_2=\{(-6+5z,5-3z,z)\mid z\in\mathbb{R}\}$$
$$=\begin{pmatrix}-6\\5\\0\end{pmatrix}+\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}5\\-3\\1\end{pmatrix}\right).$$

Commentaire

Remarque

On ... ou ... est

À retenir

On dit que le système est de rang 2 (le nombre d'équations indépendantes qui restent).

daire z.

— À ce stade, on sait déjà que le système admet une infinité de solutions.

Commentaire

Pour trouver des triplets solutions, il suffit de faire varier z dans $\mathbb{R}$.

Remédiation 12 — Système linéaire -- De rang 1.

Exercice II.1 [Correction p. 210]

Résoudre le système suivant :

$$(\mathrm{S}_1)\begin{cases} 2x+3y-\ z=3 \\ 4x+6y-2z=6 \\ -2x-3y+\ z=-3. \end{cases}$$

Correction de l'exercice II.1 : [Énoncé]

Une seule méthode, l'algorithme de Gauss : on effectue des opérations élémentaires sur les lignes du système afin de l'échelonner.

$$(\mathrm{S}_1)\begin{cases} 2x+3y-\ z=3 \\ 4x+6y-2z=6 \\ -2x-3y+\ z=-3 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3+L_1}}{\iff} \begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Remarque
On peut choisir x et y ou y et z comme inconnues secondaires sans changer les solutions.

- Le système est échelonné.
- Il y a 1 inconnues principales z, 2 inconnue secondaire x et y.
- À ce stade, on sait déjà que le système admet une infinité de solutions

On exprime alors l'inconnue principale z en fonction des inconnues secondaires x et y choisies :

$$\iff \begin{cases} x=\ x \\ y=\ y \\ z=-3+2x+3y. \end{cases}$$

À retenir
On dit que le système est de rang 1 (le nombre d'équations indépendantes qui restent).

L'ensemble des solutions est un plan affine :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \{(x,y,-3+2x+3y)\mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Commentaire
Pour trouver des triplets solutions, il suffit de faire varier x et y dans $\mathbb{R}$.

Programme Espaces vectoriels

Ce que dit le programme en ECG2 :

L'objet de ce chapitre est une étude élémentaire des applications linéaires et des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, approfondissant les acquis de première année et les prolongeant par l'étude de la réduction des matrices.

L'objectif est d'avoir la possibilité d'utiliser des espaces vectoriels concrets, naturellement isomorphes à $\mathbb{R}^n$ et de pouvoir y manipuler les changements de bases, sans introduire les espaces vectoriels abstraits.

Cette partie du programme sera ensuite utilisée en analyse dans l'étude des points critiques des fonctions de deux variables et en probabilités (chaînes de Markov...).

1 – Espaces vectoriels réels de dimension finie

Cette partie doit être traitée dans sa plus simple expression. Les notions étudiées en première année sont étendues dans un cadre plus abstrait sans démonstration en s'appuyant sur les exemples de référence listés ci-dessous.

Espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un espace vectoriel de dimension n est un ensemble E muni d'une opération interne $+$, d'une opération externe . et d'une bijection de E sur $\mathbb{R}^n$ qui préserve les combinaisons linéaires.	On se limite par définition au cas de la dimension finie. On illustre ces définitions en liaison avec le programme de première année complété par les espaces vectoriels de référence suivants : $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[x]$.
Familles libres, familles génératrices, bases.	
Base canonique de $\mathbb{R}^n$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et de $\mathbb{R}_n[x]$.	
Sous-espace vectoriel.	
Dimension d'un sous-espace vectoriel.	
Rang d'une famille de vecteurs.	

Ce que disait le programme en ECG1 :

I. Calcul matriciel et résolution de systèmes linéaires

L'objectif de cette partie du programme est :

- d'une part d'initier au calcul matriciel afin de permettre la résolution de problèmes issus, notamment, des probabilités ;
- d'autre part de parvenir à une bonne maîtrise de la résolution des systèmes linéaires et de les interpréter sous forme matricielle.

L'étude de ce chapitre sera menée en lien avec l'informatique.

On introduit la problématique des systèmes linéaires, puis on présente l'utilité de l'écriture matricielle en utilisant des exemples simples de tableaux entrée-sortie ou des tableaux de Leontieff.

1 – Systèmes linéaires

Définition d'un système linéaire.	
Système homogène, système de Cramer.	
Résolution par la méthode du pivot de Gauss.	La méthode sera présentée à l'aide d'exemples. On donnera des exemples où il existe une solution unique, où il n'existe pas de solution et où il existe plusieurs solutions.
Ensemble des solutions d'un système linéaire.	On insiste sur les propriétés de stabilité de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène en vue de l'introduction de la notion de sous-espace vectoriel au second semestre.

II. L'espace $\mathbb{R}^n$, sous-espaces vectoriels et applications linéaires

Ce chapitre ne doit pas donner lieu à un exposé théorique ; on donne ici une approche concrète à des notions. Pour simplifier ce premier contact, l'étude se limitera à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, en privilégiant les exemples pour $n \in \{2, 3, 4\}$.

1 – Espace $\mathbb{R}^n$

Définition de $\mathbb{R}^n$. Loi interne $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Loi externe $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Propriétés d'associativité et de distributivité.	On privilégiera le travail sur les espaces $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$. On introduira un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ comme matrice des coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique.
Combinaisons linéaires.	
Base canonique de $\mathbb{R}^n$.	Les espaces vectoriels ci-dessus sont naturellement équipés de leur base canonique.

2 – Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.	Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs. On remarque qu'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est stable par combinaisons linéaires. On classifiera les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un sous-espace vectoriel.	On reviendra sur l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à $2, 3, 4$ inconnues.
Sous-espace vectoriel engendré.	Notation Vect $(u_1, u_2, \dots, u_p)$.
Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.	
Base d'un sous-espace vectoriel.	$(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une base du sous-espace vectoriel F de E si et seulement si tout vecteur de F se décompose de manière unique sous forme d'une combinaison linéaire de $(u_1, u_2, \dots, u_p)$.
Si un sous-espace vectoriel admet une base constituée de p vecteurs, toute autre base a p vecteurs.	Résultats admis.
Dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.	
Famille libre d'un sous-espace vectoriel de dimension n.	Cardinal d'une famille libre (respectivement génératrice) d'un sous-espace vectoriel de dimension n.
Une famille libre (respectivement génératrice) à n vecteurs d'un sous-espace vectoriel de dimension n est une base.	Théorème admis.
Rang d'une famille de vecteurs.	

II

Espaces vectoriels

On a bien compris (du moins, je l'espère) que la notion d'ensembles est au centre de l'étude des mathématiques.

Un ensemble est une collection d'objets. Mais on voit bien que, dans sa généralité, cette notion est au mieux insuffisante, sinon peu manipulable. On préfère déjà les ensembles d'objets de même nature : ensemble de nombres, ensemble de fonctions, ensembles de matrices… sur lesquels on peut donc définir des opérations.

Une fois un ensemble d'objets de même nature constitué, on peut se demander quelle est sa structure. L'étude des structures algébriques mathématiques est essentielle pour identifier le type d'ensemble.

Plusieurs structures mathématiques existent, en voici trois parmi les plus courantes :

— Introduit en 1893 par Heinrich Weber (1842-1913, allemand) : le groupe. Un ensemble G est un groupe lorsqu'il est muni d'une loi de composition interne (une opération entre éléments), notée par exemple $\oplus$, et qui vérifie : G est stable par $\oplus$, la loi $\oplus$ est associative, il existe un neutre de $\oplus$ appartenant à G, et tout élément de G possède un symétrique par $\oplus$ dans G.
Sont des groupes $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, l'ensemble des applications bijectives de E dans E (muni de la composition). Ne sont pas des groupes : $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{R}, \times)$, $(\mathbb{R}^*, +)$ ...
Si de plus, $\oplus$ est commutative, on dit que G est un groupe abélien.

— Introduit en 1877 par Richard Dedekind (1831-1916, allemand) : le corps. Un ensemble $\mathbb{K}$ est un corps lorsqu'il est muni de deux lois de composition internes, notées par exemples $\oplus$ et $\star$, qui vérifient : $\mathbb{K}$ est stable par $\oplus$ et $\star$, $(\mathbb{K}, \oplus)$ est un groupe abélien, $\star$ se distribue sur $\oplus$, $\star$ possède un neutre dans $\mathbb{K}$, tout élément de $\mathbb{K}$ (excepté le neutre de $\oplus$) possède un inverse pour $\star$ dans $\mathbb{K}$. $(\mathbb{Q}, +, \times)$ et $(\mathbb{R}, +, \times)$ sont des corps. Tous les autres ensembles usuels n'en sont pas !

— Manipulé depuis le milieu du XVII$^{\text{ème}}$ siècle en géométrie, c'est Giuseppe Peano (1858-1932, italien) qui donna une définition rigoureuse et axiomatique d'espace vectoriel en 1888. Cette structure a le bon goût d'être un bon compromis entre « facile à manipuler » et « de nombreux ensembles peuvent être vus comme des espaces vectoriels » ; rajoutons à cela qu'elle peut avoir une interprétation géométrique.

$\overrightarrow{\mathcal{P}}$	$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R}[x]$	$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
$3\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$	$f-2g$	$3\mathrm{P}+2\mathrm{Q}$	$3\mathrm{A}+2\mathrm{B}$	$3(u_n)_{n\in\mathbb{N}}+2(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\vec{0}$	$x\longmapsto 0_{\mathbb{R}}$	$0_{\mathbb{R}[x]}$	$(0)_{n,p}$	$(0)_{n\in\mathbb{N}}$

FIGURE II.1 : Exemples d'espaces vectoriels

ON est donc face à une excellente structure algébrique qui est le thème de ce chapitre.

Plan du chapitre

I RAPPELS DE PREMIÈRE ANNÉES 217
I.1 EXEMPLES FONDAMENTAUX 219
II SOUS-ESPACES VECTORIELS 221
II.1 DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS 221
II.2 SOUS-ESPACES VECTORIELS ENGENDRÉS 225
III BASES ET DIMENSION 229
III.1 FAMILLES LIBRES, GÉNÉRATRICES, BASES 229
III.2 DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL 235
III.3 COORDONNÉES DES VECTEURS DANS UNE BASE 239
IV RANG D'UNE FAMILLE DE VECTEURS 241
V RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR L'INVERSIBILITÉ DE MATRICES 242
TEST 2 : SYSTÈMES ET ESPACES VECTORIELS 246
FICHE 13 : INVERSE D'UNE MATRICE – À L'AIDE D'UN POLYNÔME ANNULATEUR ... 251
FICHE 14 : MONTRER QU'UN ESPACE EST UN SEV – À L'AIDE D'UN Vect 252
FICHE 15 : DÉTERMINER DES BASES ET CONSÉQUENCES 254
FICHE 16 : INVERSE D'UNE MATRICE – À L'AIDE DES OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES . 256
FICHE 17 : PUISSANCE D'UNE MATRICE – À L'AIDE D'UNE DIA OU TRIGONALISATION 258
FICHE 18 : INVERSE D'UNE MATRICE – À L'AIDE D'UN SYSTÈME 259
FICHE 19 : PUISSANCE D'UNE MATRICE – À L'AIDE DE LA FORMULE DU BINÔME ... 260
TD 3 : ESPACES VECTORIELS 262
DM 2 : D'APRÈS ECRICOME ET EDHEC 288

Pour bien démarrer...

1. Définition d'une matrice inversible. Propriétés.
   Soient $n \in [\![2\,;+\infty[\![$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   - Définition. On dit que A est inversible lorsqu'il existe une matrice $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$.
   - Propriétés :
     - A est inversible si, et seulement si, il existe une matrice $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$ ou $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$.
     - Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $\left(\mathrm{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathrm{A}$.
     - Si A est inversible, alors ${}^t\mathrm{A}$ est inversible et $\left({}^t\mathrm{A}\right)^{-1} = {}^t\left(\mathrm{A}^{-1}\right)$.
     - Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$.
2. Conditions suffisantes de non inversibilité d'une matrice.
   Soient $n \in [\![2\,;+\infty[\![$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   - Si A contient une ligne (ou colonne) nulle, alors A n'est pas inversible.
   - Si l'une des lignes (respectivement colonnes) de A est combinaison linéaire des autres lignes (respectivement colonnes), alors A n'est pas inversible.
3. Inversibilité des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On appelle déterminant de A, noté $\det(\mathrm{A})$, le réel défini par $\det(\mathrm{A}) = ad - bc$. On a :

   $$\text{A est inversible si, et seulement si, } \det(\mathrm{A}) \neq 0.$$

   Et le cas échéant :
   $$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{A})} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$
4. Inversibilité des matrices triangulaires.
   Une matrice triangulaire est inversible

   si, et seulement si, tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
   si, et seulement si, le produit de ses coefficients diagonaux est non nul.

5. Soient $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Résoudre $\mathrm{AX} = 0_{3,1}$.

On a :

$$\mathrm{AX}=0_{3,1} \iff \left\{\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 2x-2z=0 \\ 3x+y-z=0 \end{array}\right. \underset{\substack{\mathrm{L}_2\leftarrow\mathrm{L}_2-2\mathrm{L}_1\\ \mathrm{L}_3\leftarrow\mathrm{L}_3-3\mathrm{L}_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ -2y-4z=0 \\ -2y-4z=0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ -y-2z=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & + & y \quad = -z \\ & & y \quad = -2z \\ & & z \;\; = z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & -2z \\ z & = & z \end{array}\right. \iff \mathrm{X}=\begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}.$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{AX}=0_{3,1}$ est $\left\{ z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ z\in\mathbb{R} \right\}$.

Ce chapitre est une introduction aux espaces vectoriels. Il précède celui sur les *applications linéaires entre espaces vectoriels* qui donnera un tout autre sens aux matrices que nous connaissons déjà…

I. Rappels de première années

Définition 1 – Espaces vectoriels :

Soit E un ensemble non vide muni de deux lois :

D1 • Une loi de *composition interne* notée $+$ (l'addition) :

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathrm{E}\times\mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ & (x\,;y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

Idée
On omettra le symbole $\cdot$ pour la multiplication.

D2 • Une loi de *composition externe*, notée $\cdot$ (la multiplication par un scalaire) :

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R}\times\mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ & (\lambda\,;x) & \longmapsto & \lambda\cdot x \end{array}$$

On dit que $(\mathrm{E},+,\cdot)$ est un *espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* abrégé en $\mathbb{R}$-ev lorsque :

D3 • $(\mathrm{E},+)$ est un groupe abélien, *i.e.*

1. $+$ est *associative* : $\forall\ (x\,;y\,;z)\in\mathrm{E}^3,\ (x+y)+z=x+(y+z)=x+y+z$.
2. $+$ est *commutative* : $\forall\ (x\,;y)\in\mathrm{E}^2,\ x+y=y+x$.
3. $+$ admet un *élément neutre* noté 0_E et appelé *vecteur nul* :

$$\forall\, x\in\mathrm{E},\quad x+0_\mathrm{E}=0_\mathrm{E}+x=x.$$

Idée
Dès qu'il n'y aura plus d'ambiguïté, on notera 0 plutôt que 0_E.

4. Tout élément de E admet un *symétrique* pour $+$ appelé *opposé de* x et noté $-x$:

$$\forall\, x\in\mathrm{E},\quad x+(-x)=0_\mathrm{E}.$$

D4 • La loi de composition externe vérifie les axiomes suivants :

1. $\forall\, x\in\mathrm{E},\ \forall\ (\lambda\,;\mu)\in\mathbb{R}^2,\quad \lambda\cdot(\mu\cdot x)=(\lambda\times_\mathbb{R}\mu)\cdot x$: *compatibilité avec* $\times_\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
2. $\forall\, x\in\mathrm{E},\ \forall\ (\lambda\,;\mu)\in\mathbb{R}^2,\quad (\lambda+_\mathbb{R}\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$: *compatibilité* $+_\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
3. $\forall\ (x\,;y)\in\mathrm{E}^2,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R},\quad \lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$: *compatibilité avec* $+$ *dans* E.
4. $\forall\, x\in\mathrm{E},\quad 1_\mathbb{R}\cdot x=x$: $1_\mathbb{R}$ est l'élément neutre pour $\cdot$.

Attention
La loi $\cdot$ est une loi de multiplication externe : ce n'est pas le produit de deux vecteurs.

On appelle :

— *vecteurs* les éléments de E.

— *scalaires* les éléments de $\mathbb{R}$.

À retenir
Les vecteurs sont le plus souvent notés sans leur flèche.

On dit que $\mathbb{R}$ est le *corps de base* de l'espace vectoriel E.

En gros, un espace vectoriel est un ensemble muni d'une addition interne et d'une multiplication scalaire qui ont les bonnes propriétés habituelles permettant les calculs !

Remarques :

— On notera que l'existence du vecteur nul implique que tout espace vectoriel E est non vide.

— Pour éviter des parenthèses, on définit une priorité de la loi externe sur la loi interne : $\lambda.x+y$ signifie $(\lambda.x)+y$.

— Si elle est non ambigüe, on allège en général l'écriture en notant λu plutôt que $\lambda\cdot\vec{u}$ pour λ un scalaire et $\vec{u}$ un vecteur, même si la notation avec des flèches pour les vecteurs peut être utilisée dans un premier temps pour ne pas mélanger les objets. Les lettres grecques $\alpha,\beta,\lambda,\mu,\ldots$ s'utilisent plutôt pour les scalaires que pour les vecteurs.

— Puisque E est stable par $+$ et par $\cdot$, il est stable par combinaison linéaire :

$$\forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall\,x,y\in\mathrm{E},\ \lambda x+\mu y\in\mathrm{E}.$$

Et si c'est vrai pour deux…

Proposition 1 – Opérations :

Soit E un espace vectoriel réel.

P1 • L'élément neutre pour $+$ est unique, noté $\overrightarrow{0_{\mathrm{E}}}$, appelé vecteur nul de E.

P2 • Pour tout $x\in\mathrm{E}$, x admet un unique opposé, noté $-x$.
En particulier,

(1) $\forall\,(x;x';y)\in\mathrm{E}^3,\ \ x+y=x'+y\implies x=x'.$

(2) $\forall\ (\lambda\,;x)\in\mathbb{R}\times\mathrm{E},(-\lambda).x=\lambda.(-x)=-(\lambda.x).$

(3) $(-1_{\mathbb{R}}).x=-x.$

(4) $\forall\,\lambda\in\mathbb{R},\forall\ (x\,;y)\in\mathrm{E}^2,\ \ \lambda.(x-y)=\lambda.x-\lambda.y.$

(5) $\forall\ (\lambda\,;\mu)\in\mathbb{R}^2,\forall\,x\in\mathrm{E},\ \ (\lambda-\mu).x=\lambda.x-\mu.x.$

P3 • $\forall\,\lambda\in\mathbb{R},\forall\,x\in\mathrm{E},\left(\lambda\cdot x=0_{\mathrm{E}}\iff\left\{\begin{array}{l}\lambda=0\\ \text{ou}\\ x=0_{\mathrm{E}}\end{array}\right.\right).$
En particulier,

(1) Si $\lambda\neq0$, alors $\forall\ (x\,;y)\in\mathrm{E}^2,\ \ \lambda.x=\lambda.y\implies x=y.$

(2) Si $x\neq0_{\mathrm{E}}$, alors $\forall\ (\lambda\,;\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \lambda.x=\mu.x\implies\lambda=\mu.$

P4 • $\forall\,n\in[\![2\,;+\infty[\![\,,\forall\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n,\forall\ (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{E}^n,\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n\in\mathrm{E}.$

Preuve :

P1 • Supposons qu'il existe deux éléments neutres e et e' pour $+$.
Alors,

$$e\underset{\text{def de }e'}{\overset{\uparrow}{=}}e+e'\underset{\text{def de }e}{\overset{\uparrow}{=}}e'.$$

C'est un fait général.

P2 • Soit $x \in \mathrm{E}$. Supposons également qu'il existe deux symétriques x' et $x"$ de x pour $+$.
Alors,

$$x' \underset{\text{def de } 0_\mathrm{E}}{=} x' + 0_\mathrm{E} \underset{\text{def de } x"}{=} x' + (x + x") \underset{\text{associativité de } +}{=} (x' + x) + x" \underset{\text{def de } x'}{=} 0_\mathrm{E} + x" \underset{\text{def de } 0_\mathrm{E}}{=} x".$$

C'est également un fait général.

(1) Simple définition et utilisation du symétrique de $y\mathrm{E}$;.

Soit $(\lambda\,;x) \in \mathbb{R} \times \mathrm{E}$.

(2) $(-\lambda).x + \lambda.x = (-\lambda+\lambda).x = 0_\mathbb{R}.x = 0_\mathrm{E} \implies (-\lambda).x = -(\lambda.x)$, et

$$\lambda.(-x) + \lambda.x = \lambda.(-x+x) = \lambda.0_\mathrm{E} = 0_\mathrm{E}. \implies \lambda.(-x) = -(\lambda.x).$$

(3) En prenant $\lambda = 1_\mathbb{R}$ dans **P2**.(2), on a : $(-1_\mathbb{R}).x = -(1_\mathbb{R}.x) = -x.(-1_\mathbb{R}).x = -x$.

(4) Conséquence de **P2**.(2).

(5) Conséquence de **P2**.(2).

Méthode
Afin de démontrer la relation $\mathcal{P} \implies (\mathcal{Q} \cup \mathcal{R})$ *i.e.* $\rceil\mathcal{P} \cup (\mathcal{Q} \cup \mathcal{R})$, on a démontré ici $(\mathcal{P} \cap \rceil\mathcal{Q}) \implies \mathcal{R}$ *i.e.* $\rceil(\mathrm{P} \cap \rceil\mathcal{Q}) \cup \mathcal{R}$.

P3 • Soit $x \in \mathrm{E}$. Alors $0_\mathbb{R}.x = (0_\mathbb{R} +_\mathbb{R} 0_\mathbb{R}).x = 0_\mathbb{R}.x +_\mathrm{E} 0_\mathbb{R}.x \implies 0_\mathbb{R}.x = 0_\mathrm{E}$.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a aussi $\lambda.0_\mathrm{E} = \lambda.(0_\mathrm{E} + 0_\mathrm{E}) = \lambda.0_\mathrm{E} + \lambda.0_\mathrm{E} \implies \lambda.0_\mathrm{E} = 0_\mathrm{E}$.
Réciproquement, soit $(\lambda\,;x) \in \mathbb{R} \times \mathrm{E}$ tel que $\lambda.x = 0_\mathrm{E}$.
Supposons que $\lambda \neq 0_\mathbb{R}$ et montrons que $x = 0_\mathrm{E}$.
On a alors $x = 1_\mathbb{R}.x = (\lambda^{-1}\lambda).x = \lambda^{-1}.(\lambda.x) = \lambda^{-1}.0_\mathrm{E} = 0_\mathrm{E}$.

(1) Conséquence de **P2**.(4) et **P3**.

(2) Conséquence de **P2**.(5) et **P3**.

I.1 – Exemples fondamentaux

Exemple 1 – $(\mathbb{R}\,;+\,;\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

Attention
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ne sont pas des $\mathbb{R}$-ev.

L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de son addition et de sa multiplication est un $\mathbb{R}$-espaces vectoriel de vecteur nul $\overrightarrow{0_\mathbb{R}} = 0_\mathbb{R}$ et muni des lois :

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x\,;y) & \longmapsto & x + y = x +_\mathbb{R} y \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\lambda\,;x) & \longmapsto & \lambda \cdot x = \lambda \times_\mathbb{R} x. \end{array}$$

Exemple 2 – $(\mathbb{R}^n\,;+\,;\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

Les ensembles R^2 et $\mathbb{R}^3$ identifiaient à l'ensemble des vecteurs du plan et de l'espace respectivement munis de la somme vectorielle et du produit des vecteurs par les réels, sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

De manière générale, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}^n$ les lois :

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & ((x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)\,;(y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n)) & \longmapsto & (x_1+y_1,\, x_2+y_2,\, \ldots,\, x_n+y_n) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (\lambda\,;(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)) & \longmapsto & (\lambda x_1,\, \lambda x_2,\, \ldots,\, \lambda x_n) \end{array}.$$

Le vecteur nul est $\overrightarrow{0_{\mathbb{R}^n}} = (0,\, 0\, \ldots,\, 0)$

Exemple 3 – $\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), +, \cdot\right)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. :

Attention
L'ensemble de toutes les matrices (sans spécification de taille) n'est pas un espace vectoriel (on ne peut pas additionner deux matrices de taille différente).

On munit $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des lois :

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ & \left((a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\,;(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\right) & \longmapsto & (a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ & \left(\lambda\,;(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\right) & \longmapsto & \lambda\cdot(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}. \end{array}$$

Le vecteur nul est la matrice nulle $\overrightarrow{0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}} = (0)_{n,p}$.

En particulier, pour $n = p$, l'ensemble $\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot\right)$ des matrices carrées est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Idée
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est, en fait, un peu plus qu'un ev car on peut le munir d'une multiplication interne.

Exemple 4 – $(\mathcal{F}(\Omega\,;\mathbb{R})\,;+\,;\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

Attention
$\mathcal{F}(\Omega\,;\mathrm{Y})$ n'est, en général, pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (pour les mêmes lois) si Y n'est pas un $\mathbb{R}$-ev.

Soient Ω un ensemble quelconque. L'ensemble $\mathcal{F}(\Omega\,;\mathbb{R})$, noté aussi $\mathbb{R}^\Omega$ des fonctions de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ peut être munis des lois :

$$\begin{array}{rccccc} + : & \mathbb{R}^\Omega \times \mathbb{R}^\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^\Omega & & \\ & (f\,;g) & \longmapsto & f+g : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccccc} \cdot : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^\Omega & & \\ & (\lambda\,;f) & \longmapsto & \lambda\cdot f : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & x & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array}$$

Le vecteur nul $\overrightarrow{0_{\mathcal{F}(\Omega;\mathbb{R})}}$ est la fonction nulle $0_{\mathcal{F}(\Omega;\mathbb{R})} : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$.

Exemples 5 :

E1 • Si $\Omega = \mathrm{I}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ dans l' exemple (4) , on en déduit que l'ensemble $\mathcal{F}(\mathrm{I};\mathbb{R})$ des fonctions de I ou de dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.

Les fonctions cos, exp, … sont des exemples de vecteurs de cet espace vectoriel.

E2 • Si $\Omega = \mathbb{N}$, l' exemple (4) affirme que l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel dont le vecteur nul est la suite constante égale à $0_{\mathbb{R}}$.

La somme de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et le produit d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par un réel λ étant la suite $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 6 – $(\mathbb{R}[x];+;\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

Idée
$\mathbb{R}[x]$ est, en fait, un peu plus qu'un ev car on peut le munir multiplication interne.

Piège
L'ensemble des fonctions polynomiales de degré exactement égal à n n'est pas un espace vectoriel.

L'ensemble $\mathbb{R}[x]$ de toutes les fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de vecteur nul la fonction nulle et muni des lois :

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{R}[x]\times\mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ & \left(x\longmapsto\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}a_kx^k\,;x\longmapsto\sum_{k\geqslant 0}b_kx^k\right) & \longmapsto & x\longmapsto\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}(a_k+b_k)\,x^k \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R}\times\mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ & \left(\lambda\,;x\longmapsto\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}a_kx^k\right) & \longmapsto & \lambda\cdot\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}a_kx^k : x\longmapsto\sum_{k\geqslant 0}(\lambda a_k)\,x^k. \end{array}$$

En particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ des fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel.

Le vecteur nul $\overrightarrow{0_{\mathbb{R}[x]}}$ est la fonction polynomiale nulle.

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel réel, $n\in[\![2\,;+\infty[\![$ et $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ une famille de vecteurs de E.

II. Sous-espaces vectoriels

II.1 – Définitions et généralités

Définition 2 – Sous-espace vectoriel :

Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E lorsque :

D1 • F est non vide.

D2 • $\mathrm{F}\subset\mathrm{E}$.

Méthode
En particulier $0_{\mathrm{E}}\in\mathrm{F}$. Cela sera utile dans deux cas :
— pour montrer que F est non vide
— parfois pour montrer qu'un sous-ensemble n'est pas un sev !

D3 • $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathrm{F}, \lambda x + \mu y \in \mathrm{F}$. (F est stable par combinaison linéaire)

À quoi bon cette histoire de sous-espace vectoriel ? Pour la raison qui suit :

Proposition 2 :

Si F un sous-espace vectoriel de E, alors F est un espace vectoriel.

Preuve :

— L'ensemble F est muni d'une addition et d'une loi externe.

— L'addition reste évidemment associative et commutative car ceci est vraie dans E contenant F.

— Comme $0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{F}$, l'addition de F possède un élément neutre :

$$\forall x \in \mathrm{F},\ x +_{\mathrm{F}} 0_{\mathrm{E}} = x +_{\mathrm{E}} 0_{\mathrm{E}} = x.$$

— Soit $x \in \mathrm{F}$. Alors $-x = (-1).{}_{\mathrm{E}}x = (-1).{}_{\mathrm{F}}x \in \mathrm{F}$: tout élément de F admet un opposé qui est bien dans F.

— Les dernières propriétés, qui sont vraies lorsque x et y appartiennent à E, sont a fortiori vraies lorsque x et y appartiennent à F.

☑

Exemple 7 :

$\{0_{\mathrm{E}}\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

Méthode 1 :

Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on vérifiera qu'il est non vide et on montrera que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.

Exemples 8 – Dans les espaces de fonctions :

— L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

— Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
Les ensembles $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{I};\mathbb{R}) \sqsubset \mathcal{C}^k(\mathrm{I};\mathbb{R}) \sqsubset \mathcal{C}^1(\mathrm{I};\mathbb{R}) \sqsubset \mathcal{C}^0(\mathrm{I};\mathbb{R})$ sont tous des sev de l'ensemble $\mathcal{F}(\mathrm{I};\mathbb{R})$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.
Ils forment même une suite de sev pour l'inclusion.

— Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[x]$ est un sev du $\mathbb{R}$ev vectoriel $\mathbb{R}[x]$.
On retrouve une suite de sev pour l'inclusion :

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_0[x] \sqsubset \mathbb{R}_1[x] \sqsubset \ldots \sqsubset \mathbb{R}_n[x] \sqsubset \mathbb{R}_{n+1}[x] \sqsubset \ldots \sqsubset \mathbb{R}[x].$$

Idée
La relation « être un sev » est transitive.

Exemples 9 – Dans les espaces de matrices :

Les ensembles

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales,
- $\mathcal{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures,
- $\mathcal{T}_{n,\mathrm{I}}(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires inférieures,
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques,
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques,

sont des sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemples 10 – Dans l'espace des suites :

Notons $\mathcal{S}$ le $\mathbb{R}$ev des suites réelles.

- L'ensemble $\mathcal{S}_b$ des suites bornées est un sev de $\mathcal{S}$.
- L'ensemble $\mathcal{S}_c$ des suites convergentes est un sev de $\mathcal{S}_b$.

Exemples 11 – Et bien d'autres :

- L'ensemble des fonctions définies, dérivables deux fois et telles que f'' est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{C}^2(\mathrm{I},\mathbb{R})$, muni de l'addition interne usuelle et de la multiplication scalaire.
- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.
- L'ensemble des solutions sur un intervalle I, d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{I};\mathbb{R})$.

  Plus précisément,

  - $\left\{y \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I};\mathbb{R}) \;/\; y' + a(x)y = 0\right\}$ est un sev de $\mathcal{C}^1(\mathrm{I};\mathbb{R})$.
  - $\left\{y \in \mathcal{C}^2(\mathrm{I};\mathbb{R}) \;/\; y'' + ay' + by = 0\right\}$ est un sev de $\mathcal{C}^2(\mathrm{I};\mathbb{R})$.
- L'ensemble des suites récurrentes linéaires est un sev du $\mathbb{R}$ev des suites réelles ou complexes.

Exemple 12 :

Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{F} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \mathrm{AM} = \mathrm{MA}\}$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— Par définition : $F \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel.

— La matrice nulle commute avec A, donc $0_n \in F$: F est non vide.

— Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $M, N \in F$. Montrons que $\lambda M + \mu N \in F$.

— On a déjà $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, donc $\lambda M + \mu N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— Ensuite :

$$\begin{aligned} A(\lambda M + \mu N) &= \lambda AM + \mu AN \\ &= \lambda MA + \mu NA \qquad \begin{cases} M \in F, \text{ donc } AM = MA, \\ N \in F \text{ donc } AN = NA. \end{cases} \\ &= (\lambda M + \mu N)A \end{aligned}$$

Par conséquent : $\lambda M + \mu N \in F$.

Conclusion, F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (donc F est un espace vectoriel réel).

Attention
Être dans F c'est deux choses : être une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et commuter avec A

Exemple 13 :

Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0\}$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

— Par définition : $F \subset \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel.

— La fonction nulle appartient à F : F est non vide.

— Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in F$. Montrons que $\lambda f + \mu g \in F$.

— On a déjà $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel, donc $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

— Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} (\lambda f+\mu g)''(x) - 3(\lambda f + \mu g)'(x) + 2(\lambda f + \mu g)(x) \\ &= (\lambda f'' + \mu g'')(x) - 3(\lambda f' + \mu g')(x) + 2(\lambda f + \mu g)(x) \\ &= \lambda f''(x) + \mu g''(x) - 3\lambda f'(x) - 3\mu g'(x) + 2\lambda f(x) + 2\mu g(x), \\ &= \lambda(f''(x) - 3f'(x) + 2f(x)) + \mu(g''(x) - 3g'(x) + 2g(x)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\lambda f + \mu g \in F$.

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (donc F est un espace vectoriel réel).

Exemples 14 :

Attention
$F \cup G$ n'est un sev que si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

E1 • L'ensemble $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[x] / \mathrm{P}(0) = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$ car il ne contient pas la fonction polynomiale nulle.

E2 • Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{(0,0)\}, \mathbb{R}^2$ ainsi que les droites passant par $(0,0)$.

Exemple 15 :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel réel E.

Montrons que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ est un sous-espace vectoriel de E.

— Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{G} \subset \mathrm{E}$. Donc $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} \subset \mathrm{E}$.

— Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a $0_\mathrm{E} \in \mathrm{F}$ et $0_\mathrm{E} \in \mathrm{G}$. Ainsi $0_\mathrm{E} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$: $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ est non vide.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$. Montrons que $\lambda x + \mu y \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$.

— On a déjà $x, y \in \mathrm{E}$ et E est un espace vectoriel, donc $\lambda x + \mu y \in \mathrm{E}$.

— De la même façon, $\lambda x + \mu y \in \mathrm{F}$ et $\lambda x + \mu y \in \mathrm{G}$.
Par conséquent, $\lambda x + \mu y \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$.

Conclusion : $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ est un sous-espace vectoriel de E.

II.2 – Sous-espaces vectoriels engendrés

Voyons un cas particulier de sous-espace vectoriel…

Définition 3 – Combinaison linéaire :

Soit $x \in \mathrm{E}$.

On dit que x est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ lorsqu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

Exemples 16 :

E1 • Pour touts réels a et b, la matrice colonne $v = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a+b \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de la famille d'éléments $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

E2 • Le vecteur $\mathrm{P} = 3 \cdot \mathbb{1} + (-2) \cdot \mathrm{X} + \mathrm{X}^2 + 6 \cdot \mathrm{X}^4 = 3 - 2\mathrm{X} + \mathrm{X}^2 + 6\mathrm{X}^4$ est une combinaison linéaire de la famille d'éléments $(\mathbb{1} : x \longmapsto 1, \mathrm{X} : x \longmapsto x, \mathrm{X}^2 : x \longmapsto x^2, \mathrm{X}^4 : x \longmapsto x^4)$ de $\mathbb{R}_4[x]$.

Exemple 17 :

Soient $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

E1 • Montrons que $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de X et Y.

E2 • Montrons que $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire de X et Y.

E3 • L'ensemble des combinaisons linéaires de X et Y est : $\left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ b \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

E1 • Assez facilement, $\mathrm{U} = 2\mathrm{Y} - 5\mathrm{X}$ donc U est combinaison linéaire de X et Y.

E2 • Supposons que V le soit *i.e.* qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{V} = a\mathrm{X} + b\mathrm{Y}$.
On aurait alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{V} = a\mathrm{X} + b\mathrm{Y} &\iff \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a + b = 1 \\ b = 2 \\ b = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système ne possède aucune solution donc il n'existe pas de tels a et b.
Conclusion, V n'est pas combinaison linéaire de X et Y.

Théorème 3 :

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve : Notons F l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$. Autrement dit :

$$\mathrm{F} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

— Soit $x \in \mathrm{F}$. Il existe, par définition, des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$.

Puisque $e_1, \dots, e_n \in \mathrm{E}$ et que E est un espace vectoriel : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \in \mathrm{E}$.

Autrement dit, $x \in \mathrm{E}$ et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.

— $\overrightarrow{0_{\mathrm{E}}} = \sum_{k=1}^{n} 0 \times e_k$ donc $\overrightarrow{0_{\mathrm{E}}} \in \mathrm{F}$ et F est non vide.

— Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathrm{F}$. Montrons que $ax + by \in \mathrm{F}$.

Puisque $x \in \mathrm{F}$, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. De même, comme $y \in \mathrm{F}$, il existe des réels $\mu_1, \dots, \mu_n$ tels que $y = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k$. Ainsi :

$$\begin{aligned} ax + by &= a \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k + b \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a\lambda_k + b\mu_k) e_k \end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $a\lambda_k + b\mu_k \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $ax + by$ est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \dots, e_n$. Autrement dit,

$$ax + by \in \mathrm{F}.$$

Conclusion, F est un sous-espace vectoriel de E. ☑

Définition 4 – Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs :

L'espace vectoriel des combinaisons linéaires des vecteurs e_1, e_2, …, e_n est appelé sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, et noté

$$\text{Vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)\,.$$

À retenir
C'est le plus petit espace vectoriel, au sens de l'inclusion, contenant les vecteurs e_1, e_2, …, e_n

Cas particulier : Le sous-espace vectoriel engendré par un unique vecteur est l'ensemble de ses multiples :

$$\text{Vect}\,(e) = \{\lambda \cdot e,\ \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

Exemples 18 :

E1 • On convient que $\text{Vect}\,(\varnothing) = \{0\}$.

E2 • Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $\text{Vect}\,(\vec{u})$ est une droite vectorielle.

E3 • Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace, alors $\text{Vect}\,(\vec{u}\,;\vec{v})$ est un plan vectoriel.

E4 • Dans $\mathcal{F}\,(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel engendré par $\mathrm{X} = \{e_n : x \longmapsto x^n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ est l'espace des fonctions polynomiales.

Méthode 2 :

Pour démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E, on pourra tenter de l'écrire comme le sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs de E.

Exemple 19 :

Méthode
Écrire un ensemble comme un sev engendré équivaut à expliciter cet ensemble. S'il est déjà donné de façon explicite, il n'y a plus grand chose à faire...

Considérons $\mathrm{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a & a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \mathrm{F} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a & a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Puisque $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 4 :

Idée
L'intérêt de ces propriétés est de pouvoir « réduire » la famille de vecteurs qui engendre Vect $(\cdots)$.

Soient $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ des vecteurs de E.

P1 • Si e_{n+1} est une combinaison linéaire de e_1, e_2, …, e_n, alors $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_{n+1}) = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$.
En particulier : $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n, 0_\mathrm{E}) = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

P2 • $\forall\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{Vect}\,(\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_2, \dots, \alpha_n e_n) = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

P3 • $\forall\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n) = \mathrm{Vect}\left(e_1, e_2, \dots, e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i \right)$.

Preuve : Pas très difficiles… laissées au lecteur. ☑

Exemple 20 :

Idée

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\left\{\begin{pmatrix}3x+2y\\x+2y+z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})/(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{x\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}/(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$$
$$=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$
$$=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$
$$=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Il semble maintenant que l'on ne puisse plus simplifier la famille obtenue… C'est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

III. Bases et dimension

III.1 – Familles libres, génératrices, bases

Définition 5 :

D1 • On dit que la famille $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une famille génératrice de E lorsque

$$\forall\, x\in\text{E},\ \exists\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n\,/\,x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k.$$

Autrement dit, $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une famille génératrice de E lorsque

$$\text{E}=\text{Vect}\,(e_1,e_2,\dots,e_n)\,.$$

D2 • On dit que la famille $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une famille libre de E lorsque :
$\forall\,(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\dots+\lambda_ne_n=0_\text{E}\quad\Longrightarrow\quad(\forall\,i\in[\![1\,;n]\!]\,,\lambda_i=0)\,.$$

Autrement dit, $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est *libre* lorsque la seule combinaison linéaire donnant 0_E est la combinaison linéaire triviale.
Si la famille $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est libre, on dit que les vecteurs $e_1,e_2,\dots,e_n$ sont *linéairement indépendants*.

Idée
Une famille de vecteurs est liée s'il existe une combinaison linéaire nulle avec des scalaires non tous nuls.

D3 • On dit que la famille $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est *liée* lorsque elle n'est pas libre.

D4 • On dit que la famille $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une *base* de E lorsque

$$\forall\, x\in\text{E},\ \exists!\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n\,/\,x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k.$$

Commençons par donner (sans justifier) quelques bases usuelles :

À retenir
Toutes les bases données sont les *bases canoniques* des EV mentionnés. Ce sont les bases naturelles dans lesquelles on travaille.

Attention
On dit UNE base et non La base.

Idée
Plus généralement, la famille des matrices $\mathrm{E}_{i,j}$ dont le seul coefficient non nul égal à 1 est situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne, forme une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

À retenir
Deux vecteurs sont libres ou linéairement indépendants lorsqu'ils sont non *colinéaires*.

Exemples 21 – Fondamental :

E1 • La famille $((1,0),(0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

E2 • La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

E3 • La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

E4 • La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

E5 • La famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

E6 • La famille $(x\longmapsto 1, x\longmapsto x, x\longmapsto x^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

E7 • La famille $(x\longmapsto 1, x\longmapsto x, \dots, x\longmapsto x^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Exemple 22 :

Montrons que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Soient $a,b\in\mathbb{R}$. Supposons $a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=0_{2,1}$.

Alors,

$$a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=0_{2,1}\iff\begin{cases}a-b=0\\2a+b=0\end{cases}$$
$$\underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\iff}\begin{cases}a-b=0\\3b=0\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$$

Donc, $a=b=0$.

Conclusion, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

À retenir
Pour montrer qu'une famille est liée, il suffit d'écrire un de ses vecteur en fonction des autres.

Exemple 23 :

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$ est-elle une famille libre de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$?

En remarquant que $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 0_{2,1},$$

sans que les scalaires devant les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ soient tous nuls.

Conclusion, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille liée de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

À retenir
Un famille de matrices colonnes dont les coefficients sont échelonnés est toujours libre.

Exemple 24 :

Montrons que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Supposons qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0_{3,1}$. Alors,

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0_{3,1} \iff \begin{cases} a & = 0 \\ a+b & = 0 \\ a+b+c & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc, $a = b = c = 0$. Conclusion, le seul triplet de scalaires $(a\,;b\,;c)$ rendant cette combinaison linéaire nulle étant $(0\,;0\,;0)$, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exemple 25 :

Notons $f_1 : x \longmapsto 1$, $f_2 : x \longmapsto 1+x$ et $f_3 : x \longmapsto 1+x+x^2$.

Montrons que (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de $\mathbb{R}_2[x]$.

Attention
Il s'agit d'une égalité de fonctions !

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0_{\mathbb{R}_2[x]}$ Autrement dit,

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}, 1 + a(1+x) + b\left(1 + x + x^2\right) &= 0 \\ a + b + c + (b+c)x + cx^2 &= 0 \\ (a+b+c)e_0 + (b+c)e_1 + ce_2 &= 0, \end{aligned}$$

où $e_0 : x \longmapsto 1$, $e_1 : x \longmapsto x$ et $e_2 : x \longmapsto x^2$.
Or, (e_0, e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}_2[x]$ (c'est même la base canonique). Elle est, en particulier, libre. Par conséquent,

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

D'où immédiatement, $a = b = c = 0$.
Conclusion, la famille (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de $\mathbb{R}_2[x]$.

À retenir
Une famille de fonctions polynomiales non nulles échelonnées en degré est libre.

Des choses bien utiles :

À retenir :

- Une famille contenant le vecteur nul est liée.
- Une famille contenant deux fois le même vecteur est liée.
- Une famille dont l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des autres est liée.
- Une famille formée d'un seul vecteur est libre si, et seulement si, ce vecteur est non nul.
- Une famille formée uniquement de deux vecteurs est libre si, et seulement si, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
- Une famille de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou de $\mathbb{R}^n$ dont les coefficients sont échelonnés est libre.
- Une famille de fonctions polynomiales échelonnées en degré est libre.
- Une sous-famille d'une famille libre est libre.
- Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Les définitions précédentes impliquent naturellement la propriété suivante, qui sera très utile en pratique :

Théorème 5 :

Une famille de vecteurs de E est une base si, et seulement si, elle est libre et génératrice.

À retenir
- Le caractère « générateur » équivaut à l'existence d'une décomposition en combinaison linéaire.
- Le caractère « libre » équivaut à l'unicité (si existence) d'une décomposition en combinaison linéaire.

Preuve : Procédons par double implication.

$\Longrightarrow$ **:** Supposons que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

- Montrons que $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E.

Soit $x \in \mathrm{E}$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, il existe un unique donc au moins un n-uplet de réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$.

Conclusion, $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E.

— Montrons que $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0_{\mathrm{E}}$.

Or, $\overrightarrow{0_{\mathrm{E}}}$ s'écrit aussi $\overrightarrow{0_{\mathrm{E}}} = \sum_{k=1}^{n} 0 \times e_k$.

Comme la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, la décomposition de $\overrightarrow{0_{\mathrm{E}}}$ est unique.
D'où, $\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]\,, \lambda_k = 0$.
Conclusion, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

$\Longleftarrow$ **:** Supposons que $(e_1, \dots, e_n)$ est libre et génératrice et montrons

$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \exists\,!\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

Soit donc x un vecteur quelconque de E.

— Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$.
L'existence est prouvée.

— Supposons qu'il existe un autre n-uplet $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k$ *i.e.*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k \iff \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \mu_k)\, e_k = \overrightarrow{0_{\mathrm{E}}}.$$

Or, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre dans E.
Donc, $\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_k - \mu_k = 0$.
Autrement dit, $\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_k = \mu_k$ et la décomposition est unique d'où le résultat.

On vient de montrer l'existence et l'unicité de la décomposition de u dans $(e_1, \dots, e_n)$ *i.e.* que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

À retenir

Pour démontrer l'unicité, deux méthodes :

— Par l'absurde : supposer qu'il en existe deux différents et aboutir à une absurdité.

— Supposer l'existence de deux, et montrer qu'ils sont égaux.

En fait, il existe un théorème hors-programme qui affirme que :

— de toute famille génératrice, on peut extraire une sous-famille libre et génératrice.

— toute famille libre peut être complétée en une famille libre et génératrice.

Exemple 26 :

Donnons une base de l'espace vectoriel F étudié dans l' exemple (19) .

On avait obtenu $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$.

Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ est :

— génératrice de F par définition.

— libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires.

Autrement dit, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de F.

Exemple 27 :

Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, AX = 0_{3,1}\}$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminons-en une base.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X \in F &\iff AX = 0_{3,1} \\ &\iff \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x + y + 4z = 0 \\ x \quad + \quad z = 0 \end{cases} \\ &\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -y - \quad z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y \quad = -2z \\ \quad y \quad = -z \\ \quad \quad z = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \quad \quad = -z \\ \quad y \quad = -z \\ \quad \quad z = z \end{cases} \\ &\iff X = z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $F = \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Comme $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

De surcroît, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille de F qui est :

— génératrice de F par définition.

— libre car constituée d'une unique vecteur **non nul**.

Piège

La famille (e) est une famille libre si, et seulement si $e \neq \vec{0}$.
À préciser donc !

Conclusion, la famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de F.

Proposition 6 :

Si $\mathcal{F}_l$ est une famille libre de E et $\mathcal{F}_g$ est une famille génératrice de E, alors

$$\text{card}\,(\mathcal{F}_l) \leqslant \text{card}\,(\mathcal{F}_g)\,.$$

Preuve : **(Résultat admis)**

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une famille libre $\mathcal{F}_l$ et une famille génératrice $\mathcal{F}_g$ de E telles card $(\mathcal{F}_l) >$ card $(\mathcal{F}_g)$.

Notons $n = \text{card}\,(\mathcal{F}_l) > m = \text{card}\,(\mathcal{F}_g)$ ainsi que $\mathcal{F}_l = (e_1, \dots, e_m)$ et $\mathcal{F}_g = (f_1, \dots, f_n)$.

— Puisque $(f_1, \dots, f_n)$ est génératrice de E et que $e_1 \in$ E, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $e_1 = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$.
Au moins un de ces λ_i est non nul, sinon on aurait $e_1 = 0_{\text{E}}$ et la famille $\mathcal{F}_l$ ne serait pas libre.
Quitte à réordonner les vecteurs de $\mathcal{F}_g$, on peut supposer que $\lambda_n \neq 0$.
On obtient alors :

$$f_n = \frac{1}{\lambda_n}\left(\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{n-1} f_{n-1} - e_1\right) \in \text{Vect}\,(f_1, \dots, f_{n-1}, e_1)\,.$$

Par conséquent, E = Vect $(f_1, \dots, f_n)$ = Vect $(f_1, \dots, f_{n-1}, e_1)$: la famille $(f_1, \dots, f_{n-1}, e_1)$ est donc génératrice de E.

— On itère le raisonnement :
De la même façon, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ et μ_1 tels que $e_2 = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{n-1} f_{n-1} + \mu_1 e_1$.
Au moins un des λ_i est non nul, sinon e_2 serait multiple de e_1 et donc la famille $\mathcal{F}_1$ ne serait pas libre.
En procédant comme ci-dessus, on obtient finalement (quitte à réordonner les vecteurs de $(f_1, \dots, f_{n-1})$) que E = Vect $(f_1, \dots, f_{n-2}, e_1, e_2)$ *i.e.* la famille $(f_1, \dots, f_{n-2}, e_1, e_2)$ est génératrice de E.

— On poursuit ainsi et au bout de n étapes de ce raisonnement, on obtient que la famille E = Vect $(e_1, \dots, e_n)$ *i.e.* la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E.
Par conséquent, le vecteur e_{n+1}, qui existe bien car $m > n+1$, s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \dots, e_n$ ce qui contredit la liberté de la famille $(e_1, \dots, e_m)$.

Conclusion, notre hypothèse initiale ne peut être vraie *i.e.* card $(\mathcal{F}_l) \leqslant$ card $(\mathcal{F}_g)$. ☑

III.2 – Dimension d'un espace vectoriel

Rappel
En ECG - Mathématiques appliquées, l'algèbre linéaire se limite au cas des EV de dimension finie.

La proposition (6) justifie la définition ci-dessous :

Définition 6 – EV de dimension finie :

On dit que E est de dimension finie lorsqu'il admet une famille génératrice constituée d'un nombre fini de vecteurs.

Théorème 7 :

Si E admet une base de cardinal fini, alors toutes ses bases sont de cardinal fini et de même cardinal.

Attention
Tout EV de dimension finie possède une infinité de bases.

Preuve : **(Résultat admis)**

Supposons que E est de dimension finie.

— Puisque E est de dimension finie, E possède une famille génératrice de cardinal fini, noté n. Par conséquent, d'après la proposition (6) , toutes les familles libres de E sont de cardinal inférieur ou égal à n. Ce sera donc le cas des bases de E qui sont, en particulier, libres. sont de cardinal fini, car de cardinal inférieur ou égal à n.
Conclusion : toutes les bases de E sont de cardinal fini.

— Considérons maintenant $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
Puisque $\mathcal{B}$ est libre et que $\mathcal{B}'$ est génératrice, toujours d'après la proposition (6) , $\text{card}\,(\mathcal{B}) \leqslant \text{card}\,(\mathcal{B}')$.
Mais, par symétrie, $\mathcal{B}$ est génératrice et $\mathcal{B}'$ est libre, donc, la proposition (6) toujours, $\text{card}\,(\mathcal{B}') \leqslant \text{card}\,(\mathcal{B})$.
Par double inégalité, on obtient donc :

$$\text{card}\,(\mathcal{B}) = \text{card}\,(\mathrm{B}')\,.$$

Conclusion, toutes les bases de E ont même cardinal.

Le théorème (7) nous permet de donner la définition suivante :

Définition 7 :

Si E est de dimension finie, on appelle *dimension de* E, notée $\dim(\mathrm{E})$, le cardinal commun de toutes ses bases.

Exemples 28 :

À retenir
À savoir parfaitement

E1 • $\dim\left(\mathbb{R}^2\right) = 2$, $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$ et $\dim\left(\mathbb{R}^n\right) = n$.

E2 • $\dim\left(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})\right) = 2$ et $\dim\left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right) = n$.

E3 • $\dim\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right) = n^2$ et $\dim\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})\right) = n \times p$.

E4 • $\dim\left(\mathbb{R}_2[x]\right) = 3$ et $\dim\left(\mathbb{R}_n[x]\right) = n+1$.

E5 • $\mathbb{R}[x]$, $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, …sont des espaces vectoriels de dimension infinie.

On a les propriétés suivantes souvent utiles :

Proposition 8 :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F un sous-ensemble de E et $\mathcal{F}$ une famille de E.

P1 • Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$, avec égalité si, et seulement si, $F = E$.

P2 • Si $\mathcal{F}$ est une famille libre de E, alors $\text{card}(\mathcal{F}) \leqslant \dim(E)$.

P3 • Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E, alors $\text{card}(\mathcal{F}) \geqslant \dim(E)$.

Preuve : **(Résultats admis)**

P1 • Posons $n = \dim(E)$.

— Si $F = \{0\}$, $\dim(F) = 0$ et donc $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
Sinon, il existe un vecteur e_1 non nul dans F. Considérons $\mathcal{F}_1 = \{e_1\}$.

— Si $\mathcal{F}_1$ engendre F, alors F est de dimension finie et $\dim(F) = 1$.
Sinon, il existe $e_2 \in F$ tel que $e_2 \notin \text{Vect}(\mathcal{F}_1)$ *i.e.* $\mathcal{F}_2 = \{e_1, e_2\}$ est libre.

On réitère le raisonnement et au bout de p étapes, on obtient $\mathcal{F}_p = \{e_1, e_2, \cdots, e_p\}$ une famille libre, avec $e_1, e_2, \cdots, e_p \in F$.

— Si $\mathcal{F}_p$ engendre F, alors F est de dimension finie et $\dim(F) = p$.

— Sinon, il existe $e_{p+1} \in F$ tel que $e_{p+1} \notin \text{Vect}(\mathcal{F}_p)$ *i.e.* $\mathcal{F}_{p+1} = \{e_1, e_2, \cdots, e_{p+1}\}$ est libre.

— …

Si le procédé ne s'est pas arrêté avant $n+1$, on aura construit une famille libre de $n+1$ éléments dans un espace de dimension n ce qui contredira la proposition (6) . C'est absurde.
Le procédé s'arrête donc avant n *i.e.* F est de dimension finie, et $\dim(F) = p \leqslant n$.
Pour le cas d'égalité, si $F = E$, le résultat est évident.
Malheureusement, la réciproque nécessite le théorème de la base incomplète ou de la base extraite qui n'est pas à notre programme. On l'admettra donc… avec regrets.

P2 • Supposons que $\mathcal{F}$ est une famille libre de E. Considérons $\mathcal{B}$ une base de E.
Puisque $\mathcal{B}$ est génératrice de E, d'après la proposition (6) , $\text{card}(\mathcal{F}) \leqslant \text{card}(\mathcal{B})$.
Or, $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$.
D'où le résultat.

P3 • Supposons que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E. Considérons $\mathcal{B}$ une base de E.
Puisque $\mathcal{B}$ est une famille libre de E, d'après la proposition (6) , $\text{card}(\mathcal{F}) \geqslant \text{card}(\mathcal{B})$.
Or, $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$.
D'où le résultat.

Exemple 29 :

La famille $((1,0,1),(0,1,0))$ de $\mathbb{R}^3$

— est libre,

— n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$,

— n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Et une dernière propriété, très utile en pratique :

À retenir
Une base est une famille libre maximale ou une famille génératrice minimale.

Corollaire 9 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

C1 • Toute famille génératrice de n vecteurs est une base de E.

C2 • Toute famille libre de n vecteurs est une base de E.

Preuve : **(Résultats admis)**

Les implications directes sont immédiates, les implications réciproques ne sont pas accessibles facilement car elles nécessitent le théorème de la base incomplète, vu en Mathématiques Approfondies…sorry again. ☑

Idée
Quand on connaît la dimension de l'espace vectoriel étudié, on met presque toujours en place la seconde méthode !

Méthode 3 :

Pour montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel, trois méthodes sont possibles :

M1 • Montrer qu'elle est libre et génératrice.

M2 • Montrer qu'elle est libre et de cardinal égal à la dimension de l'espace vectoriel en question.

M3 • Montrer qu'elle est génératrice et de cardinal égal à la dimension de l'espace vectoriel en question.

Exemple 30 :

Montrons que la famille $((1,2),(-1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

La famille $((1\,;2)\,,(-1\,;1))$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui est :

— libre car seulement constituée de deux vecteurs **non colinéaires**,

— de cardinal 2, égal à $\dim\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Conclusion : la famille $((1\,;2)\,,(-1\,;1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 31 :

Montrons que la famille $\left(x \longmapsto 1, x \longmapsto 1+x, x \longmapsto 1+x+x^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

La famille $\left(x \longmapsto 1, x \longmapsto 1+x, x \longmapsto 1+x+x^2\right)$ est une famille de $\mathbb{R}_2[x]$ qui est :

— libre car car constituée de fonctions polynomiales échelonnées en degré,

— de cardinal 3, égal à $\dim\left(\mathbb{R}_2[x]\right)$.

Conclusion : La famille $\left(x \longmapsto 1, x \longmapsto 1+x, x \longmapsto 1+x+x^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

III.3 – Coordonnées des vecteurs dans une base

Définition 8 – Coordonnées d'un vecteur dans une base, matrice de coordonnées :

Soient E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_n)$ une base de E et $x \in$ E. Il existe alors un unique n-uplet $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} u_k e_k$.

Attention
La matrice dépend de la base choisie !

D1 • Le n-uplet $(u_1, \dots, u_n)$ est appelé n-uplet de coordonnées de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

D2 • On appelle matrice représentative de x dans la base $\mathcal{B}$ (ou matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$) la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, définie par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Théorème 10 – Isomorphisme de représentation :

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E.

T1 • $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall\, x, y \in \text{E}, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda x + \mu y) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$

T2 • $\forall\, \text{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists\, ! x \in \text{E} \,/\, \text{X} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$

Remarque
Après avoir vu le chapitre sur les applications linéaires, nous pourrons dire que l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \text{E} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ & x & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme de E dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Preuve : Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

T1 • Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $x, y \in$ E.
Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, il existe des uniques n-uplets $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} u_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} v_k e_k$.
On a ainsi :

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= \lambda \sum_{k=1}^{n} u_k e_k + \mu \sum_{k=1}^{n} v_k e_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\lambda u_k + \mu v_k) e_k \end{aligned}$$

Ainsi, par unicité des coordonnées du vecteur $\lambda x + \mu y$ dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda x + \mu y) &= \begin{pmatrix} \lambda u_1 + \mu v_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n + \mu v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y). \end{aligned}$$

Méthode
Si $u_1, \dots, u_n$ sont les coordonnées de x et $v_1, \dots, v_n$ celles de y, alors $\lambda u_1 + \mu u_2, \dots, \lambda u_n + \mu v_n$ sont celles de $\lambda x + \mu y$.

T2 • Soit $\text{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Existence : Il suffit de poser $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$.

Ainsi, $x \in \mathrm{E}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \mathrm{X}$. D'où l'existence.

Unicité : Supposons qu'il existe $x, y \in \mathrm{E}$ tels que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \mathrm{X}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = \mathrm{X}$.

Par conséquent, en notant $(u_1, \dots, u_n)$ et $(v_1, \dots, v_n)$ les n-uplets respectifs des coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \iff \forall\, k \in [\![1\,;n]\!]\,, \quad u_k = v_k$$

$$\implies \sum_{k=1}^{n} u_k e_k = \sum_{k=1}^{n} v_k e_k \iff x = y.$$

D'où l'unicité.

Exemples 32 :

E1 • Notons $x = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$.

— La matrice des coordonnées du vecteur x dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

i.e. $\mathrm{Mat}_{bc}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

En effet, $(1, 2) = 1 \cdot (1, 0) + 2 \cdot (0, 1)$.

— Nous avons vu à exemple (30) que $((1, 2), (-1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Dans cette base que nous noterons $\mathcal{B}$, le vecteur $(1\,;2)$ s'écrit :

$$(1, 2) = 1 \cdot (1, 2) + 0 \cdot (-1, 1).$$

Autrement dit $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

E2 • Notons $\mathcal{B} = (x \longmapsto 1, x \longmapsto 1 + x, x \longmapsto 1 + x + x^2)$. On a vu à l' exemple (31) que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

On sait, d'après le théorème (10) qu'il existe une unique fonction $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[x]$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{P}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Cette fonction est, en fait, la fonction

$$\mathrm{P} : x \longmapsto 1 \cdot 1 - 1 \cdot (1 + x) + 2 \cdot (1 + x + x^2) = 2 + x + x^2.$$

L'unique fonction polynomiale $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[x]$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{P}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est donc

$$\mathrm{P} : x \longmapsto 2 + x + x^2.$$

Remarque

Cette même fonction admet comme matrice de coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ la matrice $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

IV. Rang d'une famille de vecteurs

Définition 9 – Rang d'une famille de vecteurs :

On appelle *rang* de la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, noté $\text{rg}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$, la dimension de $\text{Vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Proposition 11 :

P1 • Si E est de dimension finie p, alors $\text{rg}\,(e_1, e_2, \dots, e_n) \leqslant \min(n, p)$.

P2 • $\text{rg}\,(e_1, \dots, e_n) = n$ si, et seulement si, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

Preuve : Soit E de dimension finie p.

P1 • Notons $\text{F} = \text{Vect}\,(e_1, \dots, e_n)$.

— Comme F est un sous-espace vectoriel de E, d'après la proposition (8) **P1** $\dim(\text{F}) \leqslant \dim(\text{E})$ qui s'écrit encore :

$$\text{rg}\,(e_1, \dots, e_n) \leqslant p.$$

— Ensuite, par définition, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de F. La proposition (8) **P3** donne encore $\text{card}\,(e_1, \dots, e_n) \geqslant \dim(\text{F})$ qui se traduit par :

$$n \geqslant \text{rg}\,(e_1, \dots, e_n).$$

Conclusion : $\text{rg}\,(e_1, \dots, e_n) \leqslant \min(n, p)$.

À retenir

$x \leqslant \min(n, p)$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x \leqslant p \\ \text{et} \\ x \leqslant n \end{cases}$

P2 • Raisonnons par double implication.

$\Longrightarrow$ **:** Supposons que $\text{rg}\,(e_1, \dots, e_n) = n$ *i.e.* $\dim(\text{Vect}\,(e_1, \dots, e_n)) = n$.
Par conséquent, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est :

— génératrice de $\text{Vect}\,(e_1, \dots, e_n)$ par définition,

— de cardinal égal à $\dim(\text{Vect}\,(e_1, \dots, e_n))$.

D'après le corollaire (9), la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est donc une base de $\text{Vect}\,(e_1, \dots, e_n)$.
En particulier, elle est libre.

$\Longleftarrow$ **:** Supposons que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.
Étant aussi génératrice de $\text{Vect}\,(e_1, \dots, e_n)$ par définition, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ en forme une base et ainsi :

$$\text{rg}\,(e_1, \dots, e_n) = \dim(\text{Vect}\,(e_1, \dots, e_n)) = \text{card}\,(e_1, \dots, e_n) = n.$$

Méthode 4 :

Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, on cherche à la réduire jusqu'à la rendre libre.

La proposition (11) **P2** nous assure alors que son cardinal est la valeur cherchée.

Exemple 33 :

Déterminons le rang de la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$.

On a :

$$\text{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \dim\left(\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)\right)$$

On supprime le vecteur nul et le vecteur lié $\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$:

$$= \dim\left(\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right)\right)$$

On supprime les vecteurs combinaisons linéaires des autres comme $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$:

$$= \dim\left(\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\right)$$

Or, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)$ est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

$$= 2.$$

V. Rappels et compléments sur l'inversibilité de matrices

Définition 10 – Matrice inversible :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que la matrice A est inversible lorsqu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$.

Une telle matrice B est appelée inverse de A.

Proposition 12 – Unicité de l'inverse :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A est inversible, alors elle admet une unique matrice inverse que l'on note A^{-1}.

Preuve : Supposons que A est inversible et admette deux inverses B et C. Montrons que $B = C$.

Il suffit de suivre les définitions :

$$\boxed{\mathrm{AB}} = \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n = \boxed{\mathrm{AC}} = \mathrm{CA}$$

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$$

On multiplie à gauche les deux membres par B :

$$\boxed{\mathrm{BA}}\,\mathrm{B} = \boxed{\mathrm{BA}}\,\mathrm{C}$$

Or, $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$

$$\mathrm{B} = \mathrm{C}.$$

D'où l'unicité ☑

Idée
L'inverse de la transposée est la transposée de l'inverse.

Proposition 13 – Inversibilité de la transposée :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La matrice A est inversible si, et seulement si, la matrice ${}^t\mathrm{A}$ est inversible.

Le cas échéant :

$$({}^t\mathrm{A})^{-1} = {}^t(\mathrm{A}^{-1}) \iff \mathrm{A}^{-1} = {}^t({}^t\mathrm{A})^{-1}.$$

Preuve : On procède par double implication et, dans les deux cas, on exhibe un inverse conformément à la définition (10) :

Attention
${}^t(\mathrm{AB}) = {}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A}$.

— Supposons que A est inversible *i.e.* les écritures A^{-1} et ${}^t(\mathrm{A}^{-1})$ sont valides.

$$\begin{aligned} {}^t\mathrm{A}\,{}^t(\mathrm{A}^{-1}) &= {}^t(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}) && \text{(propriété de } {}^t\text{)} \\ &= {}^t\mathrm{I}_n && \text{(définition de } \mathrm{A}^{-1}\text{)} \\ &= \mathrm{I}_n. \end{aligned}$$

De même, ${}^t(\mathrm{A}^{-1})\,{}^t\mathrm{A} = {}^t(\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1}) = {}^t\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n$.

Par conséquent, ${}^t\mathrm{A}$ est inversible d'inverse $({}^t\mathrm{A})^{-1} = {}^t(\mathrm{A}^{-1})$.

— Le raisonnement est identique en supposant ${}^t\mathrm{A}$ inversible. On forme successivement les deux calculs :

$$\mathrm{A}\,{}^t({}^t\mathrm{A})^{-1} = {}^t\left(({}^t\mathrm{A})^{-1}\,{}^t\mathrm{A}\right) = {}^t\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n.$$

Et,

$${}^t({}^t\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A} = {}^t\left({}^t\mathrm{A}\,({}^t\mathrm{A})^{-1}\right) = {}^t\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n.$$

Donc, A est inversible d'inverse $\mathrm{A}^{-1} = {}^t({}^t\mathrm{A})^{-1}$.

☑

Théorème 14 – Caractérisations de l'inversibilité d'une matrice :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

T1 • A est inversible.

T2 • $\exists\, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$.

T3 • $\exists\, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$.

T4 • la famille des colonnes de A est une base de de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

T5 • la famille des lignes de A est une base de $\mathbb{R}^n$.

T6 • pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système linéaire $AX = Y$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, possède une unique solution.

T7 • pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système linéaire $AX = Y$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, possède au moins une solution.

T8 • Le système linéaire $AX = 0_{n,1}$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, admet $0_{n,1}$ comme unique solution.

Preuve : On a déjà de façon immédiate :

Ainsi que ,

$$\boxed{T1} \Longrightarrow \boxed{T2} \quad \text{et} \quad \boxed{T3}$$
$$\boxed{T6} \Longrightarrow \boxed{T7} \quad \text{et} \quad \boxed{T8}$$

Avant d'aller plus loin, remarquons que, en notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

alors :

$$AX = x_1C_1 + \dots + x_nC_n.$$

— $\boxed{T6} \iff \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists ! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \,/\, Y = AX$
$\iff \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists ! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, Y = x_1C_1 + \dots + x_nC_n$
$\iff$ La famille $(C_1, \dots, C_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
$\iff \boxed{T4}$

— $\boxed{T7} \iff \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \,/\, Y = AX$
$\iff \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists\ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, Y = x_1C_1 + \dots + x_nC_n$
$\iff$ La famille $(C_1, \dots, C_n)$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de cardinal n.
$\iff$ D'après le corollaire (9) , c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
$\iff \boxed{T4}$

— $\boxed{T8} \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), (AX = 0_{n,1} \iff X = 0_{n,1})$
$\iff \forall\ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, (x_1C_1 + \dots + x_nC_n = 0_{n,1} \iff x_1 = \dots = x_n = 0)$
$\iff$ La famille $(C_1, \dots, C_n)$ est libre de cardinal n.
$\iff$ D'après le corollaire (9) , c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
$\iff \boxed{T4}$.

— On montre $\boxed{T1} \iff \boxed{T6}$ par double implication.

— Supposons $\boxed{T1}$ *i.e.* que A est inversible.
Soient $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = Y \iff X = A^{-1}Y.$$

Le système $AX = Y$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ possède donc une unique solution et $\boxed{T6}$ est vérifié.

— Réciproquement, supposons $\boxed{T6}$ *i.e.* que pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le système $AX = Y$ admet une unique solution.

L'objectif est de trouver une matrice B telle que $AB = BA = I_n$. On va la construire colonne par colonne :

— D'après **T6**, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, si Y_i désigne la i ème colonne de la matrice I_n, alors le système $AX = Y_i$ possède une unique solution, notée B_i.
En posant B la matrice dont les colonnes sont $B_1, B_2, \dots, B_n$, on a bien $AB = I_n$ par construction.

— Il reste à montrer que $BA = I_n$ *i.e.* que A est bien inversible d'inverse B.
Il est assez clair que $A(BA - I_n) = (AB)A - A = I_nA - A = 0$, donc $BA - I_n$ est solution de l'équation $AX = 0$.
Or, $(0)_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ en est évidemment une autre.
D'après **T6**, ce système ne peut posséder qu'une seule solution par hypothèse .
Donc, $BA - I_n = (0)_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \iff BA = I_n$.

La matrice A est bien inversible et **T1** est vérifié.

À ce stade, par transitivité de $\iff$, nous avons démontré :

T1 $\implies$ **T2** et **T3**
T6 $\implies$ **T7** et **T8**
T1 $\iff$ **T4** $\iff$ **T6** $\iff$ **T7** $\iff$ **T8**

— **T1** $\iff$ ${}^tA$ est inversible
$\iff$ La famille des colonnes de ${}^tA$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car **T1** $\iff$ **T4**.
$\iff$ La famille des lignes de A est une base de $\mathbb{R}^n$
$\iff$ **T5**

— Supposons **T2** et montrons **T7** :
Supposons l'existence d'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$.
Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On a $A(BY) = (AB)Y = Y$, donc BY est solution de l'équation $AX = Y$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
C'est bien le résultat de **T7**.

Comme **T1** $\implies$ **T2** $\implies$ **T7** et **T7** $\implies$ **T1** car équivalent, on vient de montrer que :

T1 $\iff$ **T2** $\iff$ **T7**

T1 $\implies$ **T3**

Sachant que et ,

T1 $\iff$ **T2** $\iff$ **T4** $\iff$ **T5** $\iff$ **T6** $\iff$ **T7** $\iff$ **T8**

il suffit de montrer que **T3** implique l'une quelconque des autres propriétés pour conclure.

— Par exemple, montrons **T3** $\implies$ **T8** :
Supposons l'existence d'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $BA = I_n$.

— On sait déjà que $0_{n,1}$ est solution de $AX = 0_{n,1}$.

— Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0_{n,1}$ *i.e.* une autre solution du système $AX = 0_{n,1}$.
Un petit calcul nous donne $X = I_n X = (BA)X = B(AX) = B \times 0_{n,1} = 0_{n,1}$ *i.e.* $X = 0_{n,1}$.
Le système linéaire $AX = 0_{n,1}$ admet seulement $0_{n,1}$ comme unique solution. c'est **T8**.

On triomphe en écrivant finalement :

T1 $\iff$ **T2** $\iff$ **T3** $\iff$ **T4** $\iff$ **T5** $\iff$ **T6** $\iff$ **T7** $\iff$ **T8**

2 Systèmes et Espaces vectoriels

1. Citer, sans démonstration, deux ensembles usuels d'espaces vectoriels.

   Relire les exemples du cours.

2. Donner un exemple d'espaces qui n'est pas un espace vectoriel. Justifier votre choix.

   $\mathrm{F} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y+z+t = 1\}$ car il ne contient pas le vecteur nul $(0,0,0,0)$.

3. Résoudre le système suivant, donner son ensemble solution $\mathcal{S}$ ainsi que deux triplet solutions possibles.

$$\begin{cases} x+y+\ z=6 \\ 2x-y+3z=9 \\ 3x\quad\ +4z=15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+\ z=6 \\ 2x-y+3z=9 \\ 3x\quad\ +4z=15 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-3L_1}}{\iff} \begin{cases} x+\ y+z=6 \\ -3y+z=-3 \\ -3y+z=-3 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\iff} \begin{cases} x+4y\quad\ =9 \\ -3y+z=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} x=9\ -4y \\ y=\quad\ y \\ z=-3+3y \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathcal{S} = \{(9-4t\,;t\,;-3+3t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.

Les triplets $(9\,;0\,;-3)$ et $(5\,;1\,;0)$ conviennent.

4. Démontrer que F est un espace vectoriel.

$$\mathrm{F} = \left\{\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{AX} = 0_{3,1}\right\},$$

où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

En trois étapes comme dans le cours :

a. Par définition, $\mathrm{F} \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel.

b. $\mathrm{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$ donc le vecteur nul appartient à F qui est non vide.

c. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{F}$.
   On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(\lambda\mathrm{X}+\mu\mathrm{Y}) &= \lambda\mathrm{AX}+\mu\mathrm{AY} && \text{(d'après les lois du produit matriciel)} \\ &= 0_{3,1}+0_{3,1} && \text{car } \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{F} \\ &= 0_{3,1}. \end{aligned}$$

   Donc $\lambda\mathrm{X}+\mu\mathrm{Y} \in \mathrm{F}$ qui est stable par combinaisons linéaires.
   L'ensemble F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. C'est également un espace vectoriel.

5. Compléter la procédure f suivante sur Python qui définit la fonction :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x < 10, \\ 10 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Éditeur

```
def f(x) :
    if ... :
        return ...
    else :
        return ...
```

2 Systèmes et Espaces vectoriels

1. Citer, sans démonstration, deux ensembles usuels d'espaces vectoriels.

   Relire les exemples du cours.

2. Donner un exemple d'espaces qui n'est pas un espace vectoriel. Justifier votre choix.

   $\mathrm{F} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y+z+t = 1\}$ car il ne contient pas le vecteur nul $(0,0,0,0)$.

3. Résoudre le système suivant et donner son ensemble solution $\mathcal{S}$:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 2y - z = 3 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 2y - z = 3 \\ 3x + y = 7 \end{cases} \underset{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1}{\iff} \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ 3x + y = 7 \\ 3x + y = 7 \end{cases} \underset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}{\iff} \begin{cases} 5x + z = 11 \\ 3x + y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = 7 - 3x \\ z = 11 - 5x \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

   Donc $\mathcal{S} = \{(t\,;7-3t\,;11-5t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}\right)$.

   Les triplets $(0\,;7\,;11)$ et $(2\,;1\,;1)$ conviennent.

4. Démontrer que F est un espace vectoriel.

$$\mathrm{F} = \{\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{AX} = \mathrm{X}\},$$

   où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   En trois étapes comme dans le cours :

   a. Par définition, $\mathrm{F} \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel.

   b. $\mathrm{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc le vecteur nul appartient à F qui est non vide.

   c. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{F}$.
      On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(\lambda \mathrm{X} + \mu \mathrm{Y}) &= \lambda \mathrm{AX} + \mu \mathrm{AY} && \text{(d'après les lois du produit matriciel)} \\ &= \lambda \mathrm{X} + \mu \mathrm{Y} && \text{car } \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{F} \\ &= (\lambda \mathrm{X} + \mu \mathrm{Y}). \end{aligned}$$

      Donc $\lambda \mathrm{X} + \mu \mathrm{Y} \in \mathrm{F}$ qui est stable par combinaisons linéaires.
      L'ensemble F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. C'est également un espace vectoriel.

5. Compléter la procédure f suivante sur Python qui définit la fonction :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Éditeur

```
1 def f(x) :
2     if ... :
3         return ...
4     else :
5         return ...
```

Remédiation 13 — Inverse d'une matrice -- À l'aide d'un polynôme annulateur

Exercice II.1 [Correction p. 251]

On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A+I)^2$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Correction de l'exercice II.1 : [Énoncé]

Méthode
Il faut juste faire ce qu'on nous demande. Calculer…

1. Tout d'abord :

$$A+I = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

À retenir
On dit que $(X+1)^2$ est un polynôme annulateur de A.

Méthode
Montrer qu'une matrice A est inversible, c'est trouver une matrice B telle que $AB = I$.

2. On développe le résultat de la question précédente :

$$(A+I)^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \iff A^2+2A+I = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$ car les matrices A et I commutent.

On en déduit :

$A^2+2A+I = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$	On se focalise sur I
$A^2+2A = -I$	
$-A^2-2A = I$	On s'en rapproche
$A(-A-2I) = I$	On cherche uner matrice B en facteur donc on factorise

On en déduit que la matrice A est inversible, d'inverse $-A-2I$) :

$$A^{-1} = -A-2I = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -6 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Remarque : On peut vérifier vite fait sur un ou deux coefficients que l'on a bien

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -6 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remédiation 14 — Montrer qu'un espace est un SEV -- À l'aide d'un Vect

Exercice II.1 [Correction p. 252]

On considère $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et on note $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.

Correction de l'exercice II.1 : [Énoncé]

Méthode
Par définition, un Vect est un espace vectoriel donc il suffit de montrer que F est un Vect d'une certaine famille

Idée
Il suffit juste de traduire la définition de F et de résoudre un système linéaire. Pas plus !

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On traduit ce que veut dire $X \in F$:

$$X \in F \iff AX = -X \qquad \text{(on traduit ce que veut dire } X \in F\text{)}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -5x + 2y - 2z = -x \\ -2x \quad - \quad z = -y \\ 6x - 3y + 2z = -z \end{cases} \qquad \text{(on transforme en système linéaire)}$$

$$\iff \begin{cases} -4x + 2y - 2z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ 6x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \qquad \text{(on met toutes les inconnues du même côté)}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1}{\iff} \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ 6x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \qquad \text{(on prépare le pivot)}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\iff} \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \text{(on applique l'algorithme de Gauss)}$$

Il ne reste plus qu'une équation pour trois inconnues. Le système admet donc 2 inconnues secondaires x et z par exemple.

$$\iff \begin{cases} x = x \\ y = 2x + z \\ z = z \end{cases} \qquad \text{(on exprime l'inconnue principale } y \text{ en fonction des inconnues secondaires)}$$

$$\iff \mathrm{X} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(on revient à l'écriture matricielle)}$$

$$\iff \mathrm{X} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \quad \text{(on traduit les combinaisons linéaires en terme de Vect .)}$$

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (par définition d'un Vect).

Commentaire
Reste à trouve la dimension de F. Pour cela, on en cherche une base.

Génératrice : Par définition du Vect , la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est déjà génératrice de F. Reste à montrer qu'elle est libre.

Liberté : Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dont les coordonnées ne sont pas proportionnelles ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre de F.

Base : Libre et génératrice de F, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme donc une base de F.

Le sous-espace F admet une base de deux éléments donc F est de dimension 2.

Remédiation 15 — Déterminer des bases et conséquences

Exercice II.1 – (Libre et génératrice) [Correction p. 254]

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois à coefficients réels. On pose :

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et on considère $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ engendré par les matrices I, J et K.

Montrer que $(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K})$ est une base de $\mathcal{E}$, en déduire la dimension de $\mathcal{E}$.

Exercice II.2 – (Quand on connait la dimension) [Correction p. 255]

On pose On pose

$$\mathrm{U}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{U}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice II.1 : [Énoncé]

À retenir
Une base est une famille libre et génératrice.

— Par définition, $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K})$ donc la famille $(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K})$ est déjà génératrice de $\mathcal{E}$.

— Considérons une combinaison linéaire nulle de I , J et K :

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$aI + bJ + cK = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

$$\iff a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a+c & b & b \\ b & a & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a + c = 0 \\ b = 0 \\ b = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

À retenir
Deux matrices sont égales si, et seulement si leurs coefficients sont égaux.

La seule solution possible est donc le triplet nul, la famille $(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K})$ est donc libre.

Attention
Le fait que $\mathcal{E}$ soit engendré par 3 vecteurs ne suffit pas à dire $\dim(\mathcal{E}) = 3$. Ils doivent être **libres** aussi.

Libre et génératrice, la famille $(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K})$ forme donc une base de $\mathcal{E}$ qui est donc de dimension 3.

Correction de l'exercice II.2 : [Énoncé]

Méthode
On sait que
$$\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$$
donc il suffit de montrer que la famille de 3 vecteurs $(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3)$ est libre **OU** génératrice.

Considérons une combinaison linéaire nulle de U_1, U_2 et U_3.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a\mathrm{U}_1 + b\mathrm{U}_2 + c\mathrm{U}_3 = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff a\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a\sqrt{2} + c\sqrt{2} = 0 \\ a + b - c = 0 \\ a - b - c = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{\iff} \begin{cases} a + c = 0 \\ 2b = 0 \\ a - b - c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + c = 0 \\ b = 0 \\ a - c = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} \begin{cases} a + c = 0 \\ b = 0 \\ -2c = 0 \end{cases} \begin{cases} a + c = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

La seule solution possible est donc le triplet nul, la famille $(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3)$ est donc libre dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

De même cardinal que la dimension de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, elle en forme donc une base.

Remédiation 16 — Inverse d'une matrice -- À l'aide des opérations élémentaires

Exercice II.1 [Correction p. 256]

On note $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

Correction de l'exercice II.1 : [Énoncé]

Méthode 1 :

1. On effectue les mêmes opérations élémentaires sur les lignes de P et de I en même temps jusqu'à transformer P en I.
2. Si on n'y arrive, P est inversible et P^{-1} est la matrice obtenue à partir de I après toutes les opérations.
3. Sinon, P n'est pas inversible.

On considère la matrice dite « augmentée »

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

À retenir
L'algorithme de Gauss revient à échelonner la matrice.
Celui de Jordan à la réduire.

On applique l'algorithme de Gauss-Jordan

Pour ne pas se tromper, il y a un ordre à respecter dans l'élimination :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \overset{(4)}{0} & \overset{(3)}{1} & 1 & 0 & 0 \\ \overset{(1)}{0} & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & \overset{(2)}{1} & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

(1). On effectue l'opération $\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + 2\mathrm{L}_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

(2). On effectue l'opération $\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Idée
On sait ici que P est inversible.

La matrice réduite obtenue est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. À ce stade, on sait déjà que P est inversible.
On continue pour trouver P^{-1}.

(3). On effectue les opérations $\begin{cases} \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3 \end{cases}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

(4). Rien à faire ici.

Finalement, $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : Formellement, effectuer une opération élémentaire sur les lignes revient à multiplier à gauche par une certaine matrice inversible dite justement d'opérations élémentaires.

Après toutes les étapes, on a donc multiplié à gauche par un produit de matrices inversibles soit une matrice inversible B telle que $\mathrm{BP} = \mathrm{I}$. C'est bien la définition de l'inversibilité de P.

Ce qui est encore plus fort c'est qu'on peut écrire $\mathrm{BI} = \mathrm{B}$ *i.e.* effectuer les mêmes opérations élémentaires sur la mtrice I la transforme en B soit l'inverse de P. Magique !

Remédiation 17 — Puissance d'une matrice -- À l'aide d'une dia ou trigonalisation

Exercice II.1 [Correction p. 258]

On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Démontrer $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P^{-1}A^nP = T^n$ et en déduire $\forall\, n \in \mathbb{N}$, A^n.

Correction de l'exercice II.1 : [Énoncé]

1. Tout d'abord,

$$AP = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Puis

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = T.$$

On a bien $P^{-1}AP = T$.

Remarque — Un simple calcul matriciel !

Idée — Cette question va servir pour l'initialisation de la récurrence qui arrive.

2. Démontrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: $P^{-1}A^nP = T^n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Attention — $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ne doit pas se trouver dans la définition de $\mathcal{P}(n)$!

Initialisation : D'une part, $P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I$.
D'autre part : $T^0 = I$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $P^{-1}A^{n+1}P = T^{n+1}$).

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T \times T^n && \text{(définition de la puissance)} \\ &= P^{-1}AP \times P^{-1}A^nP && \text{d'après la question précédente et } \mathcal{P}(n) \\ &= P^{-1}A\left(PP^{-1}\right)A^nP && \text{(par associativité du produit matriciel)} \\ &= P^{-1}AIA^nP && \text{(définition de l'inverse)} \\ &= P^{-1}A^{n+1}P && \text{(neutralité de I pour le produit matriciel)} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Méthode — On vient de prouver l'hérédité de $\mathcal{P}$.

Synthèse : La propriété $\mathcal{P}$ est initialisée pour $n = 0$ et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ P^{-1}A^nP = T^n.$$

Attention — Ne pas oublier la synthèse !

En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, on obtient finalement :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}.$$

Remédiation 18 — Inverse d'une matrice -- À l'aide d'un système

Exercice II.1 [Correction p. 259]

On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Soient $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Résoudre l'équation $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ d'inconnue X et en déduire que A est inversible.

Idée
Si l'on trouve une unique solution, cela ne peut être que $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$ *i.e.* que A est inversible.

Correction de l'exercice II.1 : [Énoncé]

On résout le système par opérations élémentaires sur les lignes :

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B} \iff \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -5x + 2y - 2z = a \\ -2x \quad - \quad z = b \\ 6x - 3y + 2z = c \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}}{\iff} \begin{cases} -x + 2y \quad = a - 2b \\ -2x \quad - z = b \\ 2x - 3y \quad = 2b + c \end{cases}$$ On s'attaque aux z.

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}}{\iff} \begin{cases} -x + 2y \quad = a - 2b \\ -4y - z = -2a + 5b \\ y \quad = 2a - 2b + c \end{cases}$$ On s'attaque aux x.

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3}}{\iff} \begin{cases} -x \quad = -3a + 2b - 2c \\ -z = 6a - 3b + 4c \\ y \quad = 2a - 2b + c \end{cases}$$ On s'attaque aux y.

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftrightarrow -L_3}}{\iff} \begin{cases} x = 3a - 2b + 2c \\ y = 2a - 2b + c \\ z = 6a - 5b + 4c. \end{cases}$$ On arrange.

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$ On réécrit sous forme matricielle.

Conclusion, A est inversible, d'inverse $\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

Remédiation 19 — Puissance d'une matrice -- À l'aide de la formule du binôme

Exercice II.1 [Correction p. 260]

On note $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Exhiber une matrice $\mathrm{N} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $\mathrm{T} = -\mathrm{I} + \mathrm{N}$.
2. Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Correction de l'exercice II.1 : [Énoncé]

1. D'après les propriétés de la somme matricielle, on a :

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{I} + \mathrm{N},$$

où $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Remarque — Un simple calcul matriciel !

2. Par produit matriciel, on trouve :

$$\mathrm{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On conclut :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mathrm{N}^k = \begin{cases} \mathrm{I} & \text{si0 } k = 0 \\ \mathrm{N} & \text{si } k = 1 \\ 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} & \text{si } k \geqslant 2. \end{cases}$$

Remarque — Un simple calcul matriciel encore !

À retenir — On dit que la matrice N est nilpotente (d'indice 2).

3.

Rappel – Binôme de Newton matriciel :

Soient A et B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, si $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ alors :

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \mathrm{A}^k \times \mathrm{B}^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \mathrm{A}^{p-k} \times \mathrm{B}^k$$

et

$$(\mathrm{A}-\mathrm{B})^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{n-k} \binom{p}{k} \mathrm{A}^k \times \mathrm{B}^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \mathrm{A}^{p-k} \times \mathrm{B}^k$$

(Binôme de Newton).

Attention — Ne pas oublier de préciser la commutativité !

D'après la question précédente, on a $\mathrm{T} = \mathrm{N} - \mathrm{I}$.

Les matrices I) et N commutent car la matrice identité commute avec toutes les matrices carrées du même ordre. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton.

Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}^n &= (\mathrm{N}-\mathrm{I})^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \mathrm{N}^k \mathrm{I}^{n-k} && \text{(on préfère la formule où les puissance de N augmentent)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \mathrm{N}^k && \text{(propriétés de I)} \\
&= \sum_{k=0}^{\color{red}{1}} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \mathrm{N}^k && \text{(à partir de } k=2\text{, les puissances de N sont nulles)} \\
&= \binom{n}{0} (-1)^n \mathrm{N}^0 + \binom{n}{1} (-1)^{n-1} \mathrm{N}^1 && \text{(on décompose la somme)} \\
&= (-1)^n \mathrm{I} + n(-1)^{n-1} \mathrm{N} && \left(\binom{n}{0} = 1 \text{ et } \binom{n}{1} = n\right) \\
&= (-1)^n \Big(\mathrm{I} - n\mathrm{N}\Big) && \text{(on factorise par } (-1)^n\text{)}
\end{aligned}$$

Comme $(-1)^0(\mathrm{I} - 0 \cdot \mathrm{N}) = \mathrm{I}$ et $\mathrm{T}^0 = \mathrm{I}$, la formule reste vraie pour $n = 0$ donc

$$\begin{aligned}
\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{T}^n &= (-1)^n(\mathrm{I} - n\mathrm{N}) \\
&= (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

TD 3 Espaces vectoriels

VI. Sous-espaces vectoriels

Exercice II.1 – (Sous-espaces vectoriels) [Correction p. 270]

Parmi les sous-ensembles E_i de E ci-dessous dire lesquels sont des sous-espaces vectoriels.

1. $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$.
   a. $\mathrm{E}_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathrm{E} \,/\, x = 1\}$.
   b. $\mathrm{E}_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathrm{E} \,/\, x = 0\}$.
   c. $\mathrm{E}_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathrm{E} \,/\, y = z = t = 0\}$.
   d. $\mathrm{E}_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathrm{E} \,/\, x \neq y\}$.
2. E espace vectoriel de dimension finie tel que $\mathrm{E} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   a. $\mathrm{E}_1 = \{f \in \mathrm{E} \,/\, f \text{ dérivable }\}$.
   b. $\mathrm{E}_2 = \{f \in \mathrm{E} \,/\, f \text{ continue }\}$.
   c. $\mathrm{E}_3 = \{f \in \mathrm{E} \,/\, f \text{ discontinue }\}$.
   d. $\mathrm{E}_4 = \{f \in \mathrm{E} \,/\, f \text{ croissante }\}$.
3. $\mathrm{E} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   a. $\mathrm{E}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{E} \,/\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
   b. $\mathrm{E}_2 = \{\mathrm{A} \in \mathrm{E} \,/\, \mathrm{AB} = \mathrm{BA},\ \mathrm{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\}$.
   c. $\mathrm{E}_3 = \{\mathrm{A} \in \mathrm{E} \,/\, \mathrm{A}^2 = \mathrm{A}\}$.
4. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_5[x]$.
   a. $\mathrm{E}_1 = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \,/\, \mathrm{P}(0) = 0\}$.
   b. $\mathrm{E}_2 = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \,/\, \deg(\mathrm{P}) \geqslant 3\}$.

Exercice II.2 – (Pas des sous-espaces vectoriels !)

Dans chaque cas, F n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Justifier pourquoi.

1. $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{F} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y = 1\}$
2. $\mathrm{E} = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \,/\, y = x^2 \right\}$
3. $\mathrm{E} = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{F} = \left\{ \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{AX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
4. $\mathrm{E} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{F} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{M}^2 = 0_2\}$

Exercice II.3 – (L'ensemble des matrices symétriques) [Correction p. 271]

Soit $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices symétriques sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Rappeler la définition d'une matrice symétrique et donner la forme générale des éléments de $\mathcal{S}_2$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice II.4 – (Combinaisons linéaires, colinéarité) [Correction p. 272]

1. Dans $\mathbb{R}^2$,
   a. $(3,7)$ est-il combinaison linéaire de $(1,1)$ et $(2,3)$?
   b. $(1,1)$ est-il combinaison linéaire de $(2,1)$ et $(3,1)$?
   c. $(1,1)$ est-il combinaison linéaire de $(2,1)$, $(3,1)$ et $(2,4)$?
2. Dans $\mathbb{R}^3$, $(2,4,2)$ est-il combinaison linéaire de $(2,1,2)$, $(1,1,2)$ et $(0,1,1)$?
3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?
4. Dans $\mathbb{R}_3[x]$, donner deux vecteurs colinéaires ?
5. Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donner deux vecteurs colinéaires ?
6. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les fonctions $x \longmapsto e^{2x}$ et $x \longmapsto e^x$ sont-elles colinéaires ? Les fonctions $x \longmapsto 3^x$ et $x \longmapsto 3^{x+1}$ sont-elles colinéaires ?
7. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donner deux vecteurs colinéaires.

Exercice II.5 – (Familles libres, familles génératrices, bases) [Correction p. 274]

Parmi les familles de vecteurs de E ci-dessous dire lesquelles sont libres, génératrices ou forment une base.

1. Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$.
   a. $\mathrm{E}_1 = ((1,0,1),(-1,1,2),(-2,1,2))$.
   b. $\mathrm{E}_2 = ((1,0,1),(-1,1,2),(0,1,3))$.
   c. $\mathrm{E}_3 = ((1,0,1),(2,0,3))$.
   d. $\mathrm{E}_4 = ((1,0,1),(2,0,3),(-1,1,1),(0,0,1))$.
2. $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[x]$.
   a. $\mathrm{E}_1 = (\mathbb{1}, \mathrm{X} - 2\mathbb{1}, (\mathrm{X} - 2\mathbb{1})^2)$.
   b. $\mathrm{E}_2 = (3\mathbb{1}, \mathrm{X}^2, -\mathrm{X}^3, \mathrm{X})$.
3. E est un espace vectoriel de dimension 5 avec $\mathrm{E} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que E_1 et E_2 sont des familles d'éléments de E et $\mathrm{E}_1 = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ où, $\forall\, i \in [\![1\,;4]\!]$, f_i est la fonction définie par $f_i(x) = e^{ix}$.
4. $\mathrm{E} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   a. $\mathrm{E}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
   b. $\mathrm{E}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

c. $\mathrm{E}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

5. $\mathrm{E} = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{E}_1 = (\mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$ où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice II.6 – (Sous-espaces vectoriels engendrés, base et dimension) [Correction p. 279]

1. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ puis donner leur dimension :
   a. $\mathrm{A} = \text{Vect}\,((1,2),(-3,-6))$.
   b. $\mathrm{B} = \text{Vect}\,((1,2),(3,4),(5,6))$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{A} = \text{Vect}\,((1,3,-3),(4,2,-3),(-1,7,6))$ sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Quelle est alors la dimension de A ?
3. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ puis donner leur dimension :
   a. $\mathrm{A} = \text{Vect}\,((1,2,-3,4),(2,4,-5,1),(-2,-1,2,0),(3,0,-1,-4))$.
   b. $\mathrm{B} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x = 2y - z, t = x + y + z\}$.
4. Déterminer une base du sous-espace vectoriel Vect $(\mathrm{X} - \mathbb{1}, (\mathrm{X} - \mathbb{1})^2)$ de $\mathbb{R}_3[x]$ puis donner sa dimension.
5. On suppose que la famille $\left(\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ appartienne à un espace vectoriel de dimension finie E, $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   Déterminer une base du sous-espace vectoriel Vect $\left(\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ de E puis donner sa dimension.

Exercice II.7

Dans chaque cas, démontrer que F est un espace vectoriel puis en déterminer une base et préciser sa dimension.

1. $\mathrm{F} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\right\}$
2. $\mathrm{F} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$
3. $\mathrm{F} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = y\}$
4. $\mathrm{F} = \{\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{AX} = 0_{3,1}\}$, où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
5. $\mathrm{F} = \{\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{AX} = \mathrm{X}\}$, où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
6. $\mathrm{F} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x + y + z + t = 0\}$

7. $\mathrm{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b & b \\ 0 & a-b & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Exercice II.8 – (Rang d'une famille de vecteurs) [Correction p. 281]

Calculer le rang des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ ci-dessous.

1. $\mathrm{A} = ((1,2,-4,3),(2,5,-3,4),(6,17,-7,10),(1,3,-3,2))$.
2. $\mathrm{B} = ((1,2,6,-1),(3,6,5,-6),(2,4,-1,-2))$.

Exercice II.9 – (Base d'une intersection de sous-espaces vectoriels) [Correction p. 282]

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$\mathrm{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x-y-z=0\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x+y+z=0\right\}.$$

Déterminer une base de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$.

Exercice II.10 – (EV de fonctions polynomiales)

Notons $\mathrm{E} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[x] \,/\, \forall\, x \in \mathbb{R}, \mathrm{P}(x) - x\mathrm{P}'(x) = 0\}$.
Justifier que E est un espace vectoriel et en déterminer une base ainsi que la dimension.

Exercice II.11 – (Recherche de bases) [Correction p. 282]

1. On considère les quatre fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{P}_0(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \qquad \mathrm{P}_2(x) = x(x-1)(x-3)$$
$$\mathrm{P}_1(x) = x(x-2)(x-3) \qquad \mathrm{P}_3(x) = x(x-1)(x-2).$$

Démontrer que la famille $(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

2. On considère les cinq fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$f_1(x) = \ln(x) \qquad f_3(x) = e^x \qquad f_5(x) = \frac{1}{x}.$$
$$f_2(x) = x \qquad f_4(x) = e^{x+3}$$

On suppose que ces fonctions appartiennent à un espace vectoriel E de dimension 6 telle que $\mathrm{E} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$.

   a. La famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ est-elle une famille libre de E ?

   b. Déterminer une base de Vect $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$.

3. On note E l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
On note a et b les éléments de E tels que : $a_0 = 1, a_1 = 0$ et $b_0 = 0, b_1 = 1$. Enfin, on note $r = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $s = (3^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   a. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 2 dont (r,s) est une base.

   b. Montrer que (a,b) est une base de E.

Exercice II.12 – (Coordonnées dans une base) [Correction p. 284]

1. Dans $\mathbb{R}^4$, on note $a=(1,2,3,4), b=(0,1,1,1), c=(1,1,0,2), d=(1,1,2,0)$.
   a. Vérifier que $\mathcal{B}=(a,b,c,d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
   b. On pose $x=(1,1,1,1)$. Déterminer les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\right)$.
   a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   b. Donner les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix}6&4\\0&4\end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   c. Donner les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix}6&4\\0&4\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. On pose $\mathcal{F}=((\mathrm{X}-\mathbb{1})(\mathrm{X}+\mathbb{1}),(\mathrm{X}+\mathbb{1})(\mathrm{X}-2\mathbb{1}),(\mathrm{X}-\mathbb{1})(\mathrm{X}-2\mathbb{1}))$.
   a. Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[x]$.
   b. En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
   c. Donner les coordonnées de X dans cette base.

Exercice II.13 – (Cas d'égalité de deux sous-espaces vectoriels à partir des dimensions) [Correction p. 286]

Dans $\mathbb{R}^3$, on note $a=(1,1,3)$, $b=(1,0,2)$, $c=(2,1,5)$, $d=(3,2,8)$, ainsi que $\mathrm{E}_1=\mathrm{Vect}\,(a,b)$ et $\mathrm{E}_2=\mathrm{Vect}\,(c,d)$.

1. Déterminer $\dim(\mathrm{E}_1)$ et $\dim(\mathrm{E}_2)$.
2. Vérifier que $(c,d)\in(\mathrm{E}_1)^2$.
3. En déduire que $\mathrm{E}_1=\mathrm{E}_2$.

Exercice II.14 – (Base d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) [Correction p. 287]

À tout couple (a,b) de deux réels, on associe la matrice $\mathrm{M}(a,b)$ définie par :

$$\mathrm{M}(a,b)=\begin{pmatrix}a+2b&-b&-2b\\2b&a-b&-4b\\-b&b&a+3b\end{pmatrix}.$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $\mathrm{M}(a,b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$ i.e. $\mathrm{E}=\left\{\mathrm{M}(a,b)\,/\,(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.
On note I la matrice identité $\mathrm{M}(1,0)$ et A la matrice $\begin{pmatrix}2&-1&-2\\2&-1&-4\\-1&1&3\end{pmatrix}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de E ainsi que sa dimension.

VII. Pour s'entraîner

Exercice II.15 – (Bases particulières de $\mathbb{R}_n[x]$)

1. Soit $(\mathrm{P}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes tels que $\deg(\mathrm{P}_i) = i$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$.
   Démontrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathrm{P}_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$. On note, $\forall\, i \in [\![0\,;n]\!]$, $\mathrm{P}_i = (\mathrm{X} - a\mathbb{1})^i(\mathrm{X} - b\mathbb{1})^{n-i}$.
   Montrer que la famille $(\mathrm{P}_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient a_0, …, $a_n n+1$ réels distincts deux à deux.
   Pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$, on appelle i-ème polynôme d'interpolation (ou interpolateur) de Lagrange associé aux réels $a_0, \ldots, a_n$ le polynôme
   $$\mathrm{L}_i = \prod_{\substack{j\in[\![0;n]\!]\\ j\neq i}} \frac{\mathrm{X} - a_j}{a_i - a_j}.$$

   a. Donner le degré de L_i pour $i \in [\![0\,;n]\!]$.

   b. Montrer que :
   $$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \mathrm{L}_i(a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases} = \delta_{i,k} \ \text{(Symbole de Kronecker)}.$$

   c. Montrer que la famille $(\mathrm{L}_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

   d. Montrer que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[x]$, $\mathrm{P} = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(a_i)\,\mathrm{L}_i$.

Exercice II.16 – (Matrices symétriques et antisymétriques)

Soient $n \in [\![2\,;+\infty[\![$ ainsi que les ensembles :

— $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, {}^t\mathrm{M} = \mathrm{M}\}$: l'ensemble des matrices carrées de taille n symétriques

— $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, {}^t\mathrm{M} = -\mathrm{M}\}$: l'ensemble des matrices carrées de taille n antisymétriques

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en donner une base de chaque ainsi que la dimension.

2. Montrer que :
   $$\forall\, \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists!(\mathrm{S},\mathrm{A}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{M} = \mathrm{S} + \mathrm{A}.$$

Exercice II.17 – (Base d'un sous-espace vectoriel particulier de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$)

Soit $\mathcal{E} = \left\{ \mathrm{M} = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, \sum_{i=1}^{3} m_{i,i} = 0 \right\}$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Donner une base de $\mathcal{E}$ ainsi que sa dimension.

Exercice II.18 – ((⋆) Centre d'une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour toute partie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle commutant de $\mathcal{E}$ la partie $\mathrm{C}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée des matrices qui commutent avec toute matrice de $\mathcal{E}$, *i.e.* $\mathrm{C}(\mathcal{E}) = \{\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, \forall\, \mathrm{M} \in \mathcal{E},\ \mathrm{AM} = \mathrm{MA}\}$.

1. Vérifier que, pour toute partie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{C}(\mathcal{E})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Démontrer $\mathrm{C}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right) = \mathbb{R}\mathrm{I}_n$ où $\mathbb{R}\mathrm{I}_n = \{a\mathrm{I}_n, a \in \mathbb{R}\}$.

On pourra utiliser les matrices élémentaires $\mathrm{E}_{i,j}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice II.19

Soient $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{F} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{JMJ} = \mathrm{M}\}$.

Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

VIII. Concours

Exercice II.20 – (Classique !)

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3)^2$ puis en déduire que $(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3)^3 = 0$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathrm{E}_2 = \{\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{AX} = 2\mathrm{X}\}$ est un espace vectoriel. En déterminer une base et la dimension.
3. Posons $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   a. Vérifier que $\mathrm{AV} \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U}, \mathrm{V})$.
   b. Résoudre l'équation $\mathrm{AX} = 2\mathrm{X} + \mathrm{V}$, d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   c. Posons $\mathrm{W} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W})$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1)}(\mathbb{R})$.
4. Considérons $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   a. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   b. Déterminer la matrice T de sorte que $\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}$ et vérifier que $\mathrm{T} = 2b_3 + \mathrm{N}$, où $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, AM = MA\}$.
   a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.
   b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :
   $$M \in \mathcal{C} \iff NQ = QN.$$
   c. Démontrer que $\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, NQ = QN\} = \text{Vect}\,(I_3, N, N^2)$.
   d. Déterminer alors une base de $\mathcal{C}$ ainsi que sa dimension.
6. On considère l'ensemble $\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, M^2 + I_3 = A\}$.
   a. L'ensemble $\mathcal{R}$ est-il un espace vectoriel ?
   b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :
   $$M \in \mathcal{R} \iff Q^2 = I_3 + N.$$
   c. Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que si $Q^2 = I_3 + N$, alors nécessairement, Q et N commutent.
   d. En déduire, à l'aide de la question 5.c., les matrices $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Q^2 = I_3 + N$.
   e. Conclure en déterminant l'ensemble $\mathcal{R}$.

Corrigés

Correction de l'exercice II.1 : [Énoncé]

1. a. $0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0) \notin \mathrm{E}_1$ donc E_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Idée
E_2 est aussi l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

b. $$\begin{aligned}\mathrm{E}_2 &= \{(x,y,z,t) \in \mathrm{E} \,/\, x = 0\}\\ &= \{(0,y,z,t) \in \mathrm{E} \,/\, (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\}\\ &= \{y(0,1,0,0) + z(0,0,1,0) + t(0,0,0,1) \,/\, (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\}\\ &= \mathrm{Vect}\,((0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)).\end{aligned}$$
Par définition du sous-espace vectoriel engendré, E_2 est, en particulier, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Idée
Même chose pour E_3.

c. $\mathrm{E}_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathrm{E} \,/\, y = z = t = 0\} = \{(x,0,0,0) \in \mathrm{E} \,/\, x \in \mathbb{R}\}$ Donc, E_3 est un
$= \{(x,0,0,0) \in \mathrm{E} \,/\, x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,0,0) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$
$\mathrm{Vect}\,((1,0,0,0))$.
sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

d. $0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0) \notin \mathrm{E}_4$ donc E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Rappel
$0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est la fonction nulle définie sur $\mathbb{R}$ *i.e.* $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}(x) = 0$.

2. a.

— Par définition tout élément de E_1 est élément de E *i.e.* $\mathrm{E}_1 \subset \mathrm{E}$.

— La fonction nulle est dérivable sur $\mathbb{R}$ soit $0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{E}_1$ *i.e.* $\mathrm{E}_1 \subset \mathrm{E}$.

— Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f,g) \in (\mathrm{E}_1)^2$, montrons que $\lambda f + g \in \mathrm{E}_1$.
On sait que si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors par produit par un réel, λf est dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, d'où $\lambda f + g$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ *i.e.* $\lambda f + g \in \mathrm{E}_1$.

En conclusion, E_1 est bien un sous-espace vectoriel de E.

b. On reprend la démonstration ci-dessus en remplaçant « dérivable » par « continue ».

c. La fonction nulle n'est pas discontinue donc $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} = 0_{\mathrm{E}} \notin \mathrm{E}_3$ et E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

d. Pour toute fonction strictement croissante, $(-1)f$ ne l'est pas donc E_4 n'est pas stable par la loi externe *i.e.* E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

3. a. $$\begin{aligned}\mathrm{E}_1 &= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{E} \,/\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}\\ &= \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \,/\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}\\ &= \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \,/\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}\\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$
Donc E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Rappel
$0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = 0_2$ est la matrice nulle carrée d'ordre 2.

b.

— Par définition, tout élément de E_2 est une matrice carrée d'ordre 2 donc élément de E *i.e.* $\mathrm{E}_2 \subset \mathrm{E}$.

— $\forall\, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $0_2\mathrm{B} = 0_2 = \mathrm{B}0_2$ soit $0_2 \in \mathrm{E}_2$ et $\mathrm{E}_2 \neq \emptyset$.

— Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in (\mathrm{E}_2)^2$. Montrons que $\lambda\mathrm{M} + \mathrm{N} \in \mathrm{E}_2$ *i.e.* $(\lambda\mathrm{M} + \mathrm{N})\mathrm{B} = \mathrm{B}(\lambda\mathrm{M} + \mathrm{N}), \mathrm{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

— Comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, $\lambda M + N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

— Par définition de E_2, $MB = BM$ et $NB = BN$.
Ainsi $(\lambda M + N)B = \lambda MB + NB = \lambda BM + BN = B(\lambda M + N)$ après développement puis factorisation par B à gauche.

On a bien montré que $\lambda M + N \in E_2$.

E_2 est bien un sous-espace vectoriel de E.

c. Soit I la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Un simple calcul montre que $(2I)^2 = 4I \neq (2I)$ et $2I \notin E_3$ *i.e.* E_3 n'est pas stable pour la loi de composition externe.
En conclusion, E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Rappel
$0_E = 0_{\mathbb{R}_5[x]} = 0_{\mathbb{R}[x]}$ est la fonction polynôme nulle définie sur $\mathbb{R}$ *i.e.* $\forall x \in \mathbb{R}$, $0_{\mathbb{R}[x]}(x) = 0$.

4. a.

— Par définition, tout élément de E_1 est un polynôme de degré inférieur ou égal à 5 donc élément de E *i.e.* $E_1 \subset E$.

— $0_{\mathbb{R}[x]}(0) = 0$ soit $0_{\mathbb{R}[x]} \in E_2$ *i.e.* $E_1 \neq \emptyset$.

— Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in (E_1)^2$, montrons que $\lambda P + Q \in E_1$ *i.e.* $(\lambda P + Q)(0) = 0$.
$P \in E_1$ équivaut à $P(0) = 0$ et $Q \in E_1$ équivaut à $Q(0) = 0$ donc $(\lambda P + Q)(0) = (\lambda P)(0) + Q(0) = \lambda P(0) + Q(0) = \lambda(0) + 0 = 0$ et $\lambda P + Q \in E_1$.

En conclusion, E_1 est bien un sous-espace vectoriel de E.

b. $\deg\left(0_{\mathbb{R}[x]}\right) = -\infty$ donc $0_{\mathbb{R}[x]} = 0_E \notin E_2$ donc E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Correction de l'exercice II.3 : [Énoncé]

1. $$\begin{aligned}\mathcal{S}_2 &= \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, {}^tM = M\}\\ &= \left\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, M = \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}\right\}\\ &= \left\{\begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\}.\end{aligned}$$

2. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_2 &= \left\{\begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\}\\ &= \left\{x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\}\\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Autre méthode générale pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

— Tout élément de $\mathcal{S}_2$ est une matrice carrée d'ordre n donc élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *i.e.* $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— La matrice nulle vérifie ${}^t0_n = 0_n$ soit $0_n \in \mathcal{S}_2$ *i.e.* $\mathcal{S}_2 \neq \emptyset$.

— Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M, N) \in S^2$, montrons que $\lambda M + N \in \mathcal{S}_2$ i.e. ${}^t(\lambda M + N) = (\lambda M + N)$.
Par linéarité de la transposée, ${}^t(\lambda M + N) = {}^t(\lambda M) + {}^tN = \lambda\,({}^tM) + {}^tN = \lambda M + N$.
On a bien montré que $\lambda M + N \in \mathcal{S}_2$.

En conclusion, $\mathcal{S}_2$ est bien un sous-espace vectoriel de E.

Correction de l'exercice II.4 : [Énoncé]

Méthode
La méthode est sensiblement toujours la même : on suppose l'existence de scalaires satisfaisant la combinaison linéaire puis on vérifie la validité de cette hypothèse.

1. a. Supposons qu'il existe un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(3,7) = a(1,1) + b(2,3)$.
Alors,

$$(3,7) = a(1,1) + b(2,3) \iff (3,7) = (a,a) + (2b,3b) = (a+2b, a+3b).$$

Or, deux couples sont égaux si et seulement si leurs composantes sont égales,

$$\iff \begin{cases} a+2b = 3 \\ a+3b = 7 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} a+2b = 3 \\ b = 4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = -5 \\ b = 4. \end{cases}$$

On peut donc dire que $(3,7)$ est bien combinaison linéaire de $(1,1)$ et $(2,3)$:

$$(3,7) = (-5)\cdot(1,1) + 4\cdot(2,3).$$

b. Même chose. Supposons qu'il existe un couple (a,b) tel que : $(1,1) = a(2,1) + b(3,1)$.

$$\begin{aligned} (1,1) = a(2,1) + b(3,1) &\iff (1,1) = (2a,a) + (3b,b) \\ &\iff (1,1) = (2a+3b, a+b) \\ &\iff \begin{cases} 2a+3b = 1 \\ a+b = 1 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} 2a+3b = 1 \\ -b = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2a = 4 \\ b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

On peut donc dire que $(1,1)$ est bien combinaison linéaire de $(2,1)$ et $(3,1)$:

$$(1,1) = 2\cdot(2,1) + (-1)\cdot(3,1).$$

c. Supposons qu'il existe un triplet (a,b,c) tel que :

$$\begin{aligned} (1,1) = a(2,1) + b(3,1) + c(2,4) &\iff (1,1) = (2a,a) + (3b,b) + (2c,4c) \\ &\iff (1,1) = (2a+3b+2c, a+b+4c) \\ &\iff \begin{cases} 2a+3b+2c = 1 \\ a+\ b+4c = 1 \end{cases} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_1 \leftrightarrow L_2}}{\iff} \begin{cases} a+b+4c = 1 \\ b-6c = -1 \end{cases} \\ &\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} a\ +10c = 2 \\ b-\ 6c = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2-10c \\ b = -1+6c. \end{cases} \end{aligned}$$

Ici, on a le choix des valeurs de a et b en fonction de celles de c.
On a donc une infinité de façon d'exprimer $(1,1)$ comme combinaison linéaire de la famille $((2,1),(3,1),(2,4))$.
Par exemple,

- si $c = 1$ alors $a = -8$, $b = 5$ et $(1,1) = (-8)\cdot(2,1) + 5\cdot(3,1) + 1\cdot(2,4)$.
- si $c = 0$ alors $a = 2$, $b = -1$ et $(1,1) = 2\cdot(2,1) + (-1)\cdot(3,1)$.
- si $c = \frac{1}{5}$ alors $a = 0$, $b = \frac{1}{5}$ et $(1,1) = \frac{1}{5}\cdot(3,1) + \frac{1}{5}\cdot(2,4)$.
- si $c = \frac{1}{6}$ alors $a = \frac{1}{3}$, $b = 0$ et $(1,1) = \frac{1}{3}\cdot(2,1) + \frac{1}{6}\cdot(2,4)$.
- ...

2. Supposons qu'il existe un triplet (a,b,c) tel que :

$$(2,4,2)=a(2,1,2)+b(1,1,2)+c(0,1,1) \iff (2,4,2)=(2a+b,a+b+c,2a+2b+c)$$
$$\iff \begin{cases} 2a+b=2 \\ a+b+c=4 \\ 2a+2b+c=2 \end{cases} \underset{L_2\leftrightarrow L_1}{\iff} \begin{cases} a+b+c=4 \\ 2a+b=2 \\ 2a+2b+c=2 \end{cases}$$
$$\underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\iff} \begin{cases} a+b+c=4 \\ 2a+b=2 \\ a+b=-2 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_3\\ L_1\leftarrow L_1-L_3}}{\iff} \begin{cases} c=6 \\ a=4 \\ a+b=-2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a=4 \\ b=-6 \\ c=6. \end{cases}$$

On peut donc dire que $(2,4,2)$ est bien combinaison linéaire de la famille $((2,1,2),(1,1,2),(0,1,1))$:

$$(2,4,2)=4(2,1,2)+(-6)(1,1,2)+6(0,1,1).$$

3. Supposons qu'il existe un couple (a,b) tel que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ a+b & a \end{pmatrix}$$

Or, deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux,

$$\iff \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ a+b=3 \\ a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=2. \end{cases}$$

On peut donc dire que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est bien combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Dans $\mathbb{R}_3[x]$, les deux vecteurs $\mathrm{P}=\mathbb{1}+2\mathrm{X}-3\mathrm{X}^2-e\mathrm{X}^3$ et $\mathrm{Q}=(-2)\cdot\mathrm{P}=-2\mathbb{1}-4\mathrm{X}+6\mathrm{X}^2+2e\mathrm{X}^3$ sont colinéaires.

5. Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, même choses, les deux vecteurs $\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ \sqrt{2} & 0 & \pi \end{pmatrix}$ et$\mathrm{N}=\ln(2)\cdot\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 2\ln(2) & -\ln(2) & 4\ln(2) \\ 0 & \ln(2) & 3\ln(2) \\ \sqrt{2}\ln(2) & 0 & \pi\ln(2) \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

6. — Supposons que les fonctions $f_1 : x\longmapsto e^{2x}$ et $f_2 : x\longmapsto e^x$ soient colinéaires. Il existerait alors un $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $f_1=\lambda\cdot f_2$ *i.e.* $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $e^{2x}=\lambda e^x$.
Or, comme $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $e^x\neq 0$, on aurait $\lambda=e^x$ ce qui n'est pas possible car λ, copmme toute constante est… constante (indépendante de x).
Les fonctions f_1 et f_2 ne peuvent être colinéaires.

— Il est assez clair que $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $3^{x+1}=3\times 3^x$.
Les fonctions $f_1 : x\longmapsto 3^x$ et $f_2 : x\longmapsto 3^{x+1}=3\times 3^x$ sont colinéaires.

7. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, les deux suites réelles $u=\left(5+e^{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=-\sqrt{3}\cdot u=\left(-5\sqrt{3}-\sqrt{3}e^{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont colinéaires.

Correction de l'exercice II.5 : [Énoncé]

Méthode
Tant que l'on connait les dimensions, montrer la liberté suffit.

1. Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ de dimension 3.

   a. **Libre :** Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{aligned} a(1,0,1)+b(-1,1,2)+c(-2,1,2) = (0,0,0) &\iff (a-b-2c, b+c, a+2b+2c) = (0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} a- b-2c=0 \\ \quad b+ c=0 \\ a+2b+2c=0 \end{cases} \\ &\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1+L_2 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_2}}{\iff} \begin{cases} a \quad -c=0 \\ \quad b+c=0 \\ a \quad \quad =0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0. \end{cases} \end{aligned}$$

   Ainsi la famille E_1 est une famille libre.

   Base : Comme E_1 est une famille libre de cardinal 3 qui est la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, elle en forme une base.

   Génératrice : La famille E_1 est une base de E donc elle en est génératrice.

   b. **Libre :** Même chose, : soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{aligned} a(1,0,1)+b(-1,1,2)+c(0,1,3) = (0,0,0) &\iff (a-b, b+c, a+2b+3c) = (0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} a- b \quad =0 \\ \quad b+ c=0 \\ a+2b+3c=0 \end{cases} \\ &\underset{L_3\leftarrow L_3-L_1-3L_2}{\iff} \begin{cases} a \quad \quad =b \\ \quad b \quad =-c \\ \quad \quad 0=0 \end{cases} \\ &\iff a=b=-c. \end{aligned}$$

   Il est donc possible d'obtenir une combinaison linéaire nulle de $(1,0,1)$, $b(-1,1,2)$ et $(0,1,3)$ sans que toutes les coordonnées a, b, c soient toutes nulles.
   Le triplet $(1,1,-1)$ convient par exemple. C'est la définition d'une famille liée.
   Ainsi la famille E_2 n'est pas une famille libre.

   Génératrice : Dans un espace de dimension 3, elle ne peut donc être génératrice sinon elle en formerait une base et serait, par conséquent, libre.
   Si l'on veut être plus explicite, comme

$$1\cdot(1,0,1)+1\cdot(-1,1,2)+(-1)\cdot(0,1,3)=(0,0,0),$$

   on peut, par exemple, écrire que $(0,1,3)=(1,0,1)+(-1,1,2)$ puis :

$$\mathrm{Vect}\,(\mathrm{E}_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right).$$

Idée
Avec un peu d'intuition, on pourrait aussi montrer que $(1,0,0)$, par exemple, ne peut s'écrire comme combinaison linéaire de $1,0,1)$ et $(-1,1,2)$.

Les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ n'étant pas colinéaires, ils sont libres et forment donc une base de $\text{Vect}\,(\text{E}_2)$ qui est alors de dimension 2.

Base : Bien sûr, n'étant ni génératrice, ni libre, la famille E_2 n'est, a fortiori, pas une base de E.

c. **Libre :** On dispose de deux vecteurs, par conséquent la famille $\text{E}_3 = ((1,0,1),(2,0,3))$ est libre si et seulement si les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Il est clair que les coordonnées de $(1,0,1)$ et $(2,0,3)$ ne sont pas proportionnelles car $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$ donc la famille E_3 est libre.

Méthode
Exit d'office toutes les familles dont le cardinal est strictement inférieur à $\dim(\text{E})$.

Génératrice : Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 et que la famille E_3 est composée de seulement 2 vecteurs, elle ne peut être génératrice.

Plus explicite, le vecteur $(0,1,0)$ ne peut être obtenue comme combinaison linéaire de $(1,0,1)$ et $(2,0,3)$.

Base : La famille E_3 n'est pas une famille génératrice donc elle ne forme pas une base de l'espace vectoriel $\text{E} = \mathbb{R}^3$.

Méthode
Exit aussi toutes les familles dont le cardinal est strictement supérieur à $\dim(\text{E})$.

d. **Libre :** La famille E_4, formée de 4 vecteurs, ne peut pas être une famille libre car l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ étant de dimension 3 alors toute famille libre possède au plus 3 vecteurs.

Génératrice : On revient à la définition : soit $u(x,y,z) \in \text{E}$ un vecteur quelconque. Peut-on trouver (au moins) un quadruplet $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$u = a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+2b-c\\c\\a+3b+c+d\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a+2b-c &= x \\ c &= y \\ a+3b+c+d &= z \end{cases} \underset{\text{L}_3 \leftarrow \text{L}3-\text{L}_1}{\iff} \begin{cases} a+2b &= x+y \\ c &= y \\ b+d &= -x-2y+z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -2b+x+y \\ b = b \\ c = y \\ d = -b-x-2y+z \end{cases}$$

Ce système admet une infinité de quadruplets solutions et, en particulier, pour $b=0$, $(x+y,0,y,-x-2y+z)$ convient. La famille E_4 est génératrice de E.

Autre méthode : Sachant que $\text{E} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, on peut essayer, à l'aide d'opérations d'élémentaires et de l'algorithme de Gauss, de montrer que $\text{Vect}\,(\text{E}_4) = \text{E}$:

$$\text{Vect}\,(\text{E}_4) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Or, $\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, on le retire :

$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

On peut retrancher $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ sans changer l'espace engendré :

$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Même chose en ajoutant $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et retranchant $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$:

$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \mathrm{E}.$$

La famille E_4 est bien génératrice de E.

Base : La famille E_4 n'est pas une famille libre donc elle ne forme pas une base de l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$.

2. Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[x]$ de dimension 4.

Idée
E_1 est une famille de polynômes non nuls étagée par les degré donc on doit se douter qu'elle est libre.

a. **Libre :** $\mathrm{E}_1 = (\mathbb{1}, \mathrm{X} - 2\mathbb{1}, (\mathrm{X} - 2\mathbb{1})^2) = (\mathbb{1}, -2\mathbb{1} + \mathrm{X}, 4\mathbb{1} - 4\mathrm{X} + \mathrm{X}^2)$.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a\mathbb{1} + b(-2\mathbb{1} + \mathrm{X}) + c(4\mathbb{1} - 4\mathrm{X} + \mathrm{X}^2) = 0_{\mathbb{R}_3[x]}$$
$$\iff (a - 2b + 4c)\mathbb{1} + (b - 4c)\mathrm{X} + c\mathrm{X}^2 = 0_{\mathbb{R}_3[x]}$$

Deux polynômes étant égaux si, et seulement si ils ont les mêmes coefficients, on en déduit :

$$\iff \begin{cases} a - 2b + 4c = 0 \\ b - 4c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0. \end{cases}$$

Ainsi, la famille E_1 est une famille libre de $\mathbb{R}_3[x]$.

Génératrice : La famille E_1 ne possède que 3 vecteurs donc elle ne peut être génératrice d'un espace de dimension 4.

Base : Non génératrice de E, la famille E_1 ne peut en former une base.

b. **Libre :** Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$a(3\mathbb{1}) + b\mathrm{X}^2 + c\left(-\mathrm{X}^3\right) + d\mathrm{X} = 0_{\mathbb{R}_3[x]} \iff 3a + d\mathrm{X} + b\mathrm{X}^2 - c\mathrm{X}^3 = 0_{\mathbb{R}_3[x]}$$
$$\iff a = b = c = d = 0.$$

Ainsi, la famille E_2 est une famille libre de $\mathbb{R}_3[x]$.

Famille libre de 4 vecteurs dans un espace de dimension 4, on peut déjà conclure au caractère générateur et à la base mais faisons comme si nous ne l'avions pas vu :

Génératrice : À l'aide d'opérations élémentaires, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}\text{Vect}\,(\mathrm{E}_2) &= \text{Vect}\,(3\mathbb{1}, \mathrm{X}^2, -\mathrm{X}^3, \mathrm{X}) \\ &= \text{Vect}\,(\mathbb{1}, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^3) \qquad \text{(on supprime les multiples)} \\ &= \mathbb{R}_4[x]. \qquad \text{(en reconnaissant la base canonique de } \mathbb{R}_3[x]\text{)}\end{aligned}$$

La famille E_2 est donc une famille génératrice de $\mathbb{R}_3[x]$.

Base : La famille E_2 est une famille libre et génératrice donc elle forme une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$.

3. On rappelle que $0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est la fonction nulle définie sur $\mathbb{R}$ *i.e.* $\forall\, x \in \mathbb{R},\ 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}(x) = 0$.

Libre : Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\begin{aligned}af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \\ &\iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) + df_4(x) = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}(x) \\ &\iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ ae^x + be^{2x} + ce^{3x} + de^{4x} = 0\end{aligned}$$

On pourrait faire le choix de 4 valeurs différentes de x afin d'obtenir 4 équations mais on va faire mieux avec les limites :

$$\iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ a + be^x + ce^{2x} + de^{3x} = 0 \qquad \text{(en divisant par } e^x \neq 0\text{)}$$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x} = 0$,

$$\iff a = 0 \ \text{ et } \ \forall\, x \in \mathbb{R},\ be^x + ce^{2x} + de^{3x} = 0.$$

On recommence :

$$\iff a = 0 \ \text{ et } \ \forall\, x \in \mathbb{R},\ b + ce^x + de^{2x} = 0.$$

En repassant à la limite,

$$\iff a = b = 0 \ \text{ et } \ \forall\, x \in \mathbb{R},\ ce^x + de^{2x} = 0.$$

Encore une fois :

$$\begin{aligned}&\iff a = b = 0 \ \text{ et } \ \forall\, x \in \mathbb{R},\ c + de^x = 0 \\ &\iff a = b = c = 0 \ \text{ et } \ \forall\, x \in \mathbb{R},\ de^x = 0.\end{aligned}$$

On divise une dernière fois par $e^x \neq 0$:

$$\iff a = b = c = d = 0.$$

La famille $\mathrm{E}_1 = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est donc une famille libre de E

Autre méthode : En posant P le polynôme de $\mathbb{R}_4[x]$ défini par $\mathrm{P} = a\mathrm{X} + b\mathrm{X}^2 + c\mathrm{X}^3 + d\mathrm{X}^4$, on a l'équivalence :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ ae^x + be^{2x} + ce^{3x} + de^{4x} = 0 \iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}\,(e^x) = 0.$$

Le polynôme P a donc une infinité de racines pour toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$, c'est le polynôme nul *i.e.* $a = b = c = d = 0$ et on retrouve le même résultat.

Rappel
- Tout polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.
- Un polynôme qui admet un nombre de racines supérieur à son degré est égal au polynôme nul.

Génératrice : E est un espace vectoriel de dimension 5 et E_1 est composée de 4 vecteurs, par conséquent cette dernière ne peut constituer une famille génératrice.

Base : La famille E_1 est libre et non génératrice donc elle ne forme pas une base de l'espace vectoriel E.

4. Dans $\mathrm{E} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension $2 \times 2 = 4$.

   a. **Libre :** Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}a & b+c\\ b & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}a & = 0\\ b+c & = 0\\ b & = 0\end{cases}$$

$$\iff a = b = c = 0.$$

Ainsi, la famille E_1 est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Génératrice : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension 4 et E_1 est composée de 3 vecteurs donc ce n'est pas une famille génératrice.

Base : La famille E_1 n'est pas une famille génératrice donc elle ne forme pas une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. **Libre :** Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\begin{aligned} a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix}a+b+d&b\\b+d&b-c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \\ \iff \begin{cases} a+b+d=0 \\ b=0 \\ b+d=0 \\ b-c+d=0 \end{cases} \iff a=b=c=d=0. \end{aligned}$$

Ainsi, la famille E_2 est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Base : Famille libre de 4 vecteurs dans un espace de dimension 4, la famille E_2 en forme une base.

Génératrice : Comme la famille E_2 est une base, elle est, en particulier, génératrice de E.

Autre méthode : On reconstruit E à partir de $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{E}_2)$. À l'aide d'opérations élémentaires, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}\,(\mathrm{E}_2) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\right) \\ &\underset{\substack{u_2\leftarrow u_2-u_4\\ u_3\leftarrow -u_3}}{=} \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\right) \\ &\underset{u_4\leftarrow u_4-u_1-u_3}{=} \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right) \\ &= \mathcal{M}_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

La famille E_2 est donc une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c. **Libre :** La famille E_3, composée de 5 vecteurs, n'est pas une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de dimension 4 .

Génératrice : Le plus rapide avec nos moyens :

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}\,(\mathrm{E}_3) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}\right) \\ &\underset{\substack{u_2\leftarrow u_2+u_1\\ u_4\leftarrow u_4-2u_1-u_3+u_4}}{=} \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

La famille E_2 ne peut engendrer un espace de dimension 4 mais au plus 3 donc ce n'est donc pas une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Base : La famille E_3 n'est ni libre ni génératrice donc elle ne peut constituer une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5. Après calcul, $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}3&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

Libre : La famille E_1 est composée de 2 vecteurs non colinéaires car leurs coefficients ne sont pas proportionnels. C'est donc une famille libre.

Génératrice : Dans un espace de dimension $3 \times 3 = 9$, la famille E_1 de cardinal 2 ne saurait en former une famille génératrice.

Base : La famille E_1 est libre mais non génératrice donc elle ne peut constituer une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice II.6 : [Énoncé]

1. a. Comme $(-3,-6)) = -3 \cdot (1,2)$, $\mathrm{A} = \mathrm{Vect}\,((1,2),(-3,-6)) = \mathrm{Vect}\,((1,2))$.
   Le vecteur $(1,2)$ étant non nul, il est libre. Générateur, par définition de A, il en forme une base et $\dim(\mathrm{A}) = 1$.

   b. Comme $(5,6) = 2 \cdot (3,4) - (1,2)$, $\mathrm{B} = \mathrm{Vect}\,((1,2),(3,4),(5,6)) = \mathrm{Vect}\,((1,2),(3,4))$.
   Les deux vecteurs $(1,2$ et $(3,4)$ ne sont pas colinéaires donc ils sont libres et générateurs, par définition, de B.
   Donc $\dim(\mathrm{B}) = 2$.

2. Déterminons tout d'abord la liberté de la famille $(1,3,-3),(4,2,-3),(-1,7,6)$:
   Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a(1,3,-3)+b(4,2,-3)+c(-1,7,6)=(0,0,0) \iff \begin{cases} a+4b-c=0 \\ 3a+2b+7c=0 \\ -3a-3b+6c=0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-3L_1\\ L_3\leftarrow L_3+3L_1}}{\iff} \begin{cases} a+4b-c=0 \\ -10b+10c=0 \\ 9b+3c=0 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow \frac{1}{10}L_2\\ L_3\leftarrow \frac{1}{3}L_3}}{\iff} \begin{cases} a+4b-c=0 \\ -b+c=0 \\ 3b+c=0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+3L_2}{\iff} \begin{cases} a+4b-c=0 \\ -b+c=0 \\ 4c=0 \end{cases} \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0. \end{cases}$$

   La famille $(1,3,-3),(4,2,-3),(-1,7,6)$ est donc libre.
   Génératrice, par définition, de A, elle en forme une base et $\dim(\mathrm{A}) = 3$.

3. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ puis donner leur dimension :

Remarque
Comme $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^3$ et $\dim(\mathrm{A}) = \dim(\mathbb{R}^3)$, on a $\mathrm{A} = \mathbb{R}^3$.

a. Même raisonnement que précédemment : soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que

$$a(1,2,-3,4)+b(2,4,-5,1)+c(-2,-1,2,0)+d(3,0,-1,-4)=(0,0,0,0)$$

$$\iff\begin{cases}a+2b-2c+3d=0\\2a+4b-c=0\\-3a-5b+2c-d=0\\4a+b-4d=0\end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1+3L_3\\L_4\leftarrow L_4-4L_2}}{\iff}\begin{cases}-8a-13b+4c=0\\2a+4b-c=0\\-3a-5b+2c-d=0\\16a+21b-8c=0\end{cases}\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1+4L_2\\L_4\leftarrow L_4-8L_2}}{\iff}\begin{cases}3b=0\\2a+4b-c=0\\-3a-5b+2c-d=0\\-11b=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}b=0\\2a-c=0\\-3a+2c-d=0\end{cases}\underset{L_3\leftarrow L_3+2L_2}{\iff}\begin{cases}b=0\\2a-c=0\\a-d=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}a=a\\b=0\\c=2a\\d=a\end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions paramétrées par a. En particulier, pour $a=1$, il existe un quadruplet $(1,0,2,1)$ de $\mathbb{R}^4$ non nul tel que :

$$1\cdot(1,2,-3,4)+0\cdot(2,4,-5,1)+2\cdot(-2,-1,2,0)+1\cdot(3,0,-1,-4)=(0,0,0,0). \quad \text{(II.2)}$$

La famille est liée.

De plus, d'après (II.2), $(3,0,-1,-4)=-1,2,-3,4)-2(-2,-1,2,0)$.

On en déduit $\mathrm{A}=\mathrm{Vect}\left((1,2,-3,4),(2,4,-5,1),(-2,-1,2,0),(3,0,-1,-4)\right)$

$=\mathrm{Vect}\left((1,2,-3,4),(2,4,-5,1),(-2,-1,2,0)\right)$.

Reste à savoir si la famille $(1,2,-3,4),(2,4,-5,1),(-2,-1,2,0)$ est libre. On recommence...

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$a(1,2,-3,4)+b(2,4,-5,1)+c(-2,-1,2,0)=(0,0,0)$$

$$\iff\begin{cases}a+2b-2c=0\\2a+4b-c=0\\-3a-5b+2c=0\\4a+b=0\end{cases}\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-2L_4\\L_2\leftarrow L_2-4L_4\\L_3\leftarrow L_3+5L_4}}{\iff}\begin{cases}-7a-2c=0\\-14a-c=0\\17a+2c=0\\4a+b=0\end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-2L_2\\L_3\leftarrow L_3+2L_2}}{\iff}\begin{cases}21a=0\\-14a-c=0\\3a=0\\4a+b=0\end{cases}\iff\begin{cases}a=0\\b=0\\c=0.\end{cases}$$

La famille est donc libre.

Elle engendre A, par définition, donc elle en forme une base et $\dim(\mathrm{A})=3$.

b. Il suffit simplement de traduire et de résoudre un système linéaire :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{B} \iff \begin{cases} x = & 2y - z \\ t = x + y & + z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y - z \\ t = 3y \end{cases} \quad \text{(en subsituant } x\text{)}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2y - z \\ y = y \\ z = z \\ t = 3y \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff (x, y, z, t) \in \mathrm{Vect}\left((2, 1, 0, 3), (-1, 0, 1, 0)\right).$$

Les deux vecteurs $(2, 1, 0, 3)$ et $(-1, 0, 1, 0)$ sont non colinéaires donc libres. La famille est génératrice de B comme on vient de le voir donc elle en forme une base et $\dim(\mathrm{B}) = 2$.

4. Les deux vecteurs $\mathrm{X} - \mathbb{1}$ et $(\mathrm{X} - \mathbb{1})^2$ ne sont pas colinéaires (pas le même degré) donc ils sont libres et engendrent $\mathrm{Vect}\left(\mathrm{X} - \mathbb{1}, (\mathrm{X} - \mathbb{1})^2\right)$ par définition donc $\dim\left(\mathrm{Vect}\left(\mathrm{X} - \mathbb{1}, (\mathrm{X} - \mathbb{1})^2\right)\right) = 2$.

5. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ce qui se traduit par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lambda \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Cette inégalité n'est pas vraie pour $n = 1$, par exemple, donc ces deux vecteurs ne peuvent être liés. Ils sont libres, engendrent $\mathrm{Vect}\left(\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ donc en forment une base et

$$\dim\left(\mathrm{Vect}\left(\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)\right) = 2.$$

Correction de l'exercice II.8 : [Énoncé]

1. On sait que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathrm{A}))$. On est revenu aux exercice précédent.

Remarque : On sait déjà que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) \leqslant 4$.

Pour gagner du temps et avec beaucoup d'intuition, on peut remarquer que :

$$(6, 17, -7, 10) = -2(1, 2, -4, 3) + 3(2, 5, -3, 4) + 2(1, 3, -3, 2).$$

Donc, $\mathrm{Vect}(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}\left((1, 2, -4, 3), (2, 5, -3, 4), (1, 3, -3, 2)\right)$. Reste à montrer que ces 3 vecteurs sont libres :

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$a(1, 2, -4, 3) + b(2, 5, -3, 4) + c(1, 3, -3, 2) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\iff \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ 2a + 5b + 3c = 0 \\ -4a - 3b - 3c = 0 \\ 3a + 4b + 2c = 0 \end{cases} \underset{\substack{\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + 4\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 - 3\mathrm{L}_1}}{\overset{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1}{\iff}} \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ 5b + c = 0 \\ -2b - c = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 5\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 + 2\mathrm{L}_2}}{\iff} \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ -4c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0. \end{cases}$$

La famille $(1, 2, -4, 3), (2, 5, -3, 4), (1, 3, -3, 2)$ est donc libre. Elle engendre $\mathrm{Vect}(\mathrm{A})$, par définition, donc elle en forme une base et $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathrm{A})) = 3$.

Remarque
Sinon on revient au système comme dans les exercices précédents.

2. Il est aussi facile de voir que $(2,4,-1,-2) = (3,6,5,-6) - (1,2,6,-1)$ donc

$$\text{Vect}\,(\text{B}) = \text{Vect}\,((1,2,6,-1),(3,6,5,-6),(2,4,-1,-2)) = \text{Vect}\,((1,2,6,-1),(3,6,5,-6))\,.$$

Les deux vecteurs $(1,2,6,-1)$ et , $(3,6,5,-6)$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles donc ils forment une famille libre et génératrice de $\text{Vect}\,(\text{B})$ ce qui permet d'affirmer que $\text{rg}\,(\text{B}) = \dim\,(\text{Vect}\,(\text{B})) = 2$.

Correction de l'exercice II.9 : [Énoncé]

Les opérations élémentaires vont nous sauver.

$$\begin{aligned}
\text{F} \cap \text{G} &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x-y-z=0 \text{ et } 2x+y+z=0\right\} \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}\right\} \\
&\underset{\text{L}_2 \leftarrow \text{L}_2-\text{L}_1}{=} \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{cases} x- \ y-z=0 \\ x+2y \ \ \ =0 \end{cases}\right\} \\
&\underset{\text{L}_1 \leftarrow \text{L}_2-\text{L}_1}{=} \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{cases} \ \ 3y+z=0 \\ x+2y \ \ \ =0 \end{cases}\right\} \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{cases} z=-3y \\ x=-2y \end{cases}\right\} \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{cases} x=-2y \\ y=y \\ z=-3y \end{cases}\right\} \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \exists t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \text{Vect}\,((-2,1,-3)) = \text{Vect}\,((2,-1,3))\,.
\end{aligned}$$

Comme $(2,-1,3)$ est un vecteur non nul, il est libre et forme une base de $\text{F} \cap \text{G}$ qui est donc de dimension 1.

Méthode
Pensez toujours à choisir des vecteurs de base agréables quitte à multiplier par -1 ou autre réel non nul.

Correction de l'exercice II.11 : [Énoncé]

1. Commençons par montrer que la famille est libre.
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$a\text{P}_0 + b\text{P}_1 + c\text{P}_2 + d\text{P}_3 = 0_{\text{R}[x]}$$
$$\iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ a(x-1)(x-2)(x-3) + bx(x-2)(x-3) + cx(x-1)(x-3) + dx(x-1)(x-2) =$$

Relation, en particulier, vraie pour $x = 0$:
$$\implies -6a = 0 \iff a = 0$$
Mais aussi pour $x = 1$, $x = 2$ puis $x = 3$ ce qui nous donne successivement :
$$\implies a = 0,\ 2b = 0,\ -2c = 0 \text{ et } d = 6d = 0$$
$$\implies a = b = c = d = 0.$$

La réciproque pour $a = b = c = d = 0$ étant évidente, la famille $(\text{P}_0, \text{P}_1, \text{P}_2, \text{P}_3)$ est une famille libre de cardinal 4 dans un espace de même dimension, elle en forme une base.

Attention
Développer est une très mauvaise idée !

2. a. Comme $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^{x+3} = e^3\, e^x$, $f_4 = e^3 \cdot f_3$ et la famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ n'est pas libre.

b. D'après la question précédente,

$$\text{Vect}\,(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) = \text{Vect}\,(f_1, f_2, f_3, f_5)\,.$$

Idée
Le raisonnement est identique à la question précédente en reprenant un peu les idées de l' exemple (??) question 3..

Montrons que la famille (f_1, f_2, f_3, f_5) est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$.
Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\begin{aligned} af_1 + bf_2 + cf_3 + df_5 = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})} \\ \iff \forall\, x \in \mathbb{R}^{+*},\ a\ln(x) + bx + ce^x + d\,\frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

D'après les limites de croissances comparées, il apparait intéressant de diviser par e^x et de regarder la limite en $+\infty$:

$$\begin{aligned} &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}^{+*},\ a\frac{\ln(x)}{e^x} + b\frac{x}{e^x} + c + d\,\frac{1}{xe^x} = 0 && \underset{x\to+\infty}{\Longrightarrow} c = 0 \\ &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}^{+*},\ a\ln(x) + bx + d\,\frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

En divisant ensuite par $x \in \mathbb{R}^{+*}$ donc non nul, on obtient ensuite :

$$\begin{aligned} &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}^{+*},\ a\frac{\ln(x)}{x} + b + d\,\frac{1}{x^2} = 0 && \underset{x\to+\infty}{\Longrightarrow} b = 0 \\ &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}^{+*},\ a\ln(x) + d\,\frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

L'égalité doit aussi être vraie pour $x = 1$:

$$\begin{aligned} &&& \Longrightarrow d = 0. \\ &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}^{+*},\ a\ln(x) = 0. \\ &\iff a = b = c = d = 0. \end{aligned}$$

La famille (f_1, f_2, f_3, f_5) est donc une famille libre de E et elles engendrent, par définition, leur Vect dont elles forment une base.
En particulier,

$$\operatorname{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) = \operatorname{rg}(f_1, f_2, f_3, f_5) = 4.$$

3. a. Il est déjà clair que les suites r et s forment une famille libre de E. Reste à montrer qu'elles en sont génératrices.
Or, souvenir de première année, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{E}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique $x^2 - 5x + 6 = 0$ admet deux racines réelles $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$ donc de la forme :

$$\begin{aligned} \forall\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{E}, \forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \,/\, u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n. \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \operatorname{Vect}\left((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}\right). \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{E} \subset \operatorname{Vect}(r, s)$. Vérifions rapidement la réciproque :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 5\times 2^{n+1} - 6\times 2^n = 2^n\,(5\times 2 - 6) = 2^n \times 4 = 2^{n+2} \implies r \in \mathrm{E}.$$

De même,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 5\times 3^{n+1} - 6\times 3^n = 3^n\,(5\times 3 - 6) = 3^n \times 9 = 3^{n+2} \implies s \in \mathrm{E}.$$

Donc $\mathrm{E} = \operatorname{Vect}(r, s)$ qui est de dimension 2 et dont (r, s) est une base.

b. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\alpha a + \beta b = 0_{\mathrm{E}} \iff \forall\, n \in \mathbb{N},\ \alpha a_n + \beta b_n = 0.$$

Or, cette relation doit être aussi vraie pour $n = 0$ et $n = 1$:

$$\implies \alpha a_0 + \beta b_0 = 0 \iff \alpha = 0. \qquad \implies \alpha a_1 + \beta b_1 = 0 \iff \beta = 0.$$

Le seul couple possible étant $(\alpha = 0, \beta = 0)$, la famille (a, b) de cardinal 2 est libre dans un espace de dimension 2. Elle en forme une base.

Remarque : Même si c'est tout à fait inutile ici, explicitons a et b en fonction de leurs conditions initiales :

$$\exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = \lambda 2^n + \mu 3^n.$$

Comme $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$, (λ, μ) est solution du système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 2\lambda + 3\mu = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \mu = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = -2. \end{cases}$$

Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = 2^n - 2 \times 3^n$.

De même pour b : $\exists\, (\lambda', \mu') \in \mathbb{R}^2 \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = \lambda' 2^n + \mu' 3^n$.

Comme $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$, (λ', μ') est solution du système :

$$\begin{cases} \lambda' + \mu' = 0 \\ 2\lambda' + 3\mu' = 1 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda' + \mu' = 0 \\ \mu' = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda' = -1 \\ \mu' = 1. \end{cases}$$

Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = -2^n + 3^n$.

Correction de l'exercice II.12 : [Énoncé]

1. a. On pourrait montrer que la famille (a, b, c, d) est libre et génératrice de $\mathbb{R}^4$ quoique libre suffirait mais, en anticipant la question suivante et pour changer, on peut revenir à la définition.

   Il est déjà clair que $\text{Vect}\,(a, b, c, d) \subset \mathbb{R}^4$.

Soit $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

$$u\in \text{Vect}\,(a,b,c,d) \iff \exists\,(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4 \,/\, u=\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d$$

$$\iff \exists\,(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4 \,/\, \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \exists\,(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4 \,/\, \begin{cases}\alpha\quad+\ \gamma+\ \delta=x\\ 2\alpha+\beta+\ \gamma+\ \delta=y\\ 3\alpha+\beta\quad+2\delta=z\\ 4\alpha+\beta+2\gamma\quad=t\end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_2-L_1\\ L_4\leftarrow L_4-L_1-L_3}}{\iff} \exists\,(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4 \,/\, \begin{cases}\alpha\quad+\ \gamma+\ \delta=x\\ \alpha+\beta\quad=-x+y\\ \quad-2\gamma\quad=-x-y+z\\ \quad\gamma-3\delta=-x-z+t\end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1\leftarrow 2L_1+L_3\\ L_4\leftarrow 2L_4+L_3}}{\iff} \exists\,(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4 \,/\, \begin{cases}2\alpha\quad+2\delta=x-y+z\\ \alpha+\beta\quad=-x+y\\ \quad-2\gamma\quad=-x-y+z\\ \quad-6\delta=-3x-y-z+2t\end{cases}$$

$$\underset{L_1\leftarrow 3L_1+L_4}{\iff} \exists\,(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4 \,/\, \begin{cases}6\alpha\quad=-4y+2z+2t\\ \alpha+\beta\quad=-x+y\\ \quad-2\gamma\quad=-x-y+z\\ \quad-6\delta=-3x-y-z+2t\end{cases}$$

$$\underset{L_2\leftarrow 6L_2+L_1}{\iff} \exists\,(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4 \,/\, \begin{cases}6\alpha\quad=-4y+2z+2t\\ \quad6\beta\quad=-6x+10y-2z-2t\\ \quad-2\gamma\quad=-x-y+z\\ \quad-6\delta=-3x-y-z+2t\end{cases}$$

$$\underset{L_2\leftarrow 6L_2+L_1}{\iff} \exists\,(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4 \,/\, \begin{cases}\alpha=-\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{3}z+\dfrac{1}{3}t\\ \beta=-x+\dfrac{5}{3}y-\dfrac{1}{3}z-\dfrac{1}{3}t\\ \gamma=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{2}z\\ \delta=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{6}y+\dfrac{1}{6}z-\dfrac{1}{3}t\end{cases}$$

Il existe donc un unique quadruplet de coordonnées $\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$ tel que $u=\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d$ *i.e.* Tout vecteur de u de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de manière unique en fonction des vecteurs a,b,c,d. C'est bien la définition d'une base.

Conclusion, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b. D'après la question précédente, on en déduit que :

$$\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=\dfrac{1}{2}\\ \delta=\dfrac{1}{2}\end{cases} \quad \textit{i.e.} \quad (1,1,1,1)=\frac{1}{2}(1,1,0,2)+\frac{1}{2}(1,1,2,0).$$

2. a. Ici aussi on pourrait montrer que la famille est libre et génératrice mais on va le faire plus directement à l'aide d'opérations élémentaires et se ramener à la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\text{Vect}\,(\mathcal{B}) &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\right)\\ &\underset{\substack{u_3\leftarrow\frac{1}{3}(u_3-u_2)\\ u_2\leftarrow\frac{1}{2}(u_2-u_1)}}{=} \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\right)\\ &\underset{u_4\leftarrow\frac{1}{4}(u_4-u_1-2u_2-3u_3)}{=} \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\\ &= \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

La famille $\mathcal{B}$ est donc génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Étant de cardinal 4, la dimension, de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ elle en forme une base.

Attention
Montrer que deux Vect sont égaux ne suffit pas à montrer la liberté d'une famille.

b. Comme $\begin{pmatrix}6&4\\0&4\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on sait que les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont uniques. Il suffit de les trouver.
Soient $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ces coordonnées.
Alors,

$$\begin{pmatrix}6&4\\0&4\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases}\alpha+\beta+\gamma+\delta=6\\ 2\beta+2\gamma+2\delta=4\\ 3\gamma+3\delta=0\\ 4\delta=4\end{cases} \underset{\text{triangulaire}}{\iff} \begin{cases}\alpha=4\\ \beta=2\\ \gamma=-1\\ \delta=1.\end{cases}$$

En conclusion, les coordonnées de $\begin{pmatrix}6&4\\0&4\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(4,2,-1,1)$.

3. a. Le même raisonnement que celui mené à l' exercice (II.11) -question (1.) montre que $\mathcal{F}$ est une famille libre.

b. $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[x]$, dimension 3. Étant composée de 3 vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

c. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ le triplet de coordonnées de X dans $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{X} &= a(\mathrm{X}-\mathbb{1})(\mathrm{X}+\mathbb{1})+b(\mathrm{X}+\mathbb{1})(\mathrm{X}-2\mathbb{1})+c(\mathrm{X}-\mathbb{1})(\mathrm{X}-2\mathbb{1})\\ \forall\, x\in\mathbb{R},\ x &= a(x-1)(x+1)+b(x+1)(x-2)+c(x-1)(x-2)\end{aligned}$$

Attention
Développer est toujours une mauvaise idée.

En évaluant en 2, on a :

$$2=3a \iff a=\frac{2}{3}.$$

En évaluant en 1, on a :

$$1=-2b \iff b=-\frac{1}{2}.$$

En évaluant en -1, on a :

$$-1=6c \iff c=-\frac{1}{6}.$$

Les (uniques) coordonnées de X dans la base $\mathcal{F}$ sont donc $\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{2},-\frac{1}{6}\right)$.

Correction de l'exercice II.13 : [Énoncé]

Dans $\mathbb{R}^3$, on note $a=(1,1,3), b=(1,0,2), c=(2,1,5), d=(3,2,8), \mathrm{E}_1=\text{Vect}\,(a,b)$ et $\mathrm{E}_2=\text{Vect}\,(c,d)$.

1. Les deux vecteurs étant non colinéaires, on montre facilement que la famille (a, b) est une base de E_1 et que la famille (c, d) en est une de E_2.
   Ainsi $\dim(\mathrm{E}_1) = \dim(\mathrm{E}_2) = 2$.
2. Il suffit de montrer que c et d sont combinaisons linéaires de la famille (a, b).
   Or, $c = 1.a + 1.b$ et $d = 2.a + 1.b$ donc $c \in \mathrm{E}_1$ et $d \in \mathrm{E}_1$.
3. Comme $c \in \mathrm{E}_1$ et $d \in \mathrm{E}_1$ alors $\mathrm{E}_2 = \mathrm{Vect}(c, d) \subset \mathrm{E}_1$ car, par définition, $\mathrm{Vect}(c, d)$ est le plus petit sous-espace vectoriel au sens de l'inclusion contenant c et b.
   Ainsi, $\mathrm{E}_2 \subset \mathrm{E}_1$.
   Comme $\dim(\mathrm{E}_1) = \dim(\mathrm{E}_2)$, on en déduit $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2$.

Correction de l'exercice II.14 : [Énoncé]

On pourrait montrer que E est non vide et stable par combinaisons linéaires mais on peut aussi montrer que c'est un Vect donc un espace vectoriel. On pourra même en préciser sa base puis sa dimension

1. $$\begin{aligned}\mathrm{E} &= \left\{\mathrm{M}(a,b) \,/\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b & -b & -2b \\ 2b & -b & -4b \\ -b & b & 3b \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{Vect}(\mathrm{I}, \mathrm{A}).\end{aligned}$$
   E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ en tant que sous-espace vectoriel engendré.
2. La famille (I, A) est constituée de deux vecteurs non colinéaires donc libre. Elle engendre $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}, \mathrm{A})$ par définition donc en forme une base et et $\dim(\mathrm{E}) = 2$.

DM 2 D'après Ecricome et Edhec

Exercice 1 – (D'après ECRICOME 2025) :

On considère la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On note O_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{E_C}$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{CM} + \mathrm{MC} = \mathrm{O}_3$.

1. Déterminer les ensembles $\mathrm{E}_{\mathrm{O}_3}$ et $\mathrm{E}_{\mathrm{I}_3}$.
2. Montrer que, pour toute matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble $\mathrm{E_C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Soit M une matrice de $\mathrm{E_A}$. Montrer que ${}^t\mathrm{M}$ appartient à $\mathrm{E_A}$.
4. a. **(khûbe)** Justifier que A est diagonalisable.

   b. **(khûbe)** Soit λ un réel. Montrer que si λ est valeur propre de A alors :

   $$\lambda^3 - 9\lambda = 0$$

   c. **(khûbe)** Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont classés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1, telles que $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.

Dans toute la suite de l'exercice, D et P désignent les matrices introduites à la question 4.(c).

En attendant de savoir faire les trois questions précédentes, on admettra pour la suite que :

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Calculer P^2. En déduire une expression de P^{-1}.
6. a. Soit $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que N appartient à $\mathrm{E_D}$ si et seulement si $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   b. En déduire une base $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel $\mathrm{E_D}$ et préciser la dimension de $\mathrm{E_D}$.
7. a. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $\mathrm{N} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$. Montrer que M appartient à $\mathrm{E_A}$ si et seulement si N appartient à $\mathrm{E_D}$.

b. En déduire une base de l'espace vectoriel $\mathrm{E_A}$ exprimée à l'aide de P et des matrices de $\mathcal{B}$.

8. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $(\mathrm{A}+\mathrm{M})^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{M}^2$. On ne cherchera pas à expliciter les coefficients de M.

9. Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ \varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} + \mathrm{MA}$. En utilisant certains résultats des questions précédentes, déterminer le rang de φ.

Exercice 2 – (D'après EDHEC 2024) :

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel.

On pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}\,dx$$

et on a en particulier $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4-x^2}\,dx$.

1. a. Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall\, x \in [0,1],\quad \frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x}$$

b. En déduire que $u_0 = \dfrac{1}{4}\ln(3)$.

2. Calculer u_1.

3. a. Pour tout entier naturel n, exprimer $4u_n - u_{n+2}$ explicitement en fonction de n.

b. Compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)`.

Éditeur
```python
def suite(n):
    if (-1)**n == 1:
        u = np.log(3) / 4
        for k in range(2, n + 1, 2):
            u = 4 * u - ...
    else:
        u = np.log(2 / np.sqrt(3))
        for k in range(3, n + 1, 2):
            u = 4 * u - ...
    return u
```

4. a. Utiliser la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour établir l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \frac{1}{4(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{3(n+1)}$$

b. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

c. La série de terme général u_n est-elle convergente ou divergente ? Pour quelle raison ?

5. a. On considère le script suivant qui utilise la fonction déclarée plus haut :

Éditeur
```python
x = np.arange(0, 41)
u = []  # liste vide
```

Éditeur
```
3  for n in range(41):
4      u.append(3 * n * suite(n))
5
6  plt.plot(x, u, '+')
7  plt.show()
```

Ce script renvoie le graphique représentant $(3nu_n)$ en fonction de n.

Laquelle des quatre conjectures suivantes peut-on émettre quant au comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$?

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

b. Établir, grâce à une intégration par parties, l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx$$

c. Montrer par encadrement que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx = 0$$

d. Vérifier la conjecture établie à la question 5a).

Khôlles 2 Espaces vectoriels

1. Questions de Cours (Au choix de l'interrogateur)

Rappels de première année & Sous-espaces vectoriels

1. **Structure d'espace vectoriel**
   - Rappeler les axiomes définissant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathrm{E}, +, \cdot)$. Quels sont les espaces vectoriels usuels de référence ?
   - Énoncer la propriété d'unicité du vecteur nul $\overrightarrow{0_{\mathrm{E}}}$ et de l'opposé d'un vecteur. Caractériser l'égalité $\lambda \cdot x = 0_{\mathrm{E}}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathrm{E}$.
2. **Sous-espaces vectoriels (sev)**
   - Donner la définition et les trois conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une partie non vide $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ soit un sous-espace vectoriel de E.
   - Que peut-on dire de l'intersection $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$?
   - Montrer que l'ensemble des fonctions paires sur $\mathbb{R}$ et l'ensemble des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels.
3. **Sous-espaces vectoriels engendrés**
   - Définir la notion de combinaison linéaire d'une famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs.
   - Définir $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et énoncer le théorème fondamental sur la nature de cet ensemble.
   - Simplifier l'expression de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ lorsque e_{n+1} est combinaison linéaire de $(e_1, \dots, e_n)$.

Bases, Dimension et Rang

1. **Familles libres, génératrices et bases**
   - Définir une famille génératrice, une famille libre et une base de E.
   - Rappeler les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
   - Quels critères rapides permettent d'affirmer qu'une famille de polynômes ou qu'une famille de matrices colonnes est libre ?
2. **Dimension finie**
   - Définir un espace vectoriel de dimension finie ainsi que sa dimension $\dim(\mathrm{E})$.
   - Rappeler la dimension des espaces usuels ($\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$).
   - Soit E un espace de dimension $n \geqslant 1$. Énoncer les corollaires sur les familles libres ou génératrices à n éléments.
   - Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace E de dimension finie. Comparer $\dim(\mathrm{F})$ et $\dim(\mathrm{E})$ et traiter le cas d'égalité.

3. **Coordonnées et Rang**
   - — Définir la matrice des coordonnées $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ d'un vecteur x dans une base $\mathcal{B}$.
   - — Définir le rang $\mathrm{rg}(e_1, \dots, e_n)$ d'une famille de vecteurs. Quelle est sa valeur maximale dans un espace de dimension p ?
4. **Inversibilité des matrices**
   - — Énoncer les caractérisations équivalentes de l'inversibilité d'une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à l'aide du système $\mathrm{AX} = 0_{n,1}$ et de la famille de ses colonnes.

2. Exercices Types & Savoir-faire attendus

1. Sous-espaces vectoriels & Familles engendrées :
   a. **Structure d'ensemble de matrices :** Soit $\mathrm{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a & a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
      i. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en l'écrivant sous la forme d'un sous-espace engendré $\mathrm{Vect}(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2)$.
      ii. En déduire une base et la dimension de F.
   b. **Commutateur d'une matrice :** Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{E_A} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{AM} = \mathrm{MA}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Liberté, Génération & Bases :
   a. **Base de polynômes :** On pose $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 1 + x$ et $f_3(x) = 1 + x + x^2$. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ en utilisant l'échelonnement en degré.
   b. **Matrice des coordonnées :** Pour la fonction $\mathrm{P}(x) = 2 + x + x^2$, déterminer sa matrice représentative $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{P})$ dans la base $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$.
3. Noyau d'une matrice, Rang & Inversibilité :
   a. **Espace des solutions :** Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre le système $\mathrm{AX} = 0_{3,1}$ et en déduire une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{F} = \{\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{AX} = 0_{3,1}\}$. La matrice A est-elle inversible ?
   b. **Calcul de rang :** Déterminer le rang de la famille de vecteurs suivante de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:
   $$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$
4. Applications linéaires & Endomorphismes usuels :
   a. **(khûbe) Vérification d'application linéaire :** Soit l'application $f : \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ définie par
   $$f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} + 1) - \mathrm{P}(\mathrm{X}).$$
      i. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
      ii. Déterminer $\ker(f)$ en résolvant $f(\mathrm{P}) = 0$.

iii. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et en déduire le rang de f.

b. **Projecteur :** Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(x, y, z) = (2x - y, x, z)$.

i. Déterminer la matrice A de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

ii. Calculer $\mathrm{A}^2 - 3\mathrm{A} + 2\mathrm{I}_3$.

5. Sommes directes & Équivalences de caractérisations :

a. **Supplémentaires dans un espace de matrices :** Soit $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

i. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0_{n,n}\}$.

ii. Pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, écrire M sous la forme $\mathrm{M} = \mathrm{S} + \mathrm{A}$ avec $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

iii. En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

b. **(khûbe) Familles de polynômes étagés :** Soit $(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tels que $\deg(\mathrm{P}_k) = k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

i. Démontrer que la famille $(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n)$ est libre.

ii. En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Corrigés

DS 1 — Espaces vectoriels et Séries

19/09/2026

Durée : 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le sujet est composé de 3 exercices indépendants.

Exercice 1 – (inspiré de EDHEC 2016)

On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. a. Calculer $(A+I)^2$.

   b. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. On note $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

   a. Résoudre l'équation $AX = -X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   b. En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.

3. On note $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

   a. Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

   b. Montrer que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{T}$ où T est la matrice triangulaire supérieure $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   c. Démontrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^n\mathrm{P} = \mathrm{T}^n$.

4. a. Exhiber une matrice $\mathrm{N} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $\mathrm{T} = -\mathrm{I} + \mathrm{N}$.

   b. Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
   Le résultat devra faire apparaître T^n comme combinaison linéaire de I et de N.

   d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T.

5. a. Expliquer pourquoi l'on a : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}^n = (-1)^{n+1}((n-1)\mathrm{I} + n\mathrm{A})$.

   b. Vérifier que la formule trouvée à la question 5.a) reste valable pour $n = -1$.

Exercice 2

1. Quelle est la nature des séries $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}$ et $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^2}$?

2. Écrire une fonction `Python` qui prend en paramètre un entier n et renvoie $S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}$, somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^2}$.

3. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle.
Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k \qquad v_n = \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k$$
$$= a_0 - a_1 + \ldots - a_{2n-1} + a_{2n} \qquad = a_0 - a_1 + \ldots + a_{2n} - a_{2n+1}$$

$$\text{et} \quad s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$$
$$= a_0 - a_1 + \ldots - a_{n-1} + a_n$$

   a. Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et que la suite (v_n) est croissante.

   b. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_0 \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant u_0$.
   En déduire que la suite (u_n) admet une limite s et que la suite (v_n) admet la même limite s.

   c. En déduire que la suite (s_n) converge vers s.

4. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ est convergente.

5. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente. On note $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}$ sa somme.

6. a. Établir, pour tout réel t positif et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n\frac{t^n}{1+t}.$$

   b. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^n\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

   c. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

   d. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}$.

Exercice 3

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Étude de fonction

1. a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

   b. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

On admettra pour la suite que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$ et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. a. Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :

   $$u : x \longmapsto (1-x)e^x - 1.$$

   b. Montrer : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$.

   c. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

   d. Dresser le tableau de variations de f.

   e. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.

4. a. Établir : $\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\ e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$.

   b. Montrer : $\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2\left(e^x - 1\right)^2}$.

   c. Montrer : $\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\ -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$.

   d. Établir : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$.

5. En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha)$.

6. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

7. Écrire un programme en `Python` qui calcule et affiche le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

8. Si on ne connaissait pas la valeur de α, comment aurait-on pu déterminer un entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$? Écrire l'appel correspondant en `Python`.

DS 1 Espaces vectoriels et Séries

Exercice 1 – (inspiré de EDHEC 2016)

1. Tout d'abord :

$$\mathrm{A}+\mathrm{I}=\begin{pmatrix}-5&2&-2\\-2&0&-1\\6&-3&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&2&-2\\-2&1&-1\\6&-3&3\end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}+\mathrm{I})^2&=\begin{pmatrix}-4&2&-2\\-2&1&-1\\6&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&2&-2\\-2&1&-1\\6&-3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\&=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

D'après la question précédente : $(\mathrm{A}+\mathrm{I})^2=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.
Or :

$$(\mathrm{A}+\mathrm{I})^2=\mathrm{A}^2+2\mathrm{A}+\mathrm{I} \quad \begin{matrix}\text{(car les matrices A}\\ \text{et I commutent)}\end{matrix}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathrm{A}^2+2\mathrm{A}+\mathrm{I}&=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\\ \text{donc } \mathrm{A}^2+2\mathrm{A}&=-\mathrm{I}\\ \text{et } \mathrm{A}(\mathrm{A}+2\mathrm{I})&=-\mathrm{I}\\ \text{ainsi } \mathrm{A}(-(\mathrm{A}+2\mathrm{I}))&=\mathrm{I}\end{aligned}$$

On en déduit que la matrice A est inversible, d'inverse $-(\mathrm{A}+2\mathrm{I})$.

$$\mathrm{A}^{-1}=-\mathrm{A}-2\mathrm{I}$$

a. a. Soit $\mathrm{X}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{AX} = -\mathrm{X} &\iff (\mathrm{A}+\mathrm{I})\mathrm{X} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} -4x + 2y - 2z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ 6x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \\
&\underset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \frac{1}{2}\mathrm{L}_1}{\iff} \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ 6x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \\
&\underset{\substack{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_3 + 3\mathrm{L}_1}}{\iff} \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
&\iff \{ \; z = -2x + y.
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{F} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,\middle|\, z = -2x + y \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2x + y \end{pmatrix} \,\middle|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
\mathrm{F} &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

b. D'après la question précédente : $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

L'ensemble F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

— engendre F,

— est libre car est constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

C'est donc une base de F.

3. a. On applique l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{array} \right| \left. \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue l'opération $\{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On effectue l'opération $\{L_3 \leftarrow L_3 - L_2$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure. De plus, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi cette réduite est inversible et il en est de même de la matrice initiale P.

On effectue les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}\right.$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Finalement : P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Tout d'abord, on a :

$$AP = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Enfin :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = T$$

Ainsi : $P^{-1}AP = T$.

c. Démontrons par récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : P^{-1}A^nP = T^n$.

Initialisation : D'une part : $P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I$.

D'autre part : $T^0 = I$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $P^{-1}A^{n+1}P = T^{n+1}$).

$$\begin{array}{rll} T^{n+1} & = T \times T^n & \\ & = P^{-1}AP \times P^{-1}A^nP & \text{d'après la question précédente} \\ & = P^{-1}A\left(PP^{-1}\right)A^nP & \\ & = P^{-1}AIA^nP = P^{-1}A^{n+1}P & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Synthèse : Ainsi, par principe de récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P^{-1}A^nP = T^n$.

4. a. D'après l'énoncé,
$$\mathrm{N} = \mathrm{T} + \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Tout d'abord : $\mathrm{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $\mathrm{N}^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

En conclusion : $\mathrm{N}^0 = \mathrm{I}, \mathrm{N}^1 = \mathrm{N}$ et pour tout $k \geqslant 2, \mathrm{N}^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

c. Les matrices $(-\mathrm{I})$ et N commutent car la matrice identité commute avec toutes les matrices carrées du même ordre. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton. Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}^n &= (-\mathrm{I} + \mathrm{N})^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\mathrm{I})^{n-k}\mathrm{N}^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\mathrm{I}^{n-k}\mathrm{N}^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\mathrm{I}\mathrm{N}^k \qquad (\text{ car } \forall\, j \in \mathbb{N}, \mathrm{I}^j = \mathrm{I}) \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\mathrm{N}^k + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\mathrm{N}^k \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\mathrm{N}^k \\
&= \binom{n}{0} (-1)^n\mathrm{N}^0 + \binom{n}{1} (-1)^{n-1}\mathrm{N}^1 \\
&= (-1)^n\mathrm{I} + n(-1)^{n-1}\mathrm{N} \\
&= (-1)^n \left(\mathrm{I} + (-1)^{-1}n\mathrm{N}\right) = (-1)^n(\mathrm{I} - n\mathrm{N})
\end{aligned}$$

Enfin : $(-1)^0(\mathrm{I} - 0 \cdot \mathrm{N}) = \mathrm{I}$ et $\mathrm{T}^0 = \mathrm{I}$.

La formule précédente reste valable pour $n = 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathrm{T}^n = (-1)^n(\mathrm{I} - n\mathrm{N})$.

d. Comme $\mathrm{N} = \mathrm{T} + \mathrm{I}$, on obtient :

$$(-1)^n(\mathrm{I} - n\mathrm{N}) = (-1)^n(\mathrm{I} - n(\mathrm{T} + \mathrm{I})) = (-1)^n((1-n)\mathrm{I} - n\mathrm{T}) = (-1)^n(-(n-1)\mathrm{I} - n\mathrm{T}).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{T}^n = (-1)^{n+1}((n-1)\mathrm{I} + n\mathrm{T})$.

5. a. Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question précédente, $\mathrm{T}^n = (-1)^{n+1}((n-1)\mathrm{I} + n\mathrm{T})$.

Or : $\mathrm{A}^n = \mathrm{P}\mathrm{T}^n\mathrm{P}^{-1}$. En combinant ces deux informations, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}^n = \mathrm{P}\mathrm{T}^n\mathrm{P}^{-1} &= \mathrm{P}\left((-1)^{n+1}((n-1)\mathrm{I} + n\mathrm{T})\right)\mathrm{P}^{-1} \\
&= (-1)^{n+1}\left((n-1)\mathrm{P}\mathrm{P}^{-1} + n\mathrm{P}\mathrm{T}\mathrm{P}^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}^n = (-1)^{n+1}((n-1)\mathrm{I} + n\mathrm{A})$.

b. Si $n = -1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+1}((n-1)\mathrm{I} + n\mathrm{A}) &= (-1)^{-1+1}((-1-1)\mathrm{I} + (-1)\mathrm{A}) \\
&= (-2\mathrm{I} - \mathrm{A}) = -\mathrm{A} - 2\mathrm{I}
\end{aligned}$$

Ainsi, la formule trouvée à la question 5.a) reste valable pour $n = -1$.

Exercice 2

1. Tout d'abord :

   — $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{n+1} \geqslant 0$.

   — $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

   — La série $\sum \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant $1 (1 > 1)$. Elle est donc divergente.

   Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{1}{n+1}$ diverge.

   Ensuite :

   — $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$.

   — $\dfrac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

   — La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 (2 > 1)$. Elle est donc convergente.

   Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{1}{(n+1)^2}$ converge.

2.

Éditeur

```
1  def somme(n) :
2      S = 0
3      for k in range(n+1) :
4          S = S + 1 / (k+1)**2
5      return S
```

Détaillons les éléments de ce programme.

Début du programme : Conformément à l'énoncé, on commence par préciser la structure de la fonction :

- cette fonction se nomme somme,
- elle prend en paramètre la variable n,
- elle admet pour variable de sortie la variable S.

On initialise ensuite la variable S à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation).

Structure itérative : Les lignes 3 à 4 consistent à mettre à jour la variable S pour qu'elle contienne la quantité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}$.
Pour cela, on utilise une structure conditionnelle (boucle for) :

Fin du programme : À l'issue de cette boucle, la variable S contient la quantité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}$.

Commentaire : Il est aussi possible de proposer une fonction tirant parti des fonctionnalités de Python :

Éditeur
```python
def somme(n) :
    S = [ 1/(k+1)**2 for k in range(n+1) ]
    S = sum(S)
    return S
```

3. a. Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \sum_{k=0}^{2(n+1)}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k \\
&= \sum_{k=0}^{2n+2}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k \\
&= \left(\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k + (-1)^{2n+1}a_{2n+1} + (-1)^{2n+2}a_{2n+2}\right) - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k \\
&= -a_{2n+1} + a_{2n+2} \quad (\text{ car } 2n+1 \text{ impair et } 2n+2 \text{ pair })
\end{aligned}$$

Comme la suite (a_n) est décroissante, alors : $a_{2n+2} \leqslant a_{2n+1}$, et donc : $a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0$.
Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est décroissante.
De même :

$$\begin{aligned}
v_{n+1}-v_n &= \sum_{k=0}^{2(n+1)+1}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k \\
&= \sum_{k=0}^{2n+3}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k \\
&= \left(\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k + (-1)^{2n+2}a_{2n+2} + (-1)^{2n+3}a_{2n+3}\right) - \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k \\
&= a_{2n+2} - a_{2n+3} \quad (\text{ car } 2n+2 \text{ pair et } 2n+3 \text{ impair })
\end{aligned}$$

Comme la suite (a_n) est décroissante, alors : $a_{2n+2} \geqslant a_{2n+3}$, et donc : $a_{2n+2} - a_{2n+3} \geqslant 0$.
Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_{n+1} \geqslant v_n$. La suite (v_n) est croissante.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord : $v_n - u_n = \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{2n+1}a_{2n+1} \\
&= -a_{2n+1} \leqslant 0 \qquad (\text{car } (a_n) \text{ est une suite})
\end{aligned}$$

On en déduit : $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant u_n$.

- La suite (v_n) étant croissante, on en déduit :

$$\forall\, n \geqslant 0, v_n \geqslant v_0$$

On en déduit, par transitivité : $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_0 \leqslant v_n \leqslant u_n$.
La suite (u_n) est décroissante et minorée par v_0. Elle converge donc vers une limite ℓ_1.

- On raisonne de manière similaire pour (v_n).
La suite (u_n) étant décroissante, on en déduit : $\forall\, n \geqslant 0, u_n \leqslant u_0$.
Puis, par transitivité : $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant u_n \leqslant u_0$.
La suite (v_n) est croissante et majorée par u_0. Elle converge donc vers une limite ℓ_2.

i. Il reste à démontrer : $\ell_1 = \ell_2$. Les suites (u_n) et (v_n) étant convergentes, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_2 - \ell_1$$

Finalement :

$$\begin{matrix}\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \\ \ell_2 - \ell_1\end{matrix} \quad \begin{matrix}\lim\limits_{n\to+\infty} -a_{2n+1} \\ 0\end{matrix}$$

Ainsi, on a bien : $\ell_1 = \ell_2$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc convergentes vers la même limite que l'on note s.

c. On remarque tout d'abord :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = s_{2n} \quad \text{et} \quad v_n = s_{2n+1}$$

Soit I un intervalle ouvert contenant s.

- Comme $s_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} s$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (s_{2n}) (i.e. tous les termes d'indices pairs de la suite (s_n)) sauf un nombre fini d'entre eux.
- Comme $s_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} s$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (s_{2n+1}) (i.e. tous les termes d'indices impairs de la suite (s_n)) sauf un nombre fini d'entre eux.

On en déduit que l'intervalle I contient tous les termes de la suite (s_n) sauf un nombre fini d'entre eux.

Ceci signifie que la suite (s_n) est convergente de limite s.

4. D'après la question 3.c), la suite (s_n) des sommes partielles de la série $\sum (-1)^n a_n$ converge, donc la série converge.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \dfrac{1}{n+1}$.

La suite (a_n) est une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle.

D'après la question 4, la série $\sum (-1)^n a_n$ (autrement dit la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$) est convergente.

6. a. Soient $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k$$

On reconnaît la somme des termes d'un suite géométrique de raison $-t$.

Comme $-t \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-t)^n}{1+t} = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On intègre l'égalité précédente entre 0 et 1 .

- D'une part, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^k \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

- D'autre part, toujours par linéarité :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

De plus :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = [\ln(|1+t|)]_0^1 = \ln(|2|) - \ln(|1|) = \ln(2)$$

Finalement : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$

c. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$.

- Par inégalité triangulaire, les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre croissant :

$$\left|\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{t^n}{1+t}\right|\mathrm{d}t$$

- Or : $\left|\dfrac{t^n}{1+t}\right| = \dfrac{|t^n|}{|t+1|} = \dfrac{|t|^n}{|t+1|} = \dfrac{t^n}{t+1}$ car $t > 0$ et $t+1 > 0$.
- De plus, comme $t > 0, 1+t > 1, \dfrac{1}{t+1} < 1$ et $\dfrac{t^n}{1+t} < t^n$.
- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant, on en déduit :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t < \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Par transitivité, on obtient bien : $\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question 6.c) :

$$\left|(-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| = |(-1)^n| \left|\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

On en déduit :

$$-\frac{1}{n+1} \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+1}$$

- Or :

$$\times -\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\times \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit : $(-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Tous les objets considérés admettant une limite, on en déduit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \lim_{n\to+\infty} \ln(2) - \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(2)$$

Exercice 3

Étude de fonction

1. a. — La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ car elle est le quotient $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ où :

   ◇ $f_1 : x \longmapsto x$ est continue sur $]0,+\infty[$ car polynomiale.

   ◇ $f_2 : x \longmapsto e^x - 1$ est continue sur $]0,+\infty[$, NE S'ANNULE PAS sur $]0,+\infty[$.

   — Par un raisonnement analogue, la fonction f est continue sur $]-\infty,0[$.
   On en conclut que f est continue sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.

   — De plus, la fonction f est continue en 0 . En effet :

   — d'une part :
   $$\frac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$$

   — d'autre part : $f(0) = 1$.
   Ainsi, on obtient bien : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

   On en conclut que f est continue sur $\mathbb{R}$.

   b. Par un raisonnement similaire à celui de la question précédente (on remplace « continue » par « de classe $\mathcal{C}^1$ »), on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.
   Soit $x \in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.
   $$f'(x) = \frac{(e^x-1)-xe^x}{(e^x-1)^2} = \frac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}$$
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{(e^x-1)-xe^x}{(e^x-1)^2} = \frac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}$$

2. a. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$:
   $$u'(x) = -xe^x.$$
   Comme $e^x > 0, u'(x)$ est du signe de $-x$, on en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-1	↗	0	↘	$-\infty$

   Détaillons les éléments de ce tableau.

   ◇ Tout d'abord : $u(0) = (1-0)e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$.

   ◇ Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$u(x) = (1-x)e^x - 1 = e^x - xe^x - 1.$$

Or, par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

D'où, comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -1$.

◇ Enfin : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$.

b. ◇ Remarquons tout d'abord : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \dfrac{u(x)}{(e^x-1)^2}$.

◇ D'après la question précédente, la fonction u est croissante sur $]-\infty, 0\,]$ et décroissante sur $]0, +\infty[$. Elle admet donc un maximum en 0. On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u(x) \leqslant u(0) = 0$$
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, u(x) \leqslant 0$$

◇ Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{u(x)}{(e^x-1)^2} < 0.$$

En effet : $(e^x-1)^2 > 0$ et $u(x) < 0$ sur $\mathbb{R}^*$.

◇ Enfin, $f'(0) = -\dfrac{1}{2} < 0$ d'après l'énoncé.

Finalement : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$.

c. ◇ Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1$.

De plus : $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.

On en déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

◇ Ensuite :

$$f(x) = \frac{x}{e^x-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{e^x}.$$

Or, par croissances comparées : $\dfrac{x}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

◇ Avec la question 2.b), on obtient le tableau de variations suivant :

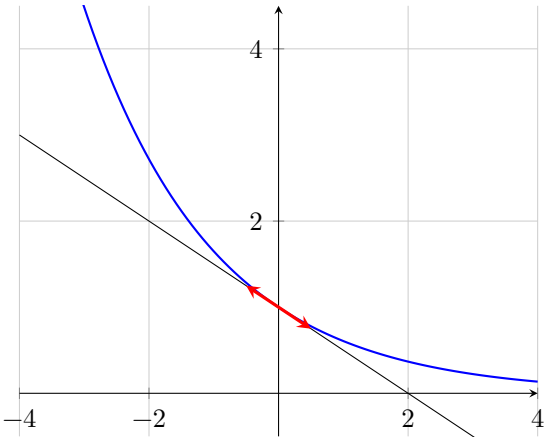
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
f	$+\infty$	↘	1	↘	0

d. Tout d'abord, déterminons l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.

Il s'agit de la droite d'équation :

$$y = f(0) + f'(0)(x-0)$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x$$

On obtient le graphe suivant :



Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

   ◇ Si $x \in \mathbb{R}^*$, alors :

   $$\begin{aligned} & f(x) = x \\ \Leftrightarrow & \frac{x}{e^x - 1} = x \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{e^x - 1} = 1 \quad (\text{ car } x \neq 0) \\ \Leftrightarrow & e^x - 1 = 1 \\ \Leftrightarrow & e^x = 2 \\ \Leftrightarrow & x = \ln(2) \end{aligned}$$

   ◇ Si $x = 0$, alors : $f(0) = 1$.
   On en déduit que 0 n'est pas un point fixe de f.

   La fonction f admet pour unique point fixe $\alpha = \ln(2)$.

4. a. Considérons la fonction $g : x \longmapsto e^{2x} - 2xe^x - 1$.
   La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $$g'(x) = 2e^x\left(e^x - 1 - x\right)$$

   Déterminons le signe de $g'(x)$.

   ◇ Comme $e^x > 0, g'(x)$ est du signe de $e^x - 1 - x$.

   ◇ Or la fonction $h : x \longmapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
   On en déduit que sa courbe représentative $\mathcal{C}_h$ se situe au-dessus de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 0.
   Or, cette tangente est la droite d'équation :

   $$\begin{aligned} y &= h(0) + h'(0)(x - 0) \\ &= e^0 + e^0 x = 1 + x \end{aligned}$$

   Ainsi : $\forall\, x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x$. D'où :

   $$e^x - 1 - x \geqslant 0$$

On en déduit : $\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) \geqslant 0$.

La fonction g est donc croissante. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g(x) \geqslant g(0) = 0$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$.

b. Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) + \frac{1}{2} &= \frac{(1-x)e^x - 1}{\left(e^x - 1\right)^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2(1-x)e^x - 2 + \left(e^x - 1\right)^2}{2\left(e^x - 1\right)^2} \\ &= \frac{2e^x - 2xe^x - 2 + e^{2x} - 2e^x + 1}{2\left(e^x - 1\right)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2\left(e^x - 1\right)^2} \end{aligned}$$

$$\forall\, x \in]0, +\infty\left[, f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2\left(e^x - 1\right)^2}.\right.$$

c. Soit $x \in [0, +\infty[$.

◇ Tout d'abord, d'après la question 2. a) :

$$f'(x) < 0.$$

◇ Démontrons : $-\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x)$. Deux cas se présentent :

× si $x \neq 0$, alors, d'après la question précédente :

$$f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2\left(e^x - 1\right)^2}$$

Comme $2\left(e^x - 1\right)^2 > 0$, on en déduit que $f'(x) + \dfrac{1}{2}$ est du signe de $g(x)$.

Or, d'après la question 2. a) : $g(x) \geqslant 0$. On en déduit :

$$f'(x) + \frac{1}{2} \geqslant 0.$$

× si $x = 0$, alors :

$$f'(0) = -\frac{1}{2} \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Finalement : $\forall\, x \in \left[0, +\infty\right[, f'(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

On en déduit : $\forall\, x \in \left[0, +\infty\right[, -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$.

d. D'après les questions précédentes :

◇ f est dérivable sur $[0, +\infty[$,

◇ $\forall\, x \in \left[0, +\infty\right[, |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

En effet, d'après la question précédente, pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\begin{array}{rl} & -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0 \\ \text{donc} & -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \text{c'est-à-dire} & |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2} \end{array}$$

On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall\, (x,y) \in \left[0, +\infty\right[^2, |f(y) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|y - x|$$

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite appliquer cette inégalité à $y = u_n$ et $x = \alpha$.
Pour cela, vérifions que ces deux termes appartiennent à l'intervalle $[0, +\infty[$.
D'après le tableau de variations de la question 2.c), $[0, +\infty[$ est un intervalle stable de f. De plus : $u_0 = 1 \geqslant 0$.
Ainsi, par récurrence immédiate : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, +\infty[$.
D'après la question 3. : $\alpha = \ln(2) \in [0, +\infty[$.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$.
En appliquant donc l'inégalité précédente à $y = u_n \in [0, +\infty[$ et $x = \alpha \in [0, +\infty[$, on obtient :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

◇ Or :

- $f(u_n) = u_{n+1}$, par définition de la suite (u_n),
- $f(\alpha) = \alpha$, car α est un point fixe de f.

On en déduit : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

5. Démontrons par récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)$.

Initialisation : a. D'une part, d'après la question 3. : $\dfrac{1}{2^0}(1 - \alpha) = 1 - \ln(2)$.

b. D'autre part, comme $u_0 = 1$:

$$|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| = |1 - \ln(2)| = 1 - \ln(2)$$

En effet : $1 - \ln(2) \geqslant 0$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}(1 - \alpha)$).

D'après la question 2.d) :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

Or, par hypothèse de récurrence :

$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}(1 - \alpha)$$

En combinant ces deux résultats, on obtient :

$$|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n}(1-\alpha) = \frac{1}{2^{n+1}}(1-\alpha)$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Synthèse : Par principe de récurrence :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}, |u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}(1-\alpha).$$

6. D'après la question précédente : $\forall\, n\in\mathbb{N}, |u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}(1-\alpha)$. Ainsi :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}, -\frac{1}{2^n}(1-\alpha) \leqslant |u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}(1-\alpha)$$

Or :

— $-\frac{1}{2^n}(1-\alpha)\to 0$ car $\frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $2^{n+1}\to+\infty$

— $\frac{1}{2^n}(1-\alpha)\to 0$.

Ainsi, par théorème d'encadrement : $|u_n-\alpha| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ceci équivaut à : $u_n-\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit que la suite (u_n) est convergente de limite α.

7.

Éditeur

```
1  n = 0
2  u = 1
3  while abs(u - np.log(2)) >= 10**(-9) :
4      u = u / (np.exp(u) - 1)
5      n = n + 1
6  print(n)
```

Détaillons les éléments de ce programme.

Début du programme : La variable n est initialisée à 0.

La variable u, qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n), est initialisée à $u_0=1$.

Structure itérative : Les lignes 3 à 5 consistent à déterminer le plus petit entier n tel que $|u_n-\alpha|<10^{-9}$.

On doit donc calculer les valeurs successives de la suite (u_n) jusqu'à ce que $|u_n-\alpha|<10^{-9}$.

Autrement dit, on doit calculer ces valeurs successives tant que $|u_n-\alpha|\geqslant 10^{-9}$.

Pour cela, on met en place une structure itérative `while` :

Tant que $|u_n-\alpha|\geqslant 10^{-9}$, on calcule u_{n+1} et on stocke toujours cette valeur dans la variable u :

On met alors à jour en conséquence la variable n : on ajoute 1 pour signaler qu'on a calculé u_{n+1}.

Fin du programme : À l'issue de cette boucle, la variable n contient le plus petit entier n tel que $|u_n-\alpha|<10^{-9}$.

On affiche alors enfin la valeur de la variable n.

8. On souhaite exhiber $N\in\mathbb{N}$ tel que :

$$|u_n-\alpha|<10^{-9}$$

Or, d'après la question 5., pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}(1-\alpha)$$

Comme $\alpha \geqslant 0$, on obtient : $1 - \alpha \leqslant 1$. D'où :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}(1-\alpha) \leqslant \frac{1}{2^n}$$

Il suffit alors de trouver $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{1}{2^{\mathrm{N}}} \leqslant 10^{-9}$.
Si c'est le cas, on obtient alors par transitivité :

$$|u_{\mathrm{N}} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{\mathrm{N}}} \leqslant 10^{-9}$$

Déterminons alors un entier N vérifiant : $\dfrac{1}{2^{\mathrm{N}}} \leqslant 10^{-9}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-9} \\ \Leftrightarrow \quad & 2^n \geqslant 10^9 && \text{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\,) \\ & && \text{(par stricte croissance de la fonction ln sur }]0,+\infty[\,) \\ \Leftrightarrow \quad & n\ln(2) \geqslant 9\ln(10) && (\text{ car } \ln(2) > 0) \end{aligned}$$

L'entier $\mathrm{N} = \left\lceil \dfrac{9\ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil$ convient.
On obtient l'entier cherché par l'appel : `np.ceil(9 * np.log(10) / np.log(2))`.

Remarque : Si on ne connaît pas α et qu'on souhaite en calculer une approximation à 10^{-9} près, on pourra alors procéder comme suit.

Éditeur
```
N = np.ceil(9 * np.log(10) / np.log(2))
u = 1
for i in range(N) :
    u = u / (np.exp(u) - 1)
print(u)
```

Programme Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Ce que dit le programme en ECG2 :

1 – Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Étude de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.	On remarquera le cas où f est croissante.
Notion de point fixe d'une application. Si (u_n) converge vers un réel ℓ et si f continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f.	On pourra illustrer cette partie du programme avec Python.

Ce que disait le programme en ECG1 :

1 – Suites usuelles : formes explicites

Suite vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2.	On se limitera au cas où l'équation caractéristique a des racines réelles.

2 – Calcul différentiel

Inégalités des accroissements finis.	Si $\lvert f' \rvert \leqslant k$ sur un intervalle I, alors : $\forall\,(a,b) \in \mathrm{I}^2, \quad \lvert f(b) - f(a) \rvert \leqslant k \lvert b - a \rvert$. Application, sur des exemples, à l'étude de suites récurrentes du type : $u_{n+1} = f(u_n)$ lorsque $\lvert f' \rvert \leqslant k < 1$. Tout exposé théorique sur les suites récurrentes générales est exclu.

III

Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Les exercices que l'on vous a proposés jusqu'ici ont pu vous donner l'impression que pour définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence, il suffisait de se donner une fonction f quelconque, un u_0 dans le domaine de définition de f, et de décréter simplement que « $u_{n+1} = f(u_n)$ ». Quelle illusion !

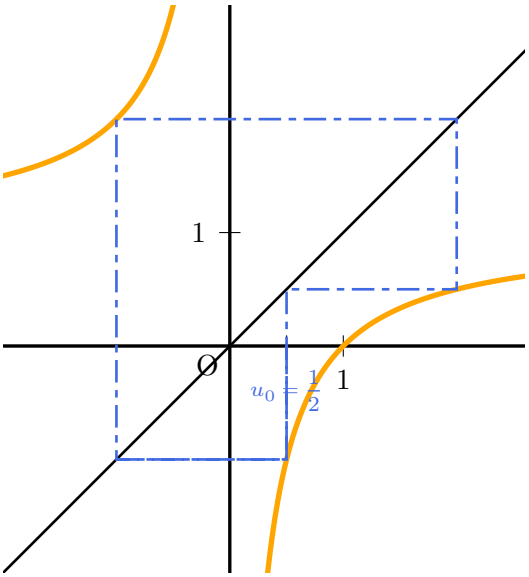


FIGURE III.1 : $u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{u_n}$ avec $u_0 = \dfrac{1}{2}$.

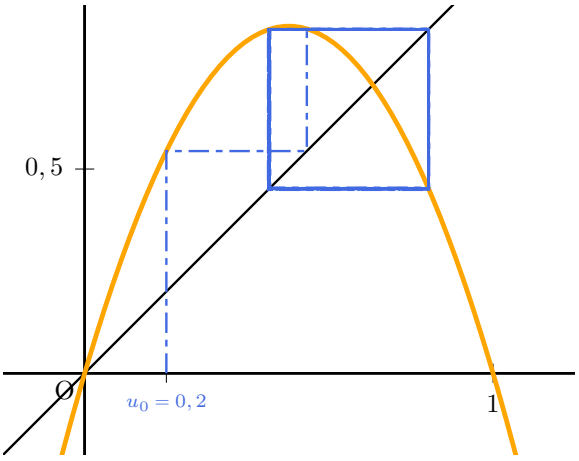


FIGURE III.2 : $u_{n+1} = 3,4u_n(1 - u_n)$ avec $u_0 = 0,2$.

FIGURE III.3 : Exemples de suites chaotiques. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède un cycle.

Notons par exemple f la fonction $x \longmapsto 2 + \sqrt{2 - x}$ définie sur $]-\infty\,;2]$ et posons :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Comme $u_0 \in]-\infty\,;2]$, on peut calculer $u_1 = f(u_0) = 3$, mais ensuite ???? Aucun sens ! Quelle valeur pour u_2 ?

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ici pas définie.

Pire, et seulement pour la culture car très éloigné de notre niveau, le théorème de Sharkovsky [1] sur les fonctions chaotiques a fait l'objet de recherche active lors des dernières décennies. On ne parle plus des siècles derniers ici et une simple suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [0\,;1] \\ u_{n+1} = 4\mu(1-u_n)u_n,\ \mu \in [0\,;1] \end{cases}$$

donne bien des soucis.

Mais comment différencier alors les exemples qui marchent de ceux qui ne marchent pas ? C'est le propos de ce chapitre.

Plan du chapitre

I Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ 317
- I.1 Plan d'étude classique 317
- I.2 Stabilité et définition 318
- I.3 Variations 319
- I.4 Convergence et point fixe 322
- I.5 L'inégalité des accroissements finis 324

II Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1 325

Test 3 : Suites récurrentes 327

Fiche 20 : Suites récurrentes – Dans le cas où f est croissante. 330

Fiche 21 : Suites récurrentes – Avec l'IAF 333

TD 4 : Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ 337
- III.1 Cas où f est croissante 337
- III.2 Cas où f est décroissante 338

DM 3 : Étude de fonction, suite réelle, fonction définie par une intégrale 344

Corrigé : Étude de fonction, suite réelle, fonction définie par une intégrale 348

[1]. Oleksandr Mykolayovych Sharkovsky est un éminent mathématicien ukrainien célèbre pour le développement du théorème de Sharkovsky sur les périodicités des systèmes dynamiques discrets en **1964**.

Le théorème de Sharkovsky est un théorème portant sur l'itération des fonctions continues.

Il donne des contraintes sur la présence de points périodiques lorsqu'on itère la fonction f, c'est-à-dire de points u_0 tels que la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ correspondante soit périodique.

Ce théorème fait partie des premiers exemples remarquables de la *théorie des systèmes dynamiques*, introduisant la notion de *chaos*. Sa popularité est telle qu'il se retient souvent sous la forme d'un « slogan », correspondant à un énoncé simplifié :

3-cycle implique chaos

Il faut comprendre par là que toute fonction continue présentant un cycle de période 3 admet un cycle de période n pour tout entier n.

I. Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

On s'intéresse dans cette partie à des suites définies par des relations de récurrence de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f\,(u_n) \end{cases} \qquad \text{où } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est une fonction donnée.}$$

I.1 – Plan d'étude classique

Aux concours (EML/EDHEC/ECRICOME), les exercices portant sur de telles suites suivent toujours le même schéma :

1. Étude de la fonction f.
2. Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Plus précisément, la partie sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ressemblera essentiellement à

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in$ I où I est un certain intervalle dit de stabilité
2. Écrire/compléter une fonction `Python` qui affiche les n premiers termes de la suite / le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante / décroissante.
4. Au choix :
   a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite ℓ.
   b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty / -\infty$.
5. Au choix :
   a. Écrire/compléter une fonction `Python` qui affiche le premier entier n vérifiant $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-4}$
   b. Écrire/compléter une fonction `Python` qui affiche le premier entier n vérifiant $u_n \geqslant 10^4$.
6. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \mathrm{M}\,|u_n - \ell|$.
   b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant \mathrm{M}^n\,|u_0 - \ell|$.

Exemple 1 – Un premier exemple simple :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en montrant que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

Ce résultat ce montre par récurrence :

Initialisation : Par définition, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{u_0 + 1} = \sqrt{2}$.
On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$ donc la propriété est initialisée.

Remarque
On en déduit aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n + 1 \geqslant 0$.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier n tel que

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$$
$$1 \leqslant u_n + 1 \leqslant u_{n+1} + 1 \leqslant 3 \qquad \text{(on ajoute 1)}$$
$$0 \leqslant \sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_n + 1} \leqslant \sqrt{u_{n+1} + 1} \leqslant \sqrt{3} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{on compose par } x \longmapsto \sqrt{x} \\ \text{qui est croissante sur } \mathbb{R}_+\end{array}\right)$$
$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \sqrt{3} \leqslant 2.$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : Initialisée à partir de $n = 0$ et héréditaire, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2. \qquad \text{(III.1)}$$

De la propriété (III.1), on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 2. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge donc vers une limite $\ell \leqslant 2$.

Attention
On ne connaît pas encore la limite qui n'est peut-être pas 2.

I.2 – Stabilité et définition

Pour répondre aux questions soulevées au début du paragraphe (I.1) , on recherche un intervalle I tel que :

1. $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$.
2. $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$
3. $u_0 \in \mathrm{I}$

Un tel intervalle est appelé *intervalle de stabilité*.

Idée
Trouver un segment $[a\,;b]$ sera notre saint graal.

Définition 1 – Intervalle stable :

On dit que l'intervalle $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$ est *stable* par f si $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.

Pour montrer qu'un intervalle est stable, on pourra :

— soit étudier la fonction f et le déduire de son tableau de variations,

— soit directement à l'aide d'inégalités.

Dans tous les cas et avant de commencer l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est impératif de faire l'étude de f, d'en dresser son tableau de variation et de tracer son graphe.

Proposition 1 – Existence de la suite :

Soit $f : \mathcal{D}_f \longmapsto \mathbb{R}$ et $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$ stable par f.

Si $u_0 \in \mathrm{I}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathrm{I}$.

Preuve : Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathcal{P}(n) : \text{«}u_n \text{ est bien définie et } u_n \in \mathrm{I}\text{»}$$

— On a $u_0 \in \mathrm{I}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons la propriété vraie au rang n.
On a par hypothèse de récurrence $u_n \in \mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$. Donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini.
De plus, comme I est un intervalle stable, $u_{n+1} \in f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$. D'où la propriété au rang $n+1$ et l'hérédité.

On conclut par principe de récurrence. ☑

Attention
Les relations
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$$
ne définissent pas une suite !

Exemple 2 :

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} v_0 = 8 \\ v_{n+1} = f(v_n) = \sqrt{v_n + 1} \end{cases}$ où, $f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$ la fonction associée est définie et strictement croissante de $[-1\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	-1 $\quad$ 1 $\qquad$ 8 $\qquad\qquad$ $+\infty$
f	0 — $\sqrt{2}$ — 3 — $+\infty$

Un intervalle de stabilité peut-être $[1\,;8]$, $[-1\,;8]$, $[1\,;+\infty[$ ou $[-1\,;+\infty[$ mais pas $[-1\,;1]$ ou $[8\,;+\infty]$.

I.3 – Variations

Proposition 2 – Lien avec les fonctions monotones :

Soit $f : \mathcal{D}_f \longmapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{I} \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

— Si f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et sa monotonie dépend de l'ordre de ses premiers termes :
  — Si $f(u_0) - u_0 \geqslant 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
  — Si $f(u_0) - u_0 \leqslant 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

— Si f est décroissante sur I, alors les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de monotonie contraire.

Globalement, l'idée vient de la définition d'une fonction croissante :

« f est croissante si, et seulement si elle conserve l'ordre ».

Si, par exemple, $u_0 > u_1$ alors $f(u_0) > f(u_1)$, c'est-à-dire $u_1 > u_2$ puis $u_2 = f(u_1) > u_3 = f(u_2)$, $\ldots u_n = f(u_{n-1}) > u_{n+1} = f(u_n)$, …et ainsi de suite pour tous les termes de la suite.

La suite est donc décroissante dans ce cas.

Preuve :

— Considérons une fonction quelconque f croissante sur son intervalle de définition et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que ses deux premiers termes soient, par exemple,

$$u_0 \leqslant u_1. \tag{III.2}$$

Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Posons donc la propriété $\mathcal{P}_n$: $u_n \leqslant u_{n+1}$.

Initialisation : D'après (III.2), $u_0 \leqslant u_1$ et $\mathcal{P}_0$ est réalisée.

Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}_k$ soit vraie pour un certain entier $k > 0$ et montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vérifiée sous cette hypothèse.

$u_k \leqslant u_{k+1}$	Hypothèse de récurrence	$\mathcal{P}_k$
$f(u_k) \leqslant f(u_{k+1})$	f est croissante donc conserve l'ordre	$\Downarrow$
$u_{k+1} \leqslant u_{k+2}$	Définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$\mathcal{P}_{k+1}$

La propriété $\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vérifiée. On a prouvé l'hérédité de la propriété.

Conclusion : La propriété $\mathcal{P}_n$, initialisée pour $n = 0$ et héréditaire, est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

La démonstration est analogue pour une suite telle que $u_0 \geqslant u_1$ qui serait décroissante.

— Dans le cas d'une fonction décroissante, posons $g = f \circ f$. Cette application est croissante sur I.
Posons alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Les deux suites vérifient

$$v_{n+1} = u_{2n+2} = g(u_{2n}) = g(v_n) \quad \text{et, de même,} \quad w_{n+1} = g(w_n).$$

Le point précédent permet alors d'en déduire que chacune des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
Supposons, par exemple, que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On peut donc écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant v_{n+1}$.
En appliquant la fonction f décroissante, on en déduit :

$$f(v_n) \geqslant f(v_{n+1}) \iff w_n \geqslant w_{n+1}.$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.
Si l'on supposait que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante, on en déduirait de la même manière que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
En conclusion, les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de monotonie contraire.

Exemple 3 :

Reprenons l' exemple (1) et l' exemple (2) .

La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x+1}$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on peut en déduire que :

— la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (monotone) croissante car $u_0 = 1 \leqslant u_1 = \sqrt{2}$.

— la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (monotone) décroissante car $v_0 = 8 \geqslant v_1 = 3$.

ATTENTION

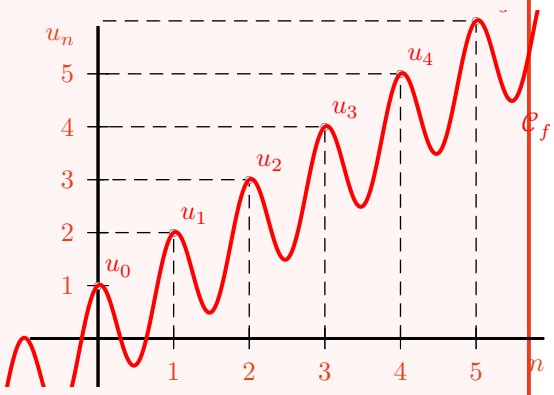
Pour les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$:

f (dé)croissante $\not\Longrightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (dé)croissante.

Considérez, par exemple, la fonction définie par $f(x) = x + \cos(2\pi x)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1, \\ u_{n+1} &= f(u_n) \\ &= u_n + \cos(2\pi u_n). \end{cases}$$

Un rapide raisonnement par récurrence montrerait que $u_n = n + 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et pourtant, f ne l'est pas le moins du monde.



Remarque : Les suites d'indice pair et impair sont donc associées à la fonction $g = f \circ f$ et définies par

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{2n+2} = g\left(u_{2n}\right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_1 \\ u_{2n+3} = g\left(u_{2n+1}\right) \end{cases}.$$

Méthode 1 – Suite récurrente associée à une fonction décroissante :

Dans le cas d'une fonction décroissante, il s'agira donc :

1. de considérer $g = f \circ f$ et de se ramener au cas g croissant pour conclure sur la monotonie des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. d'étudier le signe de la fonction $x \longmapsto g(x) - x$ pour déterminer la monotonie de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$:
   - si $g(u_0) - u_0 \geqslant 0$ (*resp.* $\leqslant 0$), $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (*resp.* décroissante).
   - si $g(u_1) - u_1 \leqslant 0$ (*resp.* $\geqslant 0$), $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (*resp.* croissante).

ATTENTION

Dans le cas où $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, on ne pourra pas en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Pour ce faire, il faudra, par exemple, montrer que ces deux suites sont adjacentes et/ou qu'elles convergent vers la même limite. Prouver une divergence pourra se faire en montrant qu'une sous-suite diverge ou que deux convergent vers des limites distinctes. Rien n'est, a priori, assuré.

I.4 – Convergence et point fixe

Définition 2 – Point fixe :

Soit une fonction f définie sur un ensemble I.

On appelle *point fixe* de f sur I tout réel $x \in \mathrm{I}$ vérifiant $f(x) = x$.

Pour les fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ cela correspond aux abscisses des points d'intersection de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$.

Proposition 3 – Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge :

Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ avec I stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Si $\begin{cases} f \text{ continue sur I} \\ \text{et} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \in \mathrm{I} \end{cases}$, alors ℓ est un point fixe de f *i.e.* $f(\ell) = \ell$.

Attention
Ce théorème ne donne qu'une condition nécessaire sur la limite. Il ne permet en aucun cas de prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Idée
En particulier, si f n'a pas de points fixes sur I alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger.

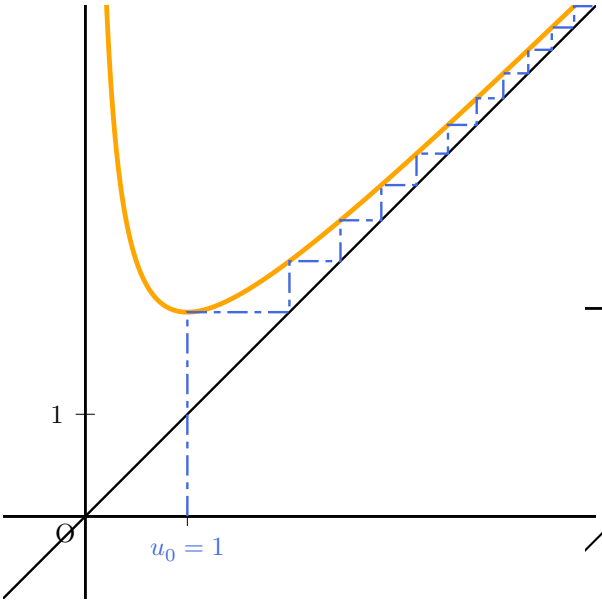


FIGURE III.4 : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ avec $u_0 = 1$.
f n'a pas de points fixes et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

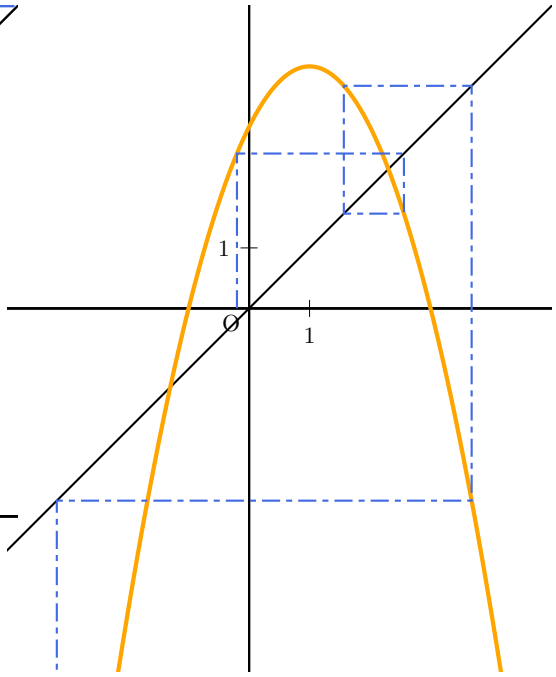


FIGURE III.5 : $u_{n+1} = (u_n + 1)(3 - u_n)$ avec $u_0 = -0,2$.
f a deux points fixes et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

FIGURE III.6 : Exemples de suites divergentes

Preuve : Supposons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un réel ℓ.

On a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \ell$.

Or, la fonction f est continue en $\ell \in$ I *i.e.* $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$.

Par composition, on en déduit que $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Donc $f(\ell) = \ell$ *i.e.* ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. ☑

Idée
Pour déterminer les points fixes de f, on étudie les points d'annulation de la fonction $x \longmapsto f(x) - x$ sur I.

ATTENTION

Si f n'est pas continue, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas forcément vers un point fixe de f.

Contre-exemple 4 :

Soient $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} & \text{si } x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right[\\ 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right] \end{cases}$$

et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ converge vers $\frac{1}{2}$ qui n'est pas un point fixe de f.

Exemple 5 :

Revenons à l' exemple (2) et à l' exemple (1) .

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et la fonction $x \longmapsto \sqrt{x+1}$ est bien continue sur $\mathbb{R}_+$.

Par conséquent, la limite ℓ de la suite vérifie $\sqrt{\ell+1} = \ell$.

D'où $\ell + 1 = \ell^2$ et $\ell \geqslant 0$.

Finalement, on obtient $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Remarque
Ce n'est pas 2 !

Remarques : Dans le cas d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir d'une fonction décroissante où les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent :

— Celles-ci convergent vers des points fixes de $g = f \circ f$. Lors de la recherche de ces derniers il sera bon de remarquer que les points fixes de f sont aussi des points fixes de g. Cela aidera pour d'éventuelles factorisation.

La réciproque est fausse : les points fixes de g ne sont pas nécessairement des points fixes de f.

Contre-exemple 6 – L :

fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ admet deux points fixes 1 et -1 mais $f \circ f$ n'admet que 1 comme point fixe.

— Si les deux sous suites convergent vers le même point fixe, la suite mère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y converge aussi.

À défaut, si elles convergent vers deux points fixes différents, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

I.5 – L'inégalité des accroissements finis

On peut aussi utiliser dans certains cas l'inégalité des accroissements finis pour montrer que la distance entre u_n et sa limite possible ℓ tend vers 0 . On en rappelle l'énoncé.

Théorème 4 – Inégalité des accroissements finis :

Si f est dérivable sur J, et s'il existe $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{J}$, $|f'(x)| \leqslant \mathrm{M}$, alors

$$\forall\, (a,b) \in \mathrm{J}^2, \quad |f(b) - f(a)| \leqslant \mathrm{M}|b-a|.$$

Méthode 2 – Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide de l'IAF. :

Pour montrer la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un point fixe $\ell \in \mathrm{J}$ à partir de l'inégalité des accroissements finis, on procèdera ainsi :

1. on majore $|f'|$ par une constante M sur l'intervalle stable J contenant les termes de la suite. Il faut pour que cette méthode fonctionne que $0 \leqslant \mathrm{M} < 1$.
2. on applique l'inégalité des accroissements finis à f avec $b = u_n$ et $a = \ell$ pour obtenir
$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \mathrm{M}\,|u_n - \ell|\,.$$
3. on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $|u_n - \ell| \leqslant \mathrm{M}^n\,|u_0 - \ell|$ ».

   Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ découle de l'inégalité des accroissements finis avec $a = \ell$ et $b = u_0$.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

   Par hypothèse de récurrence, on a $|u_n - \ell| \leqslant \mathrm{M}^n\,|u_0 - \ell|$. Alors on a :
   $$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \mathrm{M}\,|u_n - \ell| \leqslant \mathrm{M} \times \mathrm{M}^n\,|u_0 - \ell| = \mathrm{M}^{n+1}\,|u_0 - \ell|\,.$$
   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : Par principe de récurrence, on a $|u_n - \ell| \leqslant \mathrm{M}^n\,|u_0 - \ell|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Si $\mathrm{M} \in [0\,;1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{M}^n\,|u_0 - \ell| = 0$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ par encadrement.

Calcul approché du point fixe : Si $\mathrm{J} = [a,b]$, le calcul précédent nous donne une estimation de l'erreur :

$$|u_n - \ell| \leqslant \mathrm{M}^n\,|u_0 - \ell| \leqslant \mathrm{M}^n|b-a|$$

Ainsi, u_n constitue une estimation du point fixe ℓ de f avec une précision au moins égale à $\mathrm{M}^n|b-a|$.

II. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Lorsque l'énoncé de l'exercice ou du problème ne pose pas de questions intermédiaires, voilà un petit rappel des points essentiels de ce qu'il faut faire pour étudier une suite récurrente d'ordre 1.

Soient $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathrm{J} \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par la relation

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{J} \\ u_{n+1} = f(u_n),\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. La première chose à vérifier est que la fonction f est continue sur J ou, au moins sur un sous-intervalle I qui vérifiera un maximum des propriétés listées ci-dessous :

   ATTENTION

   — Si f n'est pas continue, alors tout ce qui va suivre ne s'applique pas.

   — S'il n'existe pas d'intervalles bornés stables, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. La réciproque est fausse.

   a. I est stable par f et contient au moins un terme de la suite à partir d'un certain rang. C'est la proposition (1) .

   b. I est un segment $[a\,;b]$ *i.e.* fermé (pour retenir les limites) et borné (pour pouvoir y appliquer les théorèmes de convergence monotone). À défaut, on devra parfois se contenter d'un intervalle semi-borné et/ou semi-fermé sur lequel on essaiera d'adapter ce qui suit.

2. Pour étudier la monotonie de la suite, on étudiera celle de f sur I ainsi que le signe de $u_{n+1} - u_n$ qui correspond au signe de $\delta(x) = f(x) - x$, en espérant qu'il y soit constant.
   Remarque : Le signe de δ dépend de la position de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice.

   Remarque
   On récupèrera les éventuels points fixes au passage.

3. I doit nécessairement contenir un ou des points fixes de f. C'est le contenu de la proposition (3) .
   S'il n'en contient pas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Il restera à déterminer le type de divergence : un théorème de comparaison ou l'extraction de deux sous-suites divergeant/convergeant vers des limites différentes suffisent souvent à conclure.

Si f possède des points fixes dans I, plusieurs cas se présentent alors :

4. a. Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissement fini dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I.
   Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in$ I, vers lequel la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. *confer* le paragraphe (I.5) .

ATTENTION

— La fonction f n'est pas nécessairement croissante !

— La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement monotone !

b. Le deuxième cas le plus facile : c'est celui où f est croissante.

Dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, et comme elle est bornée elle converge. Il restera à trouver vers lequel, souvent par un argument de monotonie partant de u_0.

ATTENTION

— La fonction f n'est pas nécessairement contractante !

— La fonction f peut avoir plusieurs points fixes !

— La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement croissante !

c. Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas 4..A. sinon encore *confer* le paragraphe (I.5) .

ATTENTION

— f n'est pas nécessairement contractante !

— f peut avoir plusieurs points fixes !

Dans le cas contraire, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante. Comme elles sont bornées elles convergent toutes les deux, mais pas nécessairement vers la même limite qui sera nécessairement un point fixe de $f\circ f$.

i. Si le point fixe est unique, les deux suites convergent vers lui ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii. S'ils sont pluriels, tout dépendra de si les sous-suites convergent vers le même ou pas.

En général, vous rencontrerez deux cas de figure :

◇ les sous-suites sont adjacentes donc convergentes (vers le même point fixe) ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

◇ les sous-suites convergent vers deux points fixes différents : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

d. Dernier cas : on n'est dans aucun des cas précédents. Alors il faut réfléchir un peu … faire preuve de jugeotte et d'initiative … Étudier le signe de $f(x)-x$, …L'énoncé vous aidera !

Exercice III.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = a \in [0;1] \quad \text{et} \quad \forall\, n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que $[0\,;1]$ est stable par f. En déduire une minoration de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 0 .

4. Supposons maintenant $a < 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

1. Une étude rapide de la parabole $f : x \longmapsto x - x^2 = x(1-x)$ montre que l'intervalle $[0\,;1]$ est stable par f. En particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
2. $\forall\, n \in \mathrm{N}$, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Minorée, elle converge.
3. Comme f est continue, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger que vers les points fixes de f. 0 étant le seul, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
4. Comme $]-\infty\,;0[$ est stable par f et ne contient aucun point fixe, si $a \in \mathbb{R}_-^*$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne saurait converger. Elle diverge.

Remarque

Comme $f(]1\,;+\infty])$ $\subset$ $\mathbb{R}_-^*$, on obtient également la divergence si $a > 1$.

3 Suites récurrentes

1. Questions de cours : On considère une suite de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{où } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est une fonction donnée.}$$

   a. Qu'appelle-t-on intervalle stable par f.

   Tout intervalle I inclus dans le domaine de définition de f et vérifiant $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.

   b. Si la fonction f est croissante sur un intervalle stable I que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Si $u_0 \in \mathrm{I}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et monotone. Sa monotonie est donnée par l'ordre de ses premiers termes.

   c. Qu'appelle-t-on un point fixe de la fonction f ?

   Tout réel x du domaine de définition de f vérifiant $f(x) = x$.

   d. Si une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers une limite $l \in \mathrm{I}$. Que peut-on dire de l et sous quelle condition ?

   Si f est continue en ℓ alors ℓ est un point fixe de f.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2 + 1}$.

   a. Montrer que $[0\,;1]$ est stable par f.

   b. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   c. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.

   d. Déterminer ℓ.

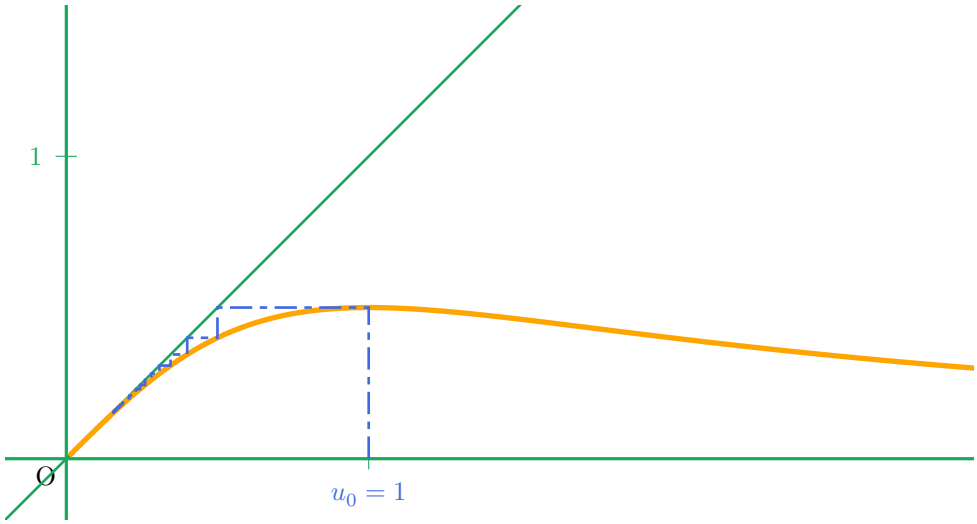
Posons $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ et $\delta(x) = f(x) - x$.

   a. $\forall\, x \in [0\,;1],\ 0 \leqslant \dfrac{x}{1+x^2} \leqslant x \leqslant 1$ donc $[0\,;1]$ est stable par f et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

   b. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \dfrac{x}{1+x^2} \leqslant x \implies \delta(x) \leqslant 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   c. Décroissante et minorée par 0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \geqslant 0$.

   d. Comme f est continue sur $[0\,;1]$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de f. Il n'y en a qu'un dans $[0\,;1]$, c'est 0. Donc, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.



3. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle prenne en argument un entier n et qu'elle renvoie la valeur de u_n.

Éditeur

```
def suite(n):
        u=1
        for k in range (1,n+1):
                u= u/(u**2+1)
        return u
```

Remédiation 20 — Suites récurrentes -- Dans le cas où f est croissante.

Exercice III.1 – (Une suite convergente) [Correction p. 331]

Soit f la fonction définie par :

$$\forall\, x \in [0\,;1]\,, \quad f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f sur $[0\,;1]$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement définie et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\,;1]$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner sa limite.
5. Écrire une fonction `seuil(eps)` qui renvoie le plus petit entier n tel que $1 - u_n < \varepsilon$.

Exercice III.2 – (Une suite divergente : $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$) [Correction p. 332]

Soit $a > 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Compléter la fonction `suite\_u(a,n)` qui renvoie u_n :

Éditeur
```
def suite_u(a, n):
    u = ......
    for k in range(1, n+1):
        u = ......
    return u
```

2. Montrer que si (u_n) converge, sa limite vaut 1.
3. Montrer que (u_n) est croissante, puis que $u_n \geqslant a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que (u_n) diverge et préciser sa limite.
5. Montrer que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2$.

Correction de l'exercice III.1 : [Énoncé]

Idée
Il est beaucoup mieux de voir que f est la composée de deux fonctions croissantes donc croissantes aussi.

1. $\forall\, x \in [0\,;1]$, $\dfrac{1+x}{2} > 00$. d'après les théorèmes sur les composées de fonctions dérivables, f est dérivables sur $[0\,;1]$ et on a :

$$\forall\, x \in [0\,;1]\,,\ f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{2}}} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1+x}{2}}} > 0.$$

La fonction f est donc (strictement) croissante sur $[0\,;1]$.

Commentaire
DEUX choses à dire : u_0 dans $[0\,;1]$ et $[0\,;1]$ stable par f :

2. D'après la question précédente, f est croissante sur $[0\,;1]$ donc

$$f([0\,;1]) = [f(0)\,;f(1)] = \left[\sqrt{\frac{1}{2}}\,;1\right] \subset [0\,;1]\,.$$

L'intervalle $[0\,;1]$ est donc stable par f.

Comme $u_0 = \dfrac{1}{2} \in [0\,;1]$, c'est le cas de tous les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *i.e.* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\,;1]$.

Remarque : Dans le doute, on peut aussi le montrer rapidement par récurrence :

Initialisation : $u_0 \in [0\,;1]$ d'après l'énoncé donc l'initialisation.

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\,;1]$.
Par définition, $u_{n+1} = f(u_n)$. Comme $u_n \in [0\,;1]$ stable par f alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0\,;1]$ et l'hérédité.

Synthèse : Vraie pour $n = 0$ et héréditaire, la propriété « $u_n \in [0\,;1]$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0\,;1]\,.$$

3. D'après les questions précédentes, f est croissante donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée est monotone.
Or, $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_1 = f(u_0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Donc, $u_0 < u_1$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4. D'après les questions précédentes, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par 1) donc elle converge vers un réel $\ell \leqslant 1$ par le théorème de convergence monotone.
Comme f est continue sur $[0\,;1]$ car dérivable, ℓ est un point fixe de f.
On résout l'équation :

Attention
On n'oublie pas la continuité de f !

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \sqrt{\frac{1+x}{2}} = x \\ &\iff \frac{1+x}{2} = x^2 \\ &\iff 1+x = 2x^2 \\ &\iff 2x^2 - x - 1 = 0 \\ &\iff 2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Comme $-\dfrac{1}{2} \notin [0\,;1]$, la limite ℓ ne peut être que 1.
Conclusion, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

5.

Méthode
On utilise `while` pour « tant que la précision n'est pas atteinte » ; la condition de la boucle est la *négation* de ce que l'on veut obtenir.

Éditeur
```python
def seuil(eps):
    u = 0
    n = 0
    while 1 - u >= eps:
        u = np.sqrt(u + 2)
        n = n + 1
    return n
```

Correction de l'exercice III.2 : [Énoncé]

1.

Éditeur
```python
def suite_u(a, n):
    u = a
    for k in range(1, n+1):
        u = u**2 - u + 1
    return u
```

2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ, par continuité de $x \longmapsto x^2 - x + 1$, on a $\ell = \ell^2 - \ell + 1$, soit $(\ell - 1)^2 = 0$, donc $\ell = 1$.

3. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geqslant 0$: (u_n) est croissante.
   Donc pour tout n, $u_n \geqslant u_0 = a$.

4. Par l'absurde : si (u_n) convergeait, sa limite serait 1 ; or $u_n \geqslant a > 1$ pour tout n donc $\ell \geqslant a > 1$ par passage à la limite dans une inégalité.
   Contradiction. Comme (u_n) est croissante et non convergente, elle n'est pas majorée et
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

5. Comme $u_n \to +\infty$:
$$\frac{u_{n+1}}{u_n^2} = 1 - \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$
   Donc $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2$.

Piège
On a seulement montré : *si* la suite converge, alors $\ell = 1$. Cela ne prouve pas qu'elle converge !

Méthode
(1) point fixe de f,
(2) signe de $u_{n+1} - u_n$ (souvent une identité remarquable),
(3) borne par récurrence,
(4) théorème de la limite monotone ou contradiction avec le point fixe.

Remédiation 21 — Suites récurrentes -- Avec l'IAF

Exercice III.1 [Correction p. 333]

Soit f la fonction définie sur $[0\,;2]$ par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3}$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f sur $[0\,;2]$. En déduire que $[0\,;2]$ est stable par f.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
3. Déterminer les points fixes de f sur $[0\,;2]$. Notons α l'unique point fixe de f dans $[0\,;2]$.
4. Montrer que : $\forall\, x \in [0\,;2]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{9}$.
5. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{9}\,|u_n - \alpha|$.
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
7. Enfin, en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant 2\left(\dfrac{1}{9}\right)^n$.
8. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
9. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie une valeur approchée de α à 10^{-4} près, obtenue en calculant le terme u_n d'indice minimal tel que $\dfrac{2}{9^n} \leqslant 10^{-4}$.

Éditeur

```
def valeur_approchees():
    u = ...
    n = ...
    while ... :
        u = ...
        n = ...
    return u
```

Correction de l'exercice III.1 : [Énoncé]

1. Pour tout $x \in [0\,;2]$, $x+3 \neq 0$ donc la fonction f quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas est également dérivable sur $[0\,;2]$ et on a :

$$\forall\, x \in [0\,;2]\,,\ f'(x) = \frac{(x+3)-(x+2)}{(x+3)^2} = \frac{1}{(x+3)^2} > 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0\,;2]$ et on en déduit son tableau de variations :

x	0		2
$f'(x)$		$-$	
f	$\frac{2}{3}$	↘	$\frac{4}{7}$

Comme $0 \leqslant \frac{2}{3}$ et $\frac{4}{7} \leqslant 2$, on en déduit que $f([0;2]) = \left[\frac{2}{3};\frac{4}{7}\right] \subset [0;2]$. L'intervalle $[0;2]$ est stable par f.

2. Comme $u_0 \in [0;2]$ qui est stable par f, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;2]$ *i.e.* $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
Remarque : Si jamais cela bous semble trop court, on peut aussi le montrer par récurrence :

Initialisation : D'après l'énoncé, $u_0 = 0$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ *i.e.* $u_n \in [0;2]$.
D'après la question précédente, $[0;2]$ est stable par f donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [0;2]$ *i.e.* $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ et l'hérédité.

Synthèse : Initialisée à partir de $n = 0$ et héréditaire, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 2.$$

Remarque
Il est très important de dire où on résout l'équation. Cela permet ensuite d'écarter les points fixes en trop.

3. Soit $x \in [0;2]$.
On résout

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{x+2}{x+3} = x \\ &\iff x+2 = x(x+3) \qquad (x \neq -3) \\ &\iff x+2 = x^2+3x \\ &\iff x^2+2x-2 = 0 \end{aligned}$$

Avec $\Delta = b^2 - ac = 4 + 8 = 12 = (2\sqrt{3})^2$, on trouve deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2} = -1+\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2} = -1-\sqrt{3}.$$

Comme $x_2 \notin [0;2]$, la fonction f admet un unique point fixe $\alpha = x_1 = -1+\sqrt{3}$ dans $[0;2]$.

4. Pour tout $x \in [0;2]$, $x+3 \geqslant 3$, donc

$$|f'(x)| = \frac{1}{(x+3)^2} \leqslant \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

5. La fonction f est dérivable sur $[0;2]$ qui est stable et, d'après la question précédente, $\forall\, x \in [0;2]$, $|f'(x)| \leqslant= \frac{1}{9}$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f entre u_n et α :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{9}\,|u_n - \alpha|\,.$$

Attention
Ne pas oublier de dire que f est dérivable sur l'intervalle considéré !

Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et propriété de α, on a finalement :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{9}\,|u_n - \alpha|\,.$$

6. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|$ ».

Initialisation : Comme $\left(\frac{1}{9}\right)^0 = 1$, $\mathcal{P}(0)$ est un tautologie (toujours vraie) car

$$|u_0 - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{9}\right)^0 |u_0 - \alpha|.$$

Remarque : $\mathcal{P}(1)$ découle de l'inégalité des accroissements finis entre u_0 et α :

$$|f(u_0) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{9} |u_0 - \alpha|.$$

Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et propriété de α, on a finalement :

$$|u_1 - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{9}\right)^1 |u_0 - \alpha| \text{ qui est } \mathcal{P}(1).$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

D'après la question précédente, on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{9} |u_n - \alpha|.$$

Or, par hypothèse de récurrence,

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$

En remplaçant, on obtient :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{9} \times \left(\frac{1}{9}\right)^n |u_0 - \alpha| = \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|.$$

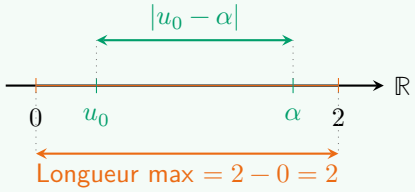
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Idée
N'oubliez jamais que $\mathcal{P}(n+1)$ n'est vraie que sous l'hypothèse $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Conclusion : Initialisée pour $n = 0$ et héréditaire, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$

7. Comme u_0 et α appartiennent tous deux à l'intervalle $[0\,;2]$, leur distance est inférieure à 2 :



Donc $|u_0 - \alpha| \leqslant 2$ et, en remplaçant dans l'inégalité de la question précédente, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{9}\right)^n |u_0 - \alpha| \leqslant 2\left(\frac{1}{9}\right)^n.$$

8. Comme $0 \leqslant \frac{1}{9} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\frac{1}{9}\right)^n = 0$.

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$ *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$:

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers α.

9.

Éditeur
```python
def valeur_approchees():
    u = 0
    n = 0
    while 2/(9**n)>10**(-4) :
        u = (u+2)/(u+3)
        n = n+1
    return u
```

Remarque : Tant que `2/(9**n)` est strictement plus grand que `>10**(-4)`, on calcule les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par `u = (u+2)/(u+3)` et on incrémente la valeur de n avec `n = n+1`.

La fonction `def valeur_approchees()` renvoie la valeur de u mais on peut écrire aussi `return u,n` et on aura alors la valeur du plus petit entier n tel que $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-4}$.

On trouve $\alpha = 0,7320$ et $n = 5$.

TD 4 Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

On s'intéresse dans cette partie à des suites définies par des relations de récurrence de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \qquad \text{où } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est une fonction donnée.}$$

III. Étude guidée des suites récurrentes

III.1 – Cas où f est croissante

Exercice III.1

On considère la fonction f définie, pour tout réel $x \in [0, +\infty[$, par $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$ et on considère la suite :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

1. a. Étudier les variations de f et montrer que l'intervalle $[0\,;1]$ est stable.

   b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in [0\,;1]$.

2. a. Montrer que $\forall\, x \geqslant 0,\ f(x) \leqslant x$.

   Remarque : Dire que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \leqslant x$, c'est dire que la courbe représentative de la fonction f est au dessous de la droite d'équation $y = x$.

   b. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

4. a. Déterminer les points fixes de f.

   b. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice III.2

Soit f la fonction définie par :

$$\forall\, x \in [0\,;1]\,, \quad f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [0\,;1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice III.3 [CORRECTION P. 343]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

III.2 – Cas où f est décroissante

Ce cas est plus compliqué et à la limite du programme. L'idée centrale est que la fonction $f \circ f$ est alors croissante et qu'on peut donc utiliser les résultats précédents avec les sous-suites des termes pairs et impairs $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice III.4

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (1 - u_n)^2 \end{cases}$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto (1-x)^2$.

1. a. Étudier les variations de la fonction f.
   b. Vérifier que l'intervalle $[0\,;1]$ est stable par f.
   c. Déterminer les points fixes de la fonction f.
   d. Préciser le sens de variations de la fonction $g = f \circ f$ sur $[0\,;1]$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?
3. a. Démontrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs dans $[0\,;1]$.
   b. Démontrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. Préciser leur monotonie.
   c. Justifier que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
   On note respectivement ℓ_1 et ℓ_2 les limites des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
   d. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
   e. Déterminer ℓ_1 et ℓ_2.

À retenir – Résumé du plan d'étude :

1. On démontre d'abord que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in$ I (où I est un intervalle stable).
2. On démontre ensuite que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (ou décroissante).

3. Si I est un intervalle borné *i.e.* si I a des extrémités finies, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (par théorème de convergence monotone) de limite finie ℓ.
   On obtient de plus que $\ell \in \overline{\text{I}}$, adhérence de l'intervalle I (intervalle auquel on a ajouté ses bornes finies).
   Par exemple, si $\text{I} =]0\,;2[$, on obtient que : $\ell \in [0\,;2]$.
4. Enfin, on démontre que ℓ est un point fixe de f.
   Ainsi, s'il n'y a qu'un point fixe de f dans $\overline{\text{I}}$ (c'est le cas le plus simple), c'est forcément la valeur de ℓ cherchée.

Exercice III.5 – (Utilisation de l'inégalité des accroissements finis)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$$

et on note $f : x \longmapsto \sqrt{x+1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Montrer que $\forall\, x \in [0\,;2]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
3. Déterminer les points fixes de f sur $[-1\,;\infty[$. Notons α l'unique point fixe de f dans $[0\,;2]$.
4. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$.
5. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
6. Enfin, en déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
7. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
8. Déterminer un entier N tel que $|u_{\text{N}} - \alpha| \leqslant 10^{-5}$.
9. Compléter le script Python suivant pour qu'il renvoie une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

Éditeur
```python
import numpy as np
N = int(np.ceil(5 * np.log(10) / np.log(2) + 1))
u = 0
for k in range(N) :
    u = np.sqrt(u+1)
print(u)
```

Exercice III.6

On considère la fonction $f : x \longmapsto \text{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 \in [0\,;1] \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0\,;1]$, que l'on notera α.
2. Montrer que l'intervalle $[0\,;1]$ est stable par f. En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in [0\,;1]$.
3. a. Montrer : $\forall\, x \in [0\,;1]\,, |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

   b. En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\,|u_n - \alpha|$.

   c. Puis : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^n$.

   d. En déduire enfin que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
4. Écrire un programme `Python` donnant une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

Exercice III.7

Soit $f : x \longmapsto x^2 + \dfrac{3}{16}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Calculer u_1.
2. Déterminer les limites possibles de la suite.
3. Démontrer que $f\left(\left[0, \dfrac{7}{16}\right]\right) \subset \left[0, \dfrac{7}{16}\right]$.
4. En déduire que pour tout $n \geqslant 1, u_n \in \left[0, \dfrac{7}{16}\right]$.
5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \left|u_{n+1} - \dfrac{1}{4}\right| \leqslant \dfrac{7}{8}\left|u_n - \dfrac{1}{4}\right|$.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \left|u_n - \dfrac{1}{4}\right| \leqslant \left(\dfrac{7}{8}\right)^{n-1} \dfrac{7}{16}$.
7. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice III.8 – ((d'après EML 2001))

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ sur $]0, +\infty[$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer : $\forall\, x \in]0, +\infty\left[\,, f''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^3}\left(x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + x + 2\right)\right.$.
3. Étudier les variations de la fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $[0, +\infty[$, par : $g(x) = x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + x + 2$. En déduire : $\forall\, x \in]0; +\infty[\,, f''(x) > 0$.
4. En déduire le sens de variation de f (on admettra que $f'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\dfrac{1}{2}$). On précisera la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.

5. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ Montrer : $\forall\, x \in]0, +\infty\,[, |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
6. Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$.
7. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ln(2)| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n - \ln(2)|$.
8. En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - \ln(2)| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ln(2)|$.
9. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice III.9 – (Suite récurrente d'ordre 1)

On considère la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x+1}$, définie sur $[-1\,;+\infty[$ ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

1. Montrer que l'intervalle $[0\,;2]$ est stable par f.
2. Justifier que si un réel x est point fixe de f, alors nécessairement $x \geqslant 0$.
3. Démontrer que f possède un unique point fixe et le déterminer. On notera r ce point fixe. Vérifier que $r \in [0\,;2]$.
4. a. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et bornée par 0 et r.
   b. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Que peut-on en déduire ?
   c. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n - r|$.
   En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - r| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   d. Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi qu'un entier N tel que $|u_N - r| \leqslant 10^{-9}$.

IV. Concours

Exercice III.10 – (Théorème de convergence monotone / d'encadrement (d'après EDHEC 2001))

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes strictement positifs.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer ${u_{k+1}}^2 - {u_k}^2$ en fonction de ${u_k}^2$.
4. En déduire que, pour tout $n > 0$, on a :
$$u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}.$$
5. En déduire que, pour tout $n \neq 0$, ${u_n}^2 \geqslant 2n + 1$.

6. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. Écrire une fonction `Python` qui prend en paramètre un entier n et qui affiche la valeur de u_n.
8. Écrire un script `Python` qui affiche le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 100$.

Exercice III.11 – (d'après EML 2016)

On considère l'application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0, +\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

On admet : $0,69 < \ln(2) < 0,70$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0, +\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.
3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
6. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite. (on pourra étudier les variations de la fonction $t \longmapsto t - \ln(t)$)
6. Écrire un programme en `Python` qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1 - u_N < 10^{-4}$.

Corrigés

Correction de l'exercice III.3 : [Énoncé]

Méthode
Sans le dire, on demande de montrer que $]0\,;+\infty[$ est stable par f.

1. Soit $f : x \longrightarrow \dfrac{2x}{x+1}$ la fonction associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Pour $x > 0$, $x + 1 \neq l$ donc la fonction f est un quotient de fonction dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas donc est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a :
   $$\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\ f'(x) = \frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0.$$
   La fonction f est donc croissante sur $]0\,;+\infty[$ et on en déduit son tableau de variations :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	↗	2

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+1} = 2.$$
   D'après le tableau, $f\,(]0\,;+\infty[) =]0\,;2[\subset]0\,;+\infty[$ donc $]0\,;+\infty[$ est stable par f.
   Comme $u_0 = \dfrac{1}{2} \in]0\,;+\infty[$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0\,;+\infty[$ et la suite est bien définie.
   En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. Comme f est croissante, $f\left(\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]\right) = \left[f\left(\dfrac{1}{2}\right)\,;f(1)\right] = \left[\dfrac{2}{3}\,;1\right] \subset \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$.
   L'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$ est donc stable par f. Comme $u_0 \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$, on en déduit, par récurrence, que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$ *i.e.* $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

3. Comme f est croissante, la suite récurrente associée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
   De plus, comme $u_1 = f(u_0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{3} > \dfrac{1}{2} = u_0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est même croissante.

4. D'après les questions précédentes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par 1, elle converge donc vers une limite $\ell \leqslant 1$ par le théorème de convergence monotone.

5. Comme f est continue sur $]0\,;+\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergente, converge vers un point fixe de f.
   On résout l'équation $f(x) = x \iff x = \dfrac{2x}{x+1}$
   $$\begin{aligned} x(x+1) &= 2x && (x \neq -1)\\ x^2 - x &= 0\\ x(x-1) = 0 &\iff x = 0 \ \text{ ou } \ x = 1. \end{aligned}$$
   Comme $u_0 = \dfrac{1}{2} > 0$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, elle ne peut converger que vers 1.
   Conclusion, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

DM 3 — Étude de fonction, suite réelle, fonction définie par une intégrale

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I : Fonction et suite réelle

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\forall\, t \in]0\,;+\infty[\,,\ f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

A : Étude d'une fonction d'une variable

1. a. Étudier les variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

   b. Dresser le tableau des variations de f en précisant les limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que f réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ vers $[2\,;+\infty[$.

3. On note $g : [2\,;+\infty[\to [1\,;+\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1\,;+\infty[$.

   a. Dresser le tableau de variations de g.

   b. Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2\,;+\infty[$.

   c. Soit $y \in [2\,;+\infty[$. En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0\,;+\infty[$.
   En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

B **:** Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f\left(n u_n\right).$$

4. Montrer, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.

5. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n.

Éditeur

```
1  def suite(n):
2      u = 1
3      for k ...:
4          u = ...
5      return ...
```

6. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

   a. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

   b. Majorer les sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ en fonction d'une somme d'une série usuelle.

   En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$.

   c. Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k$ par télescopage.

   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

7. a. Soit un entier k supérieur ou égal à 2 .

   Montrer, après avoir minoré la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur $[k-1;k]$, que on a : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2} dt$.

   b. Pour tous entiers n et p tels que $2 \leqslant p < n$, calculer $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

   c. En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2$.
   Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2\,;3]$.

   d. Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}.$$

   e. Compléter cette fonction Python qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près :

Éditeur
```python
def approx():
    u = ....
    p = 2
    while .... 0.0001:
        u = ....
        p = ....
    return ...
```

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Dans toute cette partie, h désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad h(x) = x - \ln(x).$$

8. Dresser le tableau de variations de h en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$. On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{h(t)}\,\mathrm{d}t.$$

9. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et que l'on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

10. a. Montrer que $\Phi'(x)$ a le signe du numérateur en s'appuyant sur le signe de $h(x)$ et $h(2x)$.

    b. En déduire les variations de Φ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

11. a. Justifier l'encadrement : $0 \leqslant \dfrac{1}{h(t)} \leqslant 1$ pour tout $t > 0$.

    b. Montrer : $\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

12. a. Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
    On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

    b. Montrer : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$. (On pensera à simplifier par $\ln(x)$)

13. On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.
    On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$.
    Tracer, en annexe, l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

DM 3 — Étude de fonction, suite réelle, fonction définie par une intégrale

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I : Fonction et suite réelle

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\forall\, t \in]0\,;+\infty[\,,\ f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

A : Étude d'une fonction d'une variable

1. a. Étudier les variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2-1}{t^2}.$$

Comme $t^2 > 0$ sur $]0\,;+\infty[$, le signe de $f'(t)$ est celui de $t^2 - 1$.

$$\begin{aligned} 0 < t < 1 &\Longrightarrow f'(t) < 0,\\ t = 1 &\Longrightarrow f'(1) = 0,\\ t > 1 &\Longrightarrow f'(t) > 0. \end{aligned}$$

La fonction est donc décroissante sur $]0\,;1[$ puis croissante sur $]1\,;+\infty[$.

b. Dresser le tableau des variations de f en précisant les limites en 0 et en $+\infty$.

Les limites sont

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty.$$

De plus,

$$f(1) = 2.$$

On obtient le tableau de variations suivant.

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

La fonction admet donc un minimum égal à 2, atteint pour $t = 1$.

2. Montrer que f réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ vers $[2\,;+\infty[$.

La fonction f est continue sur $[1\,;+\infty[$ et strictement croissante sur cet intervalle puisque

$$\forall t > 1, \qquad f'(t) > 0.$$

De plus,

$$f(1) = 2 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty.$$

Par le théorème de la bijection, la restriction de f à $[1\,;+\infty[$ réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ sur $[2\,;+\infty[$.

3. On note $g : [2\,;+\infty[\to [1\,;+\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1\,;+\infty[$.

a. Dresser le tableau de variations de g.

La fonction réciproque d'une fonction strictement croissante est strictement croissante.
Comme

$$g(2) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{y\to+\infty} g(y) = +\infty,$$

on obtient le tableau de variations.

y	2	$+\infty$
g	1 ↗	$+\infty$

b. Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2\,;+\infty[$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1\,;+\infty[$ et

$$\forall t > 1, \qquad f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} > 0.$$

La dérivée ne s'annule jamais sur $]1\,;+\infty[$.
Par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, g est dérivable sur $]2\,;+\infty[$.
En outre,

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{g(y)^2}} = \frac{g(y)^2}{g(y)^2 - 1} > 0.$$

c. Soit $y \in [2\,;+\infty[$. En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0\,;+\infty[$.
En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

Soit $y \in [2\,;+\infty[$. Résolvons

$$f(t) = y.$$

On écrit

$$t + \frac{1}{t} = y.$$

Comme $t > 0$,

$$t^2 - yt + 1 = 0.$$

Le discriminant est

$$\Delta = y^2 - 4 \geqslant 0.$$

Les solutions sont

$$t = \frac{y \pm \sqrt{y^2-4}}{2}.$$

Le produit des racines vaut 1 ; ainsi

$$\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2} \leqslant 1, \qquad \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2} \geqslant 1.$$

La seule solution appartenant à $[1\,;+\infty[$ est donc

$$\boxed{g(y) = \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}.}$$

On peut vérifier que

$$g(2) = 1.$$

B **:** Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f\left(n u_n\right).$$

4. Montrer, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.

Montrons par récurrence que la suite est bien définie et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n \geqslant 1.$$

Initialisation :

Par définition,

$$u_1 = 1 \geqslant 1.$$

Hérédité :

Soit $n \geqslant 1$ tel que $u_n \geqslant 1$.

Alors $u_n > 0$ et

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n}.$$

Le second terme étant strictement positif,

$$u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant 1.$$

Ainsi la propriété est héréditaire.

Conclusion :

Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geqslant 1.}$$

La suite est donc bien définie.

5. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n.

Éditeur
```
def suite(n):
    u = 1
    for k ...:
        u = ...
    return ...
```

La boucle doit effectuer les calculs de $u_2, u_3, \dots, u_n$.

Éditeur
```
def suite(n):
    u = 1
    for k in range(1,n):
        u = u + 1/(k**2*u)
    return u
```

6. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

   a. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

   D'après la définition,
   $$v_n = \frac{1}{n^2 u_n}.$$
   Comme $u_n \geqslant 1$,
   $$0 \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 1.$$
   Donc
   $$\boxed{0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n^2}.}$$

   b. Majorer les sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ en fonction d'une somme d'une série usuelle.

   En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$.

   Pour tout $N \geqslant 1$, $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.

   D'après le critère de comparaison des SATP, $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n \text{ converge.}}$

   c. Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k$ par télescopage.

   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

   Pour tout $n \geqslant 2$,
   $$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k).$$
   La somme est télescopique :
   $$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = u_n - u_1 = u_n - 1.$$
   Comme la série $\sum v_n$ converge, la suite de ses sommes partielles converge.

Ainsi,

$$u_n - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} v_k$$

converge.

Il existe donc un réel ℓ tel que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.}$$

On ne cherche pas à déterminer cette limite.

7. a. Soit un entier k supérieur ou égal à 2 .

Montrer, après avoir minoré la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur $[k-1;k]$, que on a : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2} dt$.

Soit $k \geqslant 2$.

La fonction

$$t \longmapsto \frac{1}{t^2}$$

est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $t \in [k-1, k]$,

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

En intégrant sur $[k-1, k]$,

$$\boxed{\frac{1}{k^2} = \int_{k-1}^{f} \frac{1}{k^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

b. Pour tous entiers n et p tels que $2 \leqslant p < n$, calculer $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Soient $2 \leqslant p < n$.

Par télescopage,

$$\sum_{k=p}^{n-1} v_k = u_n - u_p.$$

Comme

$$v_k \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t,$$

on obtient

$$u_n - u_p \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Les intervalles étant consécutifs,

$$\boxed{0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

c. En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2$.
Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2\,;3]$.

Prenons $p = 2$.

Pour tout $n \geqslant 3$,

$$0 \leqslant u_n - u_2 \leqslant \int_1^{n-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_1^{n-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{n-1} = 1 - \frac{1}{n-1} \leqslant 1.$$

Ainsi

$$\boxed{u_2 \leqslant u_n \leqslant u_2 + 1.}$$

Comme

$$u_2 = 1 + \frac{1}{1^2} = 2,$$

on en déduit

$$2 \leqslant u_n \leqslant 3.$$

En passant à la limite,

$$\boxed{\ell \in [2, 3].}$$

d. Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans

$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t,$$

on obtient

$$0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \int_{p-1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Enfin,

$$\int_{p-1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_{p-1}^{+\infty} = \frac{1}{p-1}.$$

Ainsi

$$\boxed{0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}.}$$

e. Compléter cette fonction Python qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près :

Éditeur

```
def approx():
    u = ....
    p = 2
    while .... 0.0001:
        u = ....
        p = ....
    return ...
```

Pour garantir une erreur inférieure à 10^{-4}, il suffit d'avoir

$$\frac{1}{p-1} \leqslant 10^{-4}.$$

La fonction Python devient :

Éditeur
```python
def approx():
    u = 2
    p = 2
    while 1/(p-1) > 0.0001:
        u = u + 1/(p**2*u)
        p = p + 1
    return u
```

La valeur renvoyée est une approximation de ℓ à 10^{-4} près.

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Dans toute cette partie, h désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad h(x) = x - \ln(x).$$

8. Dresser le tableau de variations de h en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$. On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{h(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $x > 0$, somme de fonctions dérivables, la fonction h l'est et on a :

$$\forall\, x \in \,]0\,;+\infty[\,,\ h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x},$$

du signe de $x - 1$ pour $x > 0$.
De plus,

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} (x - \ln(x)) = +\infty$$

et

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} (x - \ln(x)) = +\infty.$$

Enfin,

$$h(1) = 1.$$

On obtient donc :

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Ainsi,

$$\boxed{h(x) \geqslant 1 > 0 \quad \text{pour tout } x > 0.}$$

9. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et que l'on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{h(t)}$ est continue sur $[x, 2x]$ puisque $h(t) > 0$. L'intégrale définissant $\Phi(x)$ existe donc.
La fonction

$$x \longmapsto \int_x^{2x} \frac{1}{h(t)}\,\mathrm{d}t$$

est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, d'après la formule de dérivation d'une intégrale à bornes variables,

$$\Phi'(x) = \frac{2}{h(2x)} - \frac{1}{h(x)}.$$

Or

$$h(x) = x - \ln(x)$$

et

$$h(2x) = 2x - \ln(2x).$$

Ainsi,

$$\Phi'(x) = \frac{2(x - \ln x) - (2x - \ln(2x))}{(x - \ln x)(2x - \ln(2x))}.$$

Comme

$$\ln(2x) = \ln 2 + \ln x,$$

on obtient

$$\boxed{\Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}}.$$

10. a. Montrer que $\Phi'(x)$ a le signe du numérateur en s'appuyant sur le signe de $h(x)$ et $h(2x)$.

D'après la première question,

$$h(x) > 0 \qquad \text{et} \qquad h(2x) > 0$$

pour tout $x > 0$.
Par conséquent,

$$(x - \ln x)(2x - \ln(2x)) > 0.$$

Le dénominateur de $\Phi'(x)$ est donc strictement positif. Ainsi,

$$\boxed{\operatorname{sgn}(\Phi'(x)) = \operatorname{sgn}(\ln 2 - \ln x).}$$

Or

$$\ln 2 - \ln x = \ln\left(\frac{2}{x}\right),$$

d'où

$$\begin{cases} \Phi'(x) > 0 & \text{si } 0 < x < 2, \\ \Phi'(2) = 0, & \\ \Phi'(x) < 0 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

b. En déduire les variations de Φ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On en déduit que Φ est strictement croissante sur $]0, 2[$ puis strictement décroissante sur $]2, +\infty[$. Ainsi, Φ admet un maximum en $x = 2$.

x	0		2		$+\infty$
$\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
Φ	$\Phi(0)$	↗	$\Phi(2)$	↘	$\ln(2)$

11. a. Justifier l'encadrement : $0 \leqslant \dfrac{1}{h(t)} \leqslant 1$ pour tout $t > 0$.

D'après la première question,

$$h(t) \geqslant 1$$

pour tout $t > 0$. Comme $h(t) > 0$, on a

$$0 < \frac{1}{h(t)} \leqslant 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{0 \leqslant \frac{1}{h(t)} \leqslant 1 \quad \text{pour tout } t > 0.}$$

b. Montrer : $\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

Pour tout $x > 0$,

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{h(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Comme

$$0 \leqslant \frac{1}{h(t)} \leqslant 1,$$

on obtient

$$0 \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{h(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} 1\,\mathrm{d}t.$$

Donc

$$0 \leqslant \Phi(x) \leqslant 2x - x,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x.}$$

12. a. Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

Pour tout $x > 0$,
$$0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x.$$
Comme
$$\lim_{x\to 0^+} 0 = \lim_{x\to 0^+} x = 0,$$
le théorème des gendarmes donne
$$\lim_{x\to 0^+} \Phi(x) = 0.$$
Ainsi, Φ est prolongeable par continuité en 0 en posant
$$\boxed{\Phi(0) = 0.}$$

b. Montrer : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$. (On pensera à simplifier par $\ln(x)$)

Pour $x > 0$,
$$\Phi'(x) = \frac{\ln 2 - \ln x}{(x - \ln x)(2x - \ln(2x))}.$$
On simplifie l'expression en divisant numérateur et dénominateur par $\ln(x)^2$.
Comme
$$x - \ln x = -\ln x \left(1 - \frac{x}{\ln x}\right)$$
et
$$2x - \ln(2x) = -\ln x \left(1 - \frac{2x + \ln 2}{\ln x}\right),$$
on obtient
$$\Phi'(x) = \frac{\dfrac{\ln 2}{\ln x} - 1}{\ln x \left(1 - \dfrac{x}{\ln x}\right)\left(1 - \dfrac{2x + \ln 2}{\ln x}\right)}.$$
Or
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \lim_{\substack{u=\frac{1}{x} \\ u\to+\infty}} \frac{1}{-u \ln u} = 0$$
et
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x + \ln 2}{\ln x} = 0,$$
tandis que
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln 2}{\ln x} = 0.$$
Par conséquent,
$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \Phi'(x) = 0.}$$

13. On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.
On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$.
Tracer, en annexe, l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

D'après l'énoncé, Φ est dérivable en 0 et
$$\Phi'(0) = 0.$$

On sait également que

$$\Phi(2) \approx 1,1$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln 2 \approx 0,7.$$

La courbe passe donc par l'origine $\mathrm{O}(0,0)$, monte jusqu'au maximum

$$(2;\Phi(2)) \approx (2;1,1),$$

puis décroît et se rapproche de l'asymptote horizontale

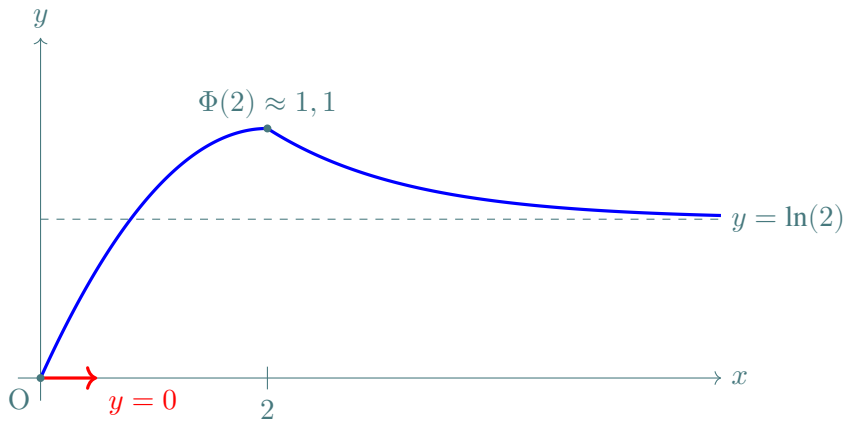
$$y = \ln 2 \approx 0,7.$$

La tangente en 0 est donnée par

$$y = \Phi(0) + \Phi'(0)x,$$

soit

$$\boxed{y = 0}.$$



Khôlles 3 — Suites récurrentes & Espaces vectoriels

1. Questions de Cours (Au choix de l'interrogateur)

Espaces vectoriels, Bases, Dimension et Rang

1. **Sous-espaces vectoriels engendrés**
   — Définir $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et énoncer le théorème fondamental sur la nature de cet ensemble.
2. **Familles libres, génératrices et bases**
   — Définir une famille génératrice, une famille libre et une base de E.
3. **Dimension finie**
   — Soit E un espace de dimension $n \geqslant 1$. Énoncer les corollaires sur les familles libres ou génératrices à n éléments.
4. **Inversibilité des matrices**
   — Énoncer les caractérisations équivalentes de l'inversibilité d'une matrice $\text{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à l'aide du système $\text{AX} = 0_{n,1}$ et de la famille de ses colonnes.

Stabilité, Définition et Points Fixes

5. **Intervalle stable et existence de la suite :**
   a. Donner la définition d'un intervalle $\text{I} \subset \mathcal{D}_f$ stable par une fonction f.
   b. Énoncer la propriété garantissant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \text{I}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie et vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \text{I}$.
6. **Notion de point fixe et convergence :**
   a. Définir la notion de point fixe d'une application f sur un intervalle I.
   b. Énoncer et démontrer la proposition fondamentale : si f est continue sur I et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \text{I}$, alors l est un point fixe de f ($f(l) = l$).

Monotonie, Variations & Comportement Dynamique

7. **Lien avec la monotonie de f :**
   a. Énoncer le théorème établissant la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque f est **croissante** sur I (selon le signe de $f(u_0) - u_0$).
   b. **(khûbe)** Expliquer le comportement des sous-suites d'indices pairs $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et impairs $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque la fonction f est **décroissante** sur I (définition et rôle de $g = f \circ f$).

Inégalité des Accroissements Finis (IAF) & Vitesse de Convergence

8. **Application de l'IAF aux suites récurrentes :**
   a. Énoncer le théorème de l'Inégalité des Accroissements Finis.

b. **(khûbe)** Énoncer et démontrer par récurrence la majoration de l'erreur : si I est un intervalle stable sur lequel $|f'| \leqslant M$ avec $M \in [0,1[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leqslant M^n |u_0 - l|$. En déduire la convergence de la suite par encadrement.

2. Exercices Types & Savoir-faire attendus

1. **Étude classique avec fonction croissante :**
   Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.
   a. Montrer que $[0,2]$ est un intervalle stable par $f : x \longmapsto \sqrt{x+1}$.
   b. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   c. Démontrer que la suite converge et déterminer sa limite $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
2. **Cas arithmético-géométrique (Application directe du cours) :**
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2$.
   a. Déterminer le point fixe de $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$.
   b. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide des variations de f et du signe de $u_1 - u_0$.
   c. Montrer que la suite converge vers son point fixe.
3. **Suite avec racine carrée (Théorème de convergence monotone) :**
   Soit $f(x) = \sqrt{2x+3}$ sur $[0,+\infty[$ et la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a. Étudier les variations de f et déterminer ses points fixes sur $[0,+\infty[$.
   b. Montrer que l'intervalle $I = [0,3]$ est stable par f.
   c. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.
   d. En déduire que la suite converge et calculer sa limite.
4. **Suite linéaire / rationnelle simple :**
   Soit $f(x) = \dfrac{x+1}{4}$ sur $[0,1]$ et la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a. Montrer que $[0,1]$ est stable par f et déterminer l'unique point fixe α de f.
   b. Calculer u_1, puis justifier la décroissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide des variations de f.
   c. Démontrer la convergence de la suite et déterminer sa limite.
5. **(khûbe) Application de l'Inégalité des Accroissements Finis (IAF) :**
   Soit $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos(x) + 1$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a. Montrer que $I = [0,2]$ est stable par f.
   b. Montrer qu'il existe un unique point fixe $\alpha \in I$.
   c. Montrer que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et en déduire que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
   d. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$ et conclure quant à la convergence.

6. **(khûbe) Étude d'une fonction décroissante et sous-suites pairs/impairs :**
   Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.
   a. Étudier la fonction $f : x \longmapsto 1 - x^2$ sur $[0,1]$ et expliciter $g = f \circ f$.
   b. Étudier la monotonie des suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
   c. Déterminer les points fixes de g et étudier la convergence de la suite mère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. **Étude d'une suite polynomiale et points fixes :**
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
   a. Montrer que $[0,1]$ est stable par $f : x \longmapsto x - x^2$.
   b. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, puis déterminer sa limite.
   c. Étudier le comportement et la divergence de la suite si $a < 0$.

8. **Savoir-faire informatique (`Python`) :**
   a. Écrire une fonction `Python` `suite\_u(n, u0)` renvoyant le n-ième terme d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$.
   b. Écrire une fonction `Python` utilisant une boucle `while` pour déterminer le plus petit entier n tel que $|u_n - l| \leqslant 10^{-4}$ (ou $u_n \geqslant 10^4$ en cas de divergence).

9. **IAF directe sur une exponentielle :**
   Soit $f(x) = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-x}$ sur $[0,1]$ et $u_0 = 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a. Vérifier que $f([0,1]) \subset [0,1]$.
   b. Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}$.
   c. En admettant l'existence d'un unique point fixe $\alpha \in [0,1]$, établir que $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{3}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
   d. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Corrigés

DM 4 Étude d'une suite définie par récurrence

Exercice 1 – (Extrait de EML 2023) :

Pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, on définit

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = f(u_n),$$

pour tout entier naturel n.

1. a. Étudier les variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.
   On dressera son tableau de variations en précisant les limites.

   b. Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

2. Informatique.

   a. Compléter la fonction Python suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```
Éditeur
def fonc_1(a):
    from numpy import exp
    u = 1
    n = 0
    while ..... :
        u = exp(-u)/u
        n = .....
    return n
```

   b. On considère maintenant la fonction suivante.

```
Éditeur
def fonc_2(a):
    from numpy import exp
    u = 1
    n = 0
    while u < a:
        u = exp(-u)/u
        n = n + 1
    return n
```

   Les appels `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` renvoient respectivement 6 et 5.
   En déduire un encadrement de u_5 et u_6.
   Commenter ce résultat en une ligne.

   c. Écrire une fonction Python prenant un entier n en argument et renvoyant u_n.

3. Pour tout réel $x \in [0\,;+\infty]$, on pose
$$g(x) = e^{-x} - x^2.$$
   a. Montrer que g réalise une bijection de $[0\,;+\infty]$ sur $]-\infty\,;1]$.
   b. En déduire que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution dans $]0\,;+\infty[$, notée α.

4. a. Montrer que $u_2 > u_0$.
   b. En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   c. Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. Pour tout réel strictement positif, on pose $h = f \circ f$ et on complète par $h(0) = 0$.
   a. Déterminer une expression explicite de $h(x)$.
   b. Montrer que h est continue sur $[0\,;+\infty]$.
   c. Montrer que l'équation $h(x) = x$ possède exactement deux solutions sur $[0\,;+\infty]$.
   d. En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

6. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Converge-t-elle ?

DM 4 Étude d'une suite définie par récurrence

Exercice 1 – (Extrait de EML 2023) :

Pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, on définit

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = f(u_n),$$

pour tout entier naturel n.

1. a. Étudier les variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.
On dressera son tableau de variations en précisant les limites.

Quotient de fonction $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.
Calculons sa dérivée.

$$\forall\, x \in]0\,;+\infty[\,,\ f'(x) = -e^{-x}x^{-1} - e^{-x}x^{-2} = -\frac{e^{-x}(x+1)}{x^2}.$$

Comme

$$e^{-x} > 0, \qquad x^2 > 0 \quad \text{et} \quad x+1 > 0 sur\,]0\,;+\infty[\,,$$

on en déduit

$$\boxed{f'(x) < 0 \quad \text{sur }]0\,;+\infty[\,.}$$

La fonction est donc strictement décroissante.
Calculons les limites.

Limite en 0 : Comme $e^{-x} \longrightarrow 1$,

$$f(x) \sim \frac{1}{x}.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.}$$

Limite en $+\infty$: Par croissances comparées,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0.$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

On en déduit le tableau de variations :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	↘	0

b. Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

Par récurrence :

Initialisation :

$$u_0 = 1 > 0.$$

Hérédité : Supposons $u_n > 0$.

Alors,

$$u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{u_n}.$$

Le numérateur est strictement positif, le dénominateur aussi. Donc

$$u_{n+1} > 0,$$

et la propriété est héréditaire.

Synthèse : Initialisée pour $n = 0$ et héréditaire, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.}$$

La suite est donc correctement définie.

2. Informatique.

a. Compléter la fonction Python suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

Éditeur
```
def fonc_1(a):
    from numpy import exp
    u = 1
    n = 0
    while ....... :
        u = exp(-u)/u
        n = .......
    return n
```

Il faut poursuivre tant que $u \leqslant a$.

Éditeur
```
def fonc_1(a):
    from numpy import exp
    u = 1
    n = 0
    while u <= a:
        u = exp(-u)/u
        n = n + 1
    return n
```

b. On considère maintenant la fonction suivante.

Éditeur
```
def fonc_2(a):
    from numpy import exp
    u = 1
    n = 0
    while u < a:
```

```
Éditeur
6           u = exp(-u)/u
7           n = n + 1
8       return n
```

Les appels `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` renvoient respectivement 6 et 5.
En déduire un encadrement de u_5 et u_6.
Commenter ce résultat en une ligne.

L'appel `fonc_1(10**6)` renvoie 6.
Cela signifie que

$$u_5 \leqslant 10^6 \quad \text{et} \quad u_6 > 10^6.$$

L'appel `fonc_2(10**(-6))` renvoie 5.
Donc

$$u_4 < 10^{-6} \quad \text{et} \quad u_5 \geqslant 10^{-6}.$$

On obtient finalement

$$\boxed{10^{-6} \leqslant u_5 \leqslant 10^6, \qquad u_6 > 10^6.}$$

Interprétation : Les termes successifs deviennent alternativement très petits puis très grands : la suite semble osciller.

c. Écrire une fonction Python prenant un entier n en argument et renvoyant u_n.

```
Éditeur
1  def suite_u(n):
2      from numpy import exp
3
4      u = 1
5
6      for k in range(n):
7          u = exp(-u)/u
8
9      return u
```

3. Pour tout réel $x \in [0\,;+\infty]$, on pose

$$g(x) = e^{-x} - x^2.$$

a. Montrer que g réalise une bijection de $[0\,;+\infty]$ sur $]-\infty\,;1]$.

Par somme et composée, la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;+\infty]$ donc au moins continue et on a :

$$\forall\, x \in]0\,;+\infty[\,,\ g'(x) = -e^{-x} - 2x.$$

Les deux termes sont strictement négatifs. Donc

$$\boxed{\forall\, x \in]0\,;+\infty[\,,\ g'(x) < 0.}$$

La fonction est strictement décroissante.
De plus,

$$g(0) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.$$

Ainsi

$$g([0\,;+\infty]) =]-\infty\,;1]\,.$$

D'après le théorème du même nom, la fonction g, **continue** et **strictement monotone** sur l'**intervalle** $]0\,;+\infty[$ établit une bijection sur son image $]-\infty\,;1]$.

b. En déduire que l'équation $f(x)=x$ possède une unique solution dans $]0\,;+\infty[$, notée α.

L'équation $f(x)=x$ est équivalente à

$$\frac{e^{-x}}{x}=x \iff e^{-x}=x^2 \iff g(x)=0.$$

Comme $0\in\,]-\infty\,;1]$, la bijection précédente assure l'existence d'un unique antécédent $\alpha\in\,]0\,;+\infty[$ à 0 par g :

$$\boxed{\exists!\alpha>0,\quad f(\alpha)=\alpha.}$$

c. Montrer que

$$\frac{1}{e}<\alpha<1.$$

Calculons

$$g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}=\frac{e-1}{e^2}>0.$$

Ensuite

$$g(1)=\frac{1}{e}-1<0.$$

Comme g est décroissante,

$$\boxed{\frac{1}{e}<\alpha<1.}$$

4. a. Montrer que $u_2>u_0$.

D'après la relation de récurrence qui définit la suite (u_n) :

$$u_1=f\left(u_0\right)=f(1)=\frac{e^{-1}}{1}=e^{-1} \text{ et } u_2=f\left(u_1\right)=\frac{e^{-e^{-1}}}{e^{-1}}=e^{1-\frac{1}{e}}.$$

Or comme on l'a déjà vu, $1-\dfrac{1}{e}>0$ donc $e^{1-\frac{1}{e}}>e^0$, soit $u_2>u_0$.

b. En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{P}(n)$: $u_{2(n+1)}\geqslant u_{2n}$ (soit $u_{2n+2}\geqslant u_{2n}$).

— **Initialisation :** Pour $n=0$, $u_2>u_0$ d'après la question précédente. $\mathrm{P}(0)$ est donc vraie.

— **Hérédité :** Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $u_{2n+2}\geqslant u_{2n}$. La fonction $h=f\circ f$ est croissante sur $]0,+\infty[$ comme composée de deux fonctions de même sens de variation.
En appliquant h à l'inégalité de récurrence, on obtient $h(u_{2n+2})\geqslant h(u_{2n})$, soit $u_{2n+4}\geqslant u_{2n+2}$, ce qui prouve $\mathrm{P}(n+1)$.

— **Synthèse :** Initialisée à $n=0$ et héréditaire, le propriété est donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c. Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

L'hérédité de la récurrence précédente a fait apparaître l'implication désormais vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{2n+2}>u_{2n} \implies f\left(u_{2n+2}\right)<f\left(u_{2n}\right), \text{ soit } u_{2n+3}<u_{2n+1},$$

en composant par f strictement décroissante.

Cela signifie que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ des termes de rangs impairs de la suite (u_n), est décroissante.
Or d'après 1.b) tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs, donc la suite (u_{2n+1}) est aussi minorée par 0 : elle est donc convergente, d'après le théorème de limite monotone.

5. Pour tout réel strictement positif, on pose
$$h = f \circ f,$$
et on complète par $h(0) = 0$.

   a. Déterminer une expression explicite de $h(x)$.

   Pour tout réel x strictement positif : $f(x) = \dfrac{e}{x}$ est strictement positif, donc $h(x) = f(f(x))$ est bien défini, et vaut
   $$h(x) = \frac{e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{\frac{e^{-x}}{x}} = e^{-e^{-x}/x} \times xe^{x} = xe^{x-e^{-x}/x}.$$

   b. Montrer que h est continue sur $[0\,;+\infty]$.

   La fonction h est déjà continue sur $]0;+\infty[$ car c'est le cas de f, continue sur cet intervalle comme quotient de fonctions qui le sont, et qui est à valeurs dans $]0;+\infty[$: h est la composée de deux fonctions continues sur $]0;+\infty[$.
   Par ailleurs :
   $$\lim_{x\to 0^+} x - \frac{e^{-x}}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X\to-\infty} e^{X} = 0.$$
   Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x-\frac{e^{-x}}{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{x-\frac{e^{-x}}{x}} = 0 \times 0 = 0 = h(0)$.
   La fonction h est donc continue en 0, et par conséquent elle l'est aussi sur tout l'intervalle $[0;+\infty[$.

   c. Montrer que l'équation $h(x) = x$ possède exactement deux solutions sur $[0\,;+\infty]$.

   On sait déjà que $h(0) = 0$, donc que 0 est solution de l'équation $h(x) = x$.
   De plus, pour tout $x > 0$:
   $$h(x) = x \iff xe^{x-e^{-x}/x} = x \iff e^{x-e^{-x}/x} = 1 \iff x - \frac{e^{-x}}{x} = 0 \iff e^{-x} - x^2 = 0 \iff g(x) = 0.$$
   On a déjà démontré en 3.b) que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$: il en est donc de même pour l'équation équivalente $h(x) = x$ sur cet intervalle.
   Finalement, l'équation $h(x) = x$ admet bien deux solutions dans $[0;+\infty[$: 0 et α.

   d. En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

   La suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $\ell \geqslant 0$, et comme de plus :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+3} = f\left(u_{2n+2}\right) = f \circ f\left(u_{2n+1}\right) = h\left(u_{2n+1}\right),$$
   alors par unicité de la limite et vu que h est continue sur $[0;+\infty[$, la limite ℓ est une solution positive de l'équation $h(x) = x$.
   Cette limite ne peut pas être α puisque $u_1 = e^{-1} < \alpha$ (voir les questions 3.c) et 4.a)) et la suite est (strictement) décroissante. On en déduit donc par élimination, que :
   $$\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0.$$

6. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Converge-t-elle ?

   Par définition, $\forall\, n \in_n, u_{2n} = f(u_{2n-1})$.

D'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0^+$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, par composition de limites, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{X\to 0^+} f(X) = +\infty.$$

La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc divergente vers $+\infty$ et n'est donc pas majorée.

Programme Probabilités

Ce que disait le programme en ECG1 :

I. Probabilités et statistiques

1 – Événements

Expérience aléatoire. Univers Ω des résultats observables	On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples où l'univers Ω des résultats possibles est fini, et où $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements.
Événements, événements élémentaires, opérations sur les événements, événements incompatibles.	On fera le lien entre ces opérations sur les événement et les connecteurs logiques.
Système complet d'événements fini.	Une famille $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$, où I est un sous-ensemble fini de **N**, est un système complet si elle vérifie les deux conditions suivantes : — $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \varnothing$ si $i \neq j$ — $\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i = \Omega$.

2 – Coefficients binomiaux

Factorielle, notation $n!$.	Interprétation de $n!$ en tant que nombre de bijections d'ensemble à n éléments dans un ensemble à n éléments.
Coefficients binomiaux, notation $\binom{n}{p}$.	Nombre de chemins d'un arbre réalisant p succès pour n répétitions.
Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.	Relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
Formule du triangle de Pascal.	La formule de Pascal fournit un algorithme de calcul efficace pour le calcul numérique des coefficients binomiaux.
$\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.	On pourra démontrer cette formule par récurrence à partir de la formule du triangle de Pascal.

3 – Probabilité

Définition d'une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.	On restreint, la notion de probabilité à une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans [0, 1] vérifiant : — pour tous A et B de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ — $P(\Omega) = 1$.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.	Généralisation à la réunion de 3 événements.

4 – Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle.	Notation P_A.
Formule des probabilités composées.	Si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'événements fini, alors pour tout événement B : $$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i).$$ Si de plus, pour tout $i (1 \leqslant i \leqslant n), P(A_i) \neq 0$, on a : $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) P(A_i)$.
Formule des probabilités totales	Si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'événements fini, alors pour tout événement B : $$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i).$$ Si de plus, pour tout $i (1 \leqslant i \leqslant n), P(A_i) \neq 0$, on a : $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) P(A_i)$.
Formule de Bayes.	On donnera de nombreux exemples d'utilisation de ces formules.

5 – Indépendance en probabilité

Indépendance de deux événements.	Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.
Indépendance mutuelle de n événements $(n \in \mathbf{N}^*)$. Si n événements A_i sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i, avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.	

II. Probabilités - Variables aléatoires réelles

Dans ce chapitre, on généralise l'étude faite au premier semestre ; le vocabulaire général est adopté et complété (en particulier le vocabulaire « espace probabilisé » et la notation ($\Omega, \mathcal{A}, P$)), mais aucune difficulté théorique sur l'ensemble des événements ne sera soulevée dans ce cadre. On n'emploiera pas le terme tribu.

1 – Espace probabilisé

On généralisera dans ce paragraphe l'étude effectuée lors du premier semestre sans soulever de difficultés théoriques.

Univers Ω des issues d'une expérience et ensemble des événements $\mathcal{A}$.	L'ensemble des événements contient Ω, est stable par union, par intersection dénombrable et par passage au complémentaire.
Généralisation de la notion de système complet d'événements à une famille dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à Ω.	
Généralisation de la notion de probabilité.	
Généralisation de la notion de système complet d'événements à une famille dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à Ω.	
Généralisation de la notion de probabilité conditionnelle.	
Généralisation de la formule des probabilités composées.	
Généralisation de la formule des probabilités totales.	
Indépendance mutuelle d'une suite infinie d'événements.	

IV

Rappels d'ECG-1
Probabilités

Ah, les probabilités !… Bien évidemment, quand on parle de probabilités, on pense aux jeux de hasard. C'est bien, initialement, en ce sens qu'elles ont été développées. Au fil des siècles, viennent ensuite de nombreux contributeurs pour consolider et développer les connaissances sur ce domaine : Galilée, Fermat, Pascal, Huygens, Moivre, Laplace, Bayes, Lagrange.

Voici une citation de Jean Dieudonné (1906-1992, mathématicien français, un des membres fondateurs du célèbre groupe Bourbaki), datée de 1977 : « *Le calcul des probabilités, en tant que discipline, n'existe guère que depuis 1933, comme partie de la théorie moderne de l'Intégration ; elle a hérité de ses propres problèmes et même de son langage, des trois siècles antérieurs au cours desquels le Calcul des probabilités était un mélange de raisonnements d'allure mathématique et de considérations plus ou moins intuitives sur le rôle et l'évaluation du hasard dans les comportements humains ou les phénomènes naturels.* »

Que s'est-il alors passé en 1933 ? C'est en 1933 que parait en allemand le manuel Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Fondements de la théorie des probabilités) rédigé par Andreï Kolmogorov (1903-1987, mathématicien russe), dans lequel il définit, entre autres, les trois axiomes de probabilités. On lui doit cette formalisation de la théorie des probabilités sur laquelle reposent désormais tous les résultats de probabilités.

C'est bien cette formalisation qui a permis à la théorie des probabilités d'être légitimement reconnue comme branche des mathématiques.

Plan du chapitre

I Probabilités ***375***

I.1 Espaces probabilisés 375

I.2 Probabilités 375

I.3 Le cas de l'équiprobabilité 377

I.4 Probabilité d'une réunion dénombrable 378

I.5 Probabilité conditionnelle et indépendance 380

I.6 Probabilité d'une intersection dénombrable 383

I. Probabilités

I.1 – Espaces probabilisés

On représente le résultat d'une expérience aléatoire *comme un élément ω de l'ensemble Ω de tous les résultats possibles. L'ensemble Ω est appelé l'*univers *et tout élément $\omega \in \Omega$ une* issue.

Dans la suite, $\mathcal{A}$ est une sous-partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ dont les éléments sont appelés événements.

Il vérifie :

- $\Omega \in \mathcal{A}$.
- *$\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire :* $\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{A}$, $\overline{\mathrm{A}} = \Omega \setminus \mathrm{A} \in \mathcal{A}$.
- *$\mathcal{A}$ est stable par union et intersection finie ou dénombrable : si* I *est un ensemble fini ou dénombrable et si pour tout $i \in \mathrm{I}$, $\mathrm{A}_i \in \mathcal{A}$, alors*

$$\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i \in \mathcal{A}.$$

Vocabulaire : *$\mathcal{A}$ est l'ensemble des événements. On parle aussi de tribu ou de σ-algèbre.*

Dans la pratique, on connait rarement l'ensemble $\mathcal{A}$ des évènements avec lequel on travaille. Le seul cas où on a vraiment accès à $\mathcal{A}$ est celui où Ω est un ensemble fini (c'est-à-dire lorsqu'on considère une expérience n'ayant qu'un nombre fini d'issues possibles).

Dans ce cas, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω.

Exemple 1 :

On considère l'expérience consistant à lancer simultanément deux dés.

Dans ce cas :

- *L'univers est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. Autrement dit, une issue $\omega \in \Omega$ est un couple de la forme (i, j), où i représente le résultat du premier dé et j celui du second.*
- *L'ensemble $\mathcal{A}$ des évènements est $\mathcal{P}(\Omega)$.*

I.2 – Probabilités

Définition 1 :

Soient Ω, un univers des possibles et $\mathcal{A}$ un ensemble d'événements.

Une probabilité *est une application* **P** *réelle définie sur $\mathcal{A}$ vérifiant les conditions suivantes. :*

- $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$.
- $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.
- **P** *est σ-additive :*

Pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ finie ou dénombrable d'événements deux à deux disjoints (on dira plutôt incompatible),

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbf{P}(A_i).$$

Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(A)$ est appelée la probabilité *de l'événement* A.

Remarque : *Dans le cas où l'ensemble des indices I est dénombrable (par exemple, $\mathbb{N}$), la définition suppose implicitement la convergence de la série $\sum_{i\in I} \mathbf{P}(A_i)$.*

Vocabulaire : *La donnée d'un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}$ = où Ω est un univers des possibles, $\mathcal{A}$ un ensemble d'événements sur Ω et $\mathbf{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, définit un* espace probabilisé.

Proposition 1 – Premières règles de calcul :

P1 • *Événements contraires :* $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

P2 • $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ *et* $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.

P3 • *Différence d'événements :* $\mathbf{P}(A \setminus B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

P4 • *Croissance : Si* $A \subset B$ *alors* $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$.

Preuve :

P1 • Les événements A et $\overline{A}$ sont incompatibles. On a donc :

$$\mathbf{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbf{P}(\overline{A}) + \mathbf{P}(A).$$

Or, $A \cup \overline{A} = \Omega$ donc $\mathbf{P}(A \cup \overline{A}) = 1$.
D'où, $1 = \mathbf{P}(\overline{A}) + \mathbf{P}(A)$, et $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

P2 • $\varnothing = \overline{\Omega}$ donc $\mathbf{P}(\varnothing) = 1 - \mathbf{P}(\Omega) = 0$.

P3 • Rappelons que $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
Or, $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ et $(A \cap \overline{B}) \cap (A \cap B) = \varnothing$.
Donc $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbf{P}(A \cap B)$ puis $\mathbf{P}(A \setminus B) = \mathbf{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

P4 • Soit $A \subset B$. Alors $A \cap B = A$ et $0 \leqslant \mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$.
Donc, $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$.

Vocabulaire :

— *Un événement de probabilité nulle est dit* négligeable.

— *Un événement de probabilité 1 est dit* presque sûr.

Attention
A quasi certain n'implique pas $A = \Omega$.
A quasi-impossible n'implique pas $A = \varnothing$.

Contre-exemple 2 :

On considère l'expérience aléatoire consistant en un lancer d'un dé à 6 faces. L'univers associé est $\Omega = [\![1, 6]\!]$.

On munit l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *de la probabilité* $\mathbb{P}$ *telle que* $\mathbb{P}(\{5\}) = \dfrac{1}{2}$ *et* $\mathbb{P}(\{6\}) = \dfrac{1}{2}$ *(attention,* $\mathbb{P}$ *n'est pas la probabilité uniforme habituelle).*

1. *Obtenir un résultat inférieur à* 4 *est un événement* A *quasi-impossible.* $\mathrm{A} = \{1, 2, 3, 4\} \neq \emptyset$ *et* $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 0$.
2. *Obtenir un résultat supérieur ou égal à* 5 *est un événement* B *quasi-certain.* $\mathrm{B} = \{5, 6\} \neq \Omega$ *et* $\mathbb{P}(\mathrm{B}) = 1$.

On retiendra donc que la notion d'événement quasi-certain (resp. quasi-impossible) est dépendante de la probabilité $\mathbb{P}$ *choisie.*

Définition 2 – Système complet d'événements :

Soit $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille finie ou dénombrable d'évènements.*

On dit que :

D1 • $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est un* système complet d'évènements *si les évènements* A_i *sont deux à deux incompatibles et* $\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i = \Omega$.

D2 • $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est un* système presque complet d'évènements *si les évènements* A_i *sont deux à deux incompatibles et* $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i\right) = 1$.

Pour tout évènement $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, $(\mathrm{A}, \bar{\mathrm{A}})$ *est un système complet d'évènements.*

Proposition 2 :

Si $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est un système complet d'évènements, alors* $\sum_{i\in\mathrm{I}} \mathbf{P}(\mathrm{A}_i) = 1$.

I.3 – Le cas de l'équiprobabilité

Lorsque l'on travaille sur un univers fini, il est fréquent de considérer l'application probabilité pour laquelle toutes les issues ont la même probabilité de se produire. Rappelons la définition de cette application.

Théorème 3 – Équiprobabilité :

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *un espace probabilisable fini. Ainsi* $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

1. *Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ prenant la même valeur sur tous les événements élémentaires* i.e. *telle que :*

$$\mathbf{P}(\{\omega_1\}) = \ldots = \mathbf{P}(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}.$$

2. *Cette probabilité est appelée* probabilité uniforme *et est définie par :*

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{P}: & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0\,;1] \\ & \mathrm{A} & \longmapsto & \mathbf{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{\mathrm{Card}(\mathrm{A})}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{\textit{nombre d'issues réalisant A}}{\textit{nombre d'issues de l'expérience}} \end{array}$$

Si l'univers fini Ω est muni de la probabilité uniforme, les calculs des probabilités se ramènent à des calculs de dénombrement.

Exemple 3 :

Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules noires.

On considère l'expérience consistant à tirer une boule dans cette urne. On fait l'hypothèse de l'équiprobabilité des résultats.

Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ? Celle de tirer une boule noire ?

Notons A *: « tirer une boule rouge » et* B *: « tirer une boule noire ».*
Alors :

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \frac{4}{10} \quad \textit{et} \quad \mathbf{P}(\mathrm{B}) = 1 - \mathbf{P}(\bar{\mathrm{B}}) = 1 - \mathbf{P}(\mathrm{A}) = 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10}.$$

I.4 – Probabilité d'une réunion dénombrable

Théorème 4 – de la limite monotone :

Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

T1 • *Dans le cas général,* $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\mathrm{A}_n)$. *(Inégalité de Boole)*

T2 • *Si les A_k sont* ***deux à deux incompatibles*** i.e. $\forall\, i \neq j,\ \mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$, *alors*

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\mathrm{A}_n).$$

T3 • *Si la suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***croissante*** *pour l'inclusion* i.e. $\forall\, i \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}_i \subset \mathrm{A}_{i+1}$, *alors*

$$\textit{la suite } \left(\mathbf{P}(\mathrm{A}_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ converge} \quad \textit{et} \quad \mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{A}_n).$$

Preuve :

T3 • Comme $A_n \subseteq A_{n+1}$, on a $\mathbb{P}(A_n) \leqslant \mathbb{P}(A_{n+1})$.
Ainsi, la suite $(\mathbb{P}(A_n))$ est croissante. Elle est de plus majorée par 1 donc convergente vers $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$.

Afin de pouvoir utiliser la σ-additivité de l'application $\mathbb{P}$, on construit une suite (B_n) d'événements deux à deux incompatibles telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k = \bigcup_{k=0}^{n} B_k \text{ ce qui impliquera aussi } \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n.$$

Pour cela, on pose :

— $B_0 = A_0$,

— $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $B_k = A_k \setminus (A_0 \cup \cdots \cup A_{k-1}) = A_k \setminus A_{k-1}$ car $A_0 \cup \cdots \cup A_{k-1} = A_{k-1}$ puisque (A_n) est une suite croissante.

Ainsi on a : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

et surtout $\forall\, k \geqslant 1$, $\begin{aligned}\mathbb{P}(B_k) &= \mathbb{P}(A_k \backslash A_{k-1}) = \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_k \cap A_{k-1}) \\ &= \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1}),\end{aligned}$

où l'on reconnaît le germe d'une série télescopique.
D'où,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) &= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k)\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\mathbb{P}(B_0) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\mathbb{P}(A_0) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1})\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).\end{aligned}$$

Et ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Corollaire 5 :

*Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **quelconque** d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.*

1. *La suite $\left(\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge.*
2. $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$.

Remarques :

— *Il faut bien noter que l'on ne suppose pas, dans ce dernier résultat, que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Pour pouvoir utiliser le théorème de la limite monotone on a donc construit la suite auxiliaire $\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$ qui est une suite croissante d'événements.*

— *L'intérêt de ce théorème est de ramener un calcul de probabilité d'une union **infinie** au calcul de probabilité d'une union **finie**.*

Preuve : Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{B}_n = \bigcup_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k.$$

La suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion. D'après le théorème théorème (4) , on a alors

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{B}_n).$$

Or,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathrm{A}_k.$$

Par conséquent,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathrm{A}_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k\right).$$

I.5 – Probabilité conditionnelle et indépendance

Définition 3 – Probabilité conditionnelle :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbf{P}(\mathrm{A}) \neq 0$. Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$.

La probabilité conditionnelle de B sachant A, notée $\mathbf{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$, est

$$\mathbf{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{\mathbf{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathbf{P}(\mathrm{A})}.$$

Remarques :

— *À partir de la définition, on prouve une première formule de Bayes. Si $\mathbf{P}(\mathrm{A}) \neq 0$ et $\mathbf{P}(\mathrm{B}) \neq 0$, alors*

$$\mathbf{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{\mathbf{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \cdot \mathbf{P}(\mathrm{A})}{\mathbf{P}(\mathrm{B})}.$$

— *Si A est un événement non négligeable, alors $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}_{\mathrm{A}})$ est un espace probabilisé.*

Définition 4 – Indépendance deux à deux et mutuelle :

D1 • *Deux événements A et B sont dits* indépendants *pour la probabilité $\mathbf{P}$ si*

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \mathbf{P}(\mathrm{A}) \times \mathbf{P}(\mathrm{B}).$$

D2 • *Soit $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille finie ou dénombrable d'événements. Les événements de cette famille sont dits* mutuellement indépendants *si pour toute partie finie non vide $\{i_1, i_2, \cdots, i_p\} \subset \mathrm{I}$,*

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{A}_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{p} \mathbf{P}\left(\mathrm{A}_{i_k}\right).$$

Attention
La notion d'indépendance n'est pas une notion intrinsèque aux événements : elle dépend fortement de la probabilité choisie. Autrement dit, deux événements peuvent être indépendants pour une probabilité et dépendants pour une autre.

Cas particulier de 3 événements : *Les événements A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants si, et seulement si :*

— $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2)$

— *et* $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_3)$

— *et* $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}(A_3)$

— *ET* $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}(A_3)$.

Contre-exemple 4 – L'indépendance 2 à 2 n'entraîne pas la mutuelle indépendance :

On considère une pièce qu'on lance deux fois et on considère les événements suivants :

A : *« On obtient pile au premier lancer »*
B : *« On obtient face au deuxième lancer »*
C : *« On obtient deux lancers différents »*

1er / 2ème	P	F
P	(P, P)	(P, F)
F	(F, P)	(F, F)

On a $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = \frac{1}{2}$.

On voit facilement que $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(B \cap C) = \frac{1}{4}$.

Donc les événements sont deux à deux indépendants.

Pourtant, $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$ *et* $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) = \frac{1}{8}$ *donc* $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$.

Les événements ne sont pas mutuellement indépendants.

Proposition 6 :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé fini.*

P1 • *Un événement* A *est indépendant avec lui-même si, et seulement si* $\mathbf{P}(A) = 0$ *ou* $\mathbf{P}(A) = 1$.

P2 • *Deux événements de probabilité non nulle* A *et* B *sont indépendants si, et seulement si* $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$ *ou* $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$.

Preuve :

P1 • A est indépendant avec lui-même si, et seulement si

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A \cap A) = \mathbf{P}(A)^2 &\iff \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A)^2 = 0 \\ &\iff \mathbf{P}(A)\big(\mathbf{1} - \mathrm{P}(A)\big) = 0 \\ &\iff \mathbf{P}(A) = 0 \text{ ou } \mathbf{P}(A) = 1. \end{aligned}$$

P2 • Soit A de probabilité non nulle. Alors,

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B) \text{ et } \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(B) \implies \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(B).$$

Comme $\mathbf{P}(A) \neq 0$, alors $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}_A(B)$.
La réciproque est évidente.

Remarque : *Dans le cas où l'un des deux événements a une probabilité nulle, les événements sont de toute façon nécessairement indépendants (même si c'est absurde !).*

Cette dernière expression est plus parlante : la probabilité de B *est inchangée qu'on sache ou non que* A *est réalisé.*

C'est plus proche de la notion intuitive d'indépendance, mais a plusieurs inconvénients : l'asymétrie, et l'hypothèse que A *est de probabilité non nulle.*

Théorème 7 :

Soient A_1, ...,A_n *des événements mutuellement (resp. deux a deux) indépendants.*

Pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, *on note* $\mathrm{B}_i = \mathrm{A}_i$ *ou* $\mathrm{B}_i = \overline{\mathrm{A}_i}$.

Alors les événements B_1, ..., B_n *sont mutuellement (resp. deux a deux) indépendants.*

Preuve : On montre par récurrence sur $p \in [\![0\,;n]\!]$ la propriété

$\mathcal{P}(p)$: si p des B_i sont $\overline{\mathrm{A}_i}$ (et les autres A_i), alors B_1, ..., B_n sont mutuellement indépendants.

Par hypothèse, les événements A_1, ..., A_n étant mutuellement indépendants donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons alors l'existence d'un $p \in [\![0\,;n-1]\!]$ tel que $\mathcal{P}(p)$ soit vraie.

On suppose que $p+1$ des B_i sont des $\overline{\mathrm{A}_i}$ (et les autres des A_i).

Soit $\mathrm{I} \in \mathcal{P}([\![1\,;n]\!])$. Nécessairement, card $(\mathrm{I}) \geqslant p+1$.

Montrons que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{B}_i\right) = \prod_{i\in \mathrm{I}} \mathbf{P}(\mathrm{B}_i)$.

Quitte à réordonner les B_i, on peut supposer que $\mathrm{I} = [\![1\,;q]\!]$, $\mathrm{B}_i = \mathrm{A}_i$ pour $i \in [\![1\,;q-p-1]\!]$ et que $\mathrm{B}_i = \overline{\mathrm{A}_i}$ pour $i \in [\![q-p\,;q]\!]$. On considère donc la probabilité :

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{A}_{q-p-1} \cap \underbrace{\overline{\mathrm{A}_{q-p}} \cap \ldots \cap \overline{\mathrm{A}_q}}_{p+1\ \overline{\mathrm{A}_i}}).$$

L'idée de la démonstration est de transformer un $\overline{\mathrm{A}_i}$, par exemple $\overline{\mathrm{A}_{q-p}}$, par A_i *i.e.* A_{q-p} à l'aide de la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcccc}
\mathbf{P}(\mathrm{B}) & = & \mathbf{P}(\mathrm{B}\cap \mathrm{A}_{q-p}) & + & \mathbf{P}(\mathrm{B}\cap \overline{\mathrm{A}_{q-p}}) \\
\mathbf{P}(\mathrm{B}\cap \overline{\mathrm{A}_{q-p}}) & = & \mathbf{P}(\mathrm{B}) & - & \mathbf{P}(\mathrm{B}\cap \mathrm{A}_{q-p})
\end{array}$$

Par commutativité de l'intersection, on a donc :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\mathrm{A}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{A}_{q-p-1} \cap \overline{\mathrm{A}_{q-p}} \cap \ldots \cap \overline{\mathrm{A}_q}) \\
&\quad = \mathbf{P}(\mathrm{A}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{A}_{q-p-1} \cap \underbrace{\overline{\mathrm{A}_{q-p+1}} \cap \ldots \cap \overline{\mathrm{A}_q}}_{p\ \overline{\mathrm{A}_i}}) + \mathbf{P}(\mathrm{A}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{A}_{q-p} \cap \underbrace{\overline{\mathrm{A}_{q-p+1}} \cap \ldots \cap \overline{\mathrm{A}_q}}_{p\ \overline{\mathrm{A}_i}})
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on a alors :

$$= \mathbf{P}(\mathrm{A}_1)\ldots\mathbf{P}(\mathrm{A}_{q-p-1})\mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}_{q-p+1}})\ldots\mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}_q}) - \mathbf{P}(\mathrm{A}_1)\ldots\mathbf{P}(\mathrm{A}_{q-p})\mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}_{q-p+1}})\ldots\mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}_q})$$

On factorise …

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{P}(\mathrm{A}_1)\ldots\mathbf{P}(\mathrm{A}_{q-p-1})\mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}_{q-p+1}})\ldots\mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}_q})\left(1-\mathbf{P}(\mathrm{A}_{q-p})\right) \\
&= \mathbf{P}(\mathrm{A}_1)\ldots\mathbf{P}(\mathrm{A}_{q-p-1})\mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}_{q-p+1}})\ldots\mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}_q})\mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}_{q-p}}) \\
&= \mathbf{P}(\mathrm{A}_1)\ldots\mathbf{P}(\mathrm{A}_{q-p-1})\mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}_{q-p}})\ldots\mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}_q})
\end{aligned}$$

La famille $(\mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_n)$ est donc mutuellement indépendante : $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

Vraie pour $p = 0$ et héréditaire la propriété $\mathcal{P}(p)$ est donc vraie pour tout $p \in [\![0\,;n]\!]$.

Le raisonnement pour l'indépendance deux à deux est identique en plus simple et est laissé à l'étudiant sérieux.

Corollaire 8 :

Soient A_1, ..., A_n des événements mutuellement indépendants et $p \in [\![1\,;n-1]\!]$.

Alors :

1. $\mathrm{A}_1 \cap \dots \cap \mathrm{A}_p$ *et* $\mathrm{A}_{p+1} \cap \dots \cap \mathrm{A}_n$ *sont indépendants.*
2. $\mathrm{A}_1 \cup \dots \cup \mathrm{A}_p$ *et* $\mathrm{A}_{p+1} \cup \dots \cup \mathrm{A}_n$ *sont indépendants.*
3. $\mathrm{A}_1 \cap \dots \cap \mathrm{A}_p$ *et* $\mathrm{A}_{p+1} \cup \dots \cup \mathrm{A}_n$ *sont indépendants.*
4. $\mathrm{A}_1 \cup \dots \cup \mathrm{A}_p$ *et* $\mathrm{A}_{p+1} \cap \dots \cap \mathrm{A}_n$ *sont indépendants.*

Preuve :

1. On a, par définition de la mutuelle indépendance :
$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big((\mathrm{A}_1 \cap \dots \cap \mathrm{A}_p) \cap (\mathrm{A}_{p+1} \cap \dots \cap \mathrm{A}_n)\Big) &= \mathbf{P}(\mathrm{A}_1 \cap \dots \cap \mathrm{A}_n) = \mathbf{P}(\mathrm{A}_1) \dots \mathbf{P}(\mathrm{A}_n)\\ &= \Big(\mathbf{P}(\mathrm{A}_1) \dots \mathbf{P}(\mathrm{A}_p)\Big)\Big(\mathbf{P}(\mathrm{A}_{p+1}) \dots \mathbf{P}(\mathrm{A}_n)\Big)\\ &= \mathbf{P}(\mathrm{A}_1 \cap \dots \cap \mathrm{A}_p)\mathbf{P}(\mathrm{A}_{p+1} \cap \dots \cap \mathrm{A}_n).\end{aligned}$$
2. D'après la proposition précédente, $\overline{\mathrm{A}_1}$, …, $\overline{\mathrm{A}_n}$ sont aussi mutuellement indépendants.
Les événements $\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}_1} \cap \dots \cap \overline{\mathrm{A}_p}$ et $\mathrm{B} = \overline{\mathrm{A}_{p+1}} \cap \dots \cap \overline{\mathrm{A}_n}$ sont donc indépendants d'après le point précédent.
D'après le théorème (7) , les événements $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}_1 \cup \dots \cup \mathrm{A}_n$ et $\overline{\mathrm{B}} = \mathrm{A}_{p+1} \cup \dots \cup \mathrm{A}_n$ sont alors indépendants également.
3. D'après la proposition précédente, A_1, …, A_p, $\overline{\mathrm{A}_{p+1}}$, …, $\overline{\mathrm{A}_p}$ sont mutuellement indépendants.
Les événements $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \cap \dots \cap \mathrm{A}_p$ et $\mathrm{B} = \overline{\mathrm{A}_{p+1}} \cap \dots \cap \overline{\mathrm{A}_n}$ sont donc aussi indépendants par le premier point.
Le théorème (7) entraîne alors que $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \cap \dots \cap \mathrm{A}_p$ et $\overline{\mathrm{B}} = \mathrm{A}_{p+1} \cup \dots \cup \mathrm{A}_n$ sont indépendants.
4. Le dernier point se montre comme le précédent avec $\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}_1} \cap \dots \cap \overline{\mathrm{A}_p}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{A}_{p+1} \cap \dots \cap \mathrm{A}_n$.
Le théorème (7) entraîne encore que $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}_1 \cup \dots \cup \mathrm{A}_p$ et $\mathrm{B} = \mathrm{A}_{p+1} \cap \dots \cap \mathrm{A}_n$ sont indépendants.

I.6 – Probabilité d'une intersection dénombrable

Proposition 9 – Probabilité d'une intersection finie :

Cas de deux évènements :

— *Si* A *et* B *sont indépendants, alors* $\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathbf{P}(\mathrm{A}) \times \mathbf{P}(\mathrm{B})$.

— *Dans le cas général, on a* $\mathbf{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \underset{\mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}})\neq 0}{=} \mathbf{P}(\mathrm{A})\times\mathbf{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \underset{\mathbf{P}(\overline{\mathrm{B}})\neq 0}{=} \mathbf{P}(\mathrm{B})\times\mathbf{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$

— *Si* $\mathbf{P}(\mathrm{A})=0$ *ou* $\mathbf{P}(\mathrm{B})=0$ *alors* $\mathbf{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0$.

Cas d'un nombre fini d'évènements :

— *Si les* $(\mathrm{A}_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ *sont* ***mutuellement indépendants****, on a* $\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{A}_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{A}_i)$.

— *Dans le cas général, on dispose de la* formule des probabilités composées *:*
Si $\mathbf{P}(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\cap\ldots\cap\mathrm{A}_{n-1})\neq 0$*, alors*

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\cap\ldots\cap\mathrm{A}_n)=\mathbf{P}(\mathrm{A}_1)\cdot\mathbf{P}_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{A}_2)\cdot\mathbf{P}_{\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2}(\mathrm{A}_3)\ldots\mathbf{P}_{\mathrm{A}_1\cap\cdots\cap\mathrm{A}_{n-1}}(\mathrm{A}_n). \tag{IV.1}$$

Méthode
La formule des probabilités composées s'applique lorsqu'il y a un enchainement temporel des évènements (A_1 étant le premier à advenir, puis $\mathrm{A}_2,\ldots$, puis A_n en dernier), chaque résultat influant sur les suivants.

Preuve : On commence par remarquer que toutes les probabilités conditionnelles sont correctement définies puisque $\mathbf{P}(\mathrm{A}_1)\geqslant\mathbf{P}(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2)\geqslant\cdots\geqslant\mathbf{P}(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\cap\cdots\cap\mathrm{A}_{p-1})>0$.

Ensuite, il suffit d'utiliser la définition des probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(\mathrm{A}_1)\times\mathbf{P}_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{A}_2)\times\mathbf{P}_{\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2}(\mathrm{A}_3)\times\cdots\times\mathbf{P}_{\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\cap\cdots\cap\mathrm{A}_{p-1}}(\mathrm{A}_p)\\ =&\cancel{\mathbf{P}(\mathrm{A}_1)}\times\frac{\cancel{\mathbf{P}(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2)}}{\cancel{\mathbf{P}(\mathrm{A}_1)}}\times\frac{\cancel{\mathbf{P}(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\cap\mathrm{A}_3)}}{\cancel{\mathbf{P}(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2)}}\times\cdots\times\frac{\mathbf{P}(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\cap\cdots\cap\mathrm{A}_{p-1}\cap\mathrm{A}_p)}{\cancel{\mathbf{P}(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\cap\cdots\cap\mathrm{A}_{p-1})}}\\ =&\mathbf{P}(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\cap\cdots\cap\mathrm{A}_p)\end{aligned}$$

Remarque : *La formule* (IV.1) *correspond simplement à la multiplication des probabilités sur les branches d'un arbre lors de son parcours.*

Exemple 5 :

Une urne contient initialement 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire une boule. On la remet dans l'urne avec une boule de la même couleur. On procède à un deuxième tirage.

Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?

Notons N_i*, pour* $i=1,2$*, l'événement « on tire une boule noire au* $i^{\text{ème}}$ *tirage ».*
On obtient :

$$\mathbf{P}(\mathrm{N}_1\cap\mathrm{N}_2)=\mathbf{P}(\mathrm{N}_1)\mathbf{P}_{\mathrm{N}_1}(\mathrm{N}_2)=\frac{2}{6}\times\frac{3}{7}=\frac{1}{7}$$

car avant le second tirage, l'urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires.

Théorème 10 – de la limite monotone :

Soient $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'événements sur un espace probabilisé* $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$.

Si $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***est décroissante*** *pour l'inclusion* i.e. $\forall\, k\in\mathbb{N},\ \mathrm{A}_{k+1}\subset\mathrm{A}_k$*, alors*

$$\text{la suite } \left(\mathbf{P}(\mathrm{A}_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{A}_n\right)=\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}(\mathrm{A}_n).$$

Corollaire 11 :

*Soient $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **quelconque** d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.*

1. *La suite $\left(\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge.*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} \mathrm{A}_k\right)$.

Mêmes remarques que précédent, la suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas supposée décroissante et ce théorème nous permettra de nous ramener au calcul d'une intersection finie.

Preuve : Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{B}_n = \bigcap_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k.$$

La suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion. D'après le théorème théorème (10) , on a alors

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{B}_n).$$

Or,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k = \bigcap_{k=0}^{+\infty} \mathrm{A}_k.$$

Par conséquent,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} \mathrm{A}_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k\right).$$

Exemple 6 – Exemple d'expérience aléatoire infinie :

On considère l'expérience suivante : on lance consécutivement une infinité de fois une pièce équilibrée. On pose pour tout $k \geqslant 1$ les événements :

$$\mathrm{F}_k = \text{« obtenir FACE au lancer numéro } k \text{ »}.$$

On les suppose mutuellement indépendants et on a pour tout $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(\mathrm{F}_k) = \dfrac{1}{2}$.

On pose maintenant les événements :

$$\mathrm{A} = \text{« On a obtenu au moins une fois FACE parmi l'infinité de lancers ».}$$
$$\mathrm{B} = \text{« On a obtenu aucun FACE parmi l'infinité de lancers ».}$$

Cherchons la probabilité des événements A et B.

Pour cela, on va écrire ces événements comme une suite d'événements plus simples dont on peut calculer la probabilité. On pose pour tout $k \geqslant 1$:

$$\mathrm{A}_k = \text{« On a obtenu au moins une fois FACE parmi les lancers de } 0 \text{ à } k \text{ »} = \bigcup_{j=0}^{k} \mathrm{F}_j.$$

$$\mathrm{B}_k = \text{« On a obtenu aucun FACE parmi les lancers de } 0 \text{ à } k \text{ »} = \bigcap_{j=0}^{k} \overline{\mathrm{F}_j}.$$

Il est facile de voir que pour tout $k \geqslant 0$, on a $\mathrm{A}_k \subset \mathrm{A}_{k+1}$ et $\mathrm{B}_k \supset \mathrm{B}_{k+1}$.
Ainsi, les familles d'événements $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante d'événements.
De plus :

$$\mathrm{A} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathrm{A}_k \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \bigcap_{k=0}^{+\infty} \mathrm{B}_k.$$

On a donc par le théorème (4) et le théorème (10) de la limite monotone :

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\mathrm{B}) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{B}_n).$$

Maintenant, calculons pour tout $n \geqslant 0$, les probabilités $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ et $\mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$:

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} \overline{\mathrm{F}_k}\right) \underset{\text{indépendance}}{=} \prod_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{F}_k}\right) = \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Et $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = 1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

On en déduit :

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 1.$$

Et, $\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^{n+1}} = 0.$

À retenir

On vient de rencontrer un événement qui n'est pas impossible mais dont la probabilité est égale à 0. Ainsi, sur un ensemble infini, $\emptyset$ (resp. Ω) n'est plus le seul événement de probabilité 0 (resp. 1). Pour un événement de probabilité 0, on dira qu'il ne se réalise presque sûrement *jamais, et inversement, pour un événement de probabilité 1, on dira qu'il se réalise* presque sûrement.

Théorème 12 – Formule des probabilités totales :

*Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ un système complet d'événements non négligeables (*I *est un ensemble fini ou dénombrable).*

Pour tout événement B,

$$\mathbf{P}(\mathrm{B}) = \sum_{i\in\mathrm{I}} \mathbf{P}(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}) = \sum_{i\in\mathrm{I}} \mathbf{P}(\mathrm{A}_i)\,\mathbf{P}_{\mathrm{A}_i}(\mathrm{B}).$$

Remarque

La formule des probabilités totales reste valables si $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est un système presque complet d'évènements.

Cette formule correspond simplement à la disjonction des cas.

Remarque : *Il y a donc deux formules des probabilités totales, l'une avec $\mathbf{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_i)$ et l'autre avec $\mathbf{P}_{\mathrm{A}_i}(\mathrm{B})$. Les deux sont à retenir, on choisira l'une ou l'autre suivant que l'on connaisse $\mathbf{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_i)$ ou $\mathbf{P}_{\mathrm{A}_i}(\mathrm{B})$.*

Cas particulier du système complet $(\mathrm{A}, \bar{\mathrm{A}})$ ***:***

$$\mathbf{P}(\mathrm{B}) = \mathbf{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})\mathbf{P}(\mathrm{A}) + \mathbf{P}_{\bar{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})\mathbf{P}(\bar{\mathrm{A}}),$$

valable pour tout évènement A *avec* $0 < \mathbf{P}(\mathrm{A}) < 1$.

Méthode 1 – Quand applique-t-on la formule des probabilités totales ?:

On l'applique lorsqu'une expérience aléatoire se déroule en deux étapes :

1. *à la première étape, un et un seul des* A_i *est réalisé ;*
2. *à la seconde étape,* B *est réalisé ou non.*

Cette formule permet alors de calculer la probabilité de B.

Exemple 7 :

X *et* Y *s'entraînent au tir à l'arc.*

X *atteint la cible* 9 *fois sur* 10, Y *atteint la cible* 6 *fois sur 10.* Y *joue deux fois sur trois.*

Quelle est la probabilité que la cible soit atteinte ?

Notons C *l'événement « la cible est atteinte »,* $\mathrm{J_X}$ *(resp.* $\mathrm{J_Y}$*) « le joueur est* X *(resp.* Y*) ».*
Par la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathbf{P}(\mathrm{C}) = \mathbf{P}_{\mathrm{J_X}}(\mathrm{C})\mathbf{P}(\mathrm{J_X}) + \mathbf{P}_{\mathrm{J_Y}}(\mathrm{C})\mathbf{P}(\mathrm{J_Y}) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{6}{10} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{10}.$$

Corollaire 13 – Formules de Bayes [1] :

— *Si* A *et* B *sont deux évènements de probabilités non nulles, alors :*

$$\mathbf{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{\mathbf{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})\mathbf{P}(\mathrm{A})}{\mathbf{P}(\mathrm{B})}.$$

— *Si* $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est un système complet d'évènements fini ou dénombrable, alors pour tout évènement* B *de probabilité non nulle et pour tout* $j \in \mathrm{I}$ *:*

$$\mathbf{P}_{\mathrm{B}}\left(\mathrm{A}_j\right) = \frac{\mathbf{P}\left(\mathrm{A}_j\right) \times \mathbf{P}_{\mathrm{A}_j}(\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} \underset{\forall\, i\in\mathrm{I},\mathbf{P}(\mathrm{A}_i)\neq 0}{=} \frac{\mathbf{P}\left(\mathrm{A}_j\right) \times \mathbf{P}_{\mathrm{A}_j}(\mathrm{B})}{\sum_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_i\right) \times \mathbf{P}_{\mathrm{A}_i}(\mathrm{B})}.$$

Remarque : *Si on considère l'événement* A *antérieur à l'événement* B*, on peut voir* A *comme la cause et* B *comme la conséquence. La formule de Bayes permet de renverser ces notions : connaissant la conséquence, quelle est la probabilité que telle cause ait eu lieu ?*

Cas particulier du système complet $(\mathrm{A}, \bar{\mathrm{A}})$ **:**

Soit A *un événement tel que* $\mathbb{P}(\mathrm{A}) \neq 0$ *et* $\mathbb{P}(\bar{\mathrm{A}}) \neq 0$*, alors, pour tout événement* B *tel que* $\mathbb{P}(\mathrm{B}) \neq 0$*, on peut écrire :*

$$\mathbb{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{B})} = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) + \mathbb{P}(\bar{\mathrm{A}})\mathbb{P}_{\bar{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})}.$$

Remarque
La formule de Bayes reste valables si $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est un système presque complet d'évènements.*

[1]. **Thomas Bayes**, né env. en 1702 à Londres - mort le 7 avril 1761 à Tunbridge Wells, dans le Kent, est un mathématicien britannique et pasteur de l'Église presbytérienne, connu pour avoir formulé le théorème de Bayes.

Méthode 2 – Quand applique-t-on la formule de Bayes ?:

Elle s'utilise pour des expériences aléatoires se déroulant en deux étapes. Elle permet de calculer $\mathbf{P}_{\mathrm{B}}\left(\mathrm{A}_j\right)$*, c'est-à-dire la probabilité de* A_j *(étape 1) sachant* B *(étape 2).*

On l'appelle parfois la formule de probabilité des causes puisqu'elle donne la probabilité d'une cause (étape 1) sachant la conséquence (étape 2).

Exemple 8 :

Reprenons l' exemple (7) *. L'un des joueurs a atteint la cible.*

Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de Y *?*

On cherche donc à calculer $\mathbf{P}_{\mathrm{C}}(\mathrm{J}_{\mathrm{Y}})$.
Par la formule de Bayes, on a :

$$\mathbf{P}_{\mathrm{C}}(\mathrm{J}_{\mathrm{Y}}) = \frac{\mathbf{P}(\mathrm{J}_{\mathrm{Y}})}{\mathbf{P}(\mathrm{C})}\mathbf{P}_{\mathrm{J}_{\mathrm{Y}}}(\mathrm{C}) = \frac{\frac{6}{10}}{\frac{7}{10}} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{7}.$$

IV

Rappels d'ECG-1
Variables aléatoires

Plan du chapitre

I Variables aléatoires réelles *389*
I.1 Définitions 389
I.2 Fonction de répartition 391
I.3 Loi d'une variable aléatoire 394
II Variables aléatoires discrète et finies *395*
II.1 Rappels 395
II.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète 396
II.3 Loi d'une variable aléatoire discrète 397
II.4 Système complet d'événements associé à une variable aléatoire discrète 399

I. Variables aléatoires réelles

I.1 – Définitions

Définition 5 – Variable aléatoire réelle :

Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$*, on appelle* variable aléatoire réelle *toute application :*

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{X} : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \longmapsto & \mathbb{X}(\Omega). \end{array}$$

telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega \mid \mathbb{X}(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{A}$.

Idée

Ce qu'il faut retenir c'est qu'une variable aléatoire est une application $\mathbb{X}$ *de* Ω *dans* $\mathbb{R}$ *telle que l'ensemble des événements qui impliquent* $\mathbb{X}$ *doivent être observables* i.e. *être dans la tribu* $\mathcal{A}$.
En pratique, on ne vérifiera jamais qu'une application est bien une variable aléatoire, cela sera toujours sous entendu.

Notation : *Dans la suite, pour* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $t \in \mathbb{R}$*, on note :*

— $[\mathbb{X} \in \mathrm{I}] = \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{X}(\omega) \in \mathrm{I}\}$.
— $[\mathbb{X} = x] = \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{X}(\omega) = x\}$.
— $[\mathbb{X} \leqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{X}(\omega) \leqslant x\}$.

Ainsi, $\mathbb{X}$ est une variable aléatoire si pour tout réel x, l'ensemble $[\mathbb{X} \leqslant x] \in \mathcal{A}$ est un événement.

Exemple 9 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$.

La fonction indicatrice

$$\mathbb{1}_{\mathrm{A}} : \omega \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in \mathrm{A} \\ 0 \text{ si } \omega \notin \mathrm{A} \end{cases}$$

est une variable aléatoire réelle.

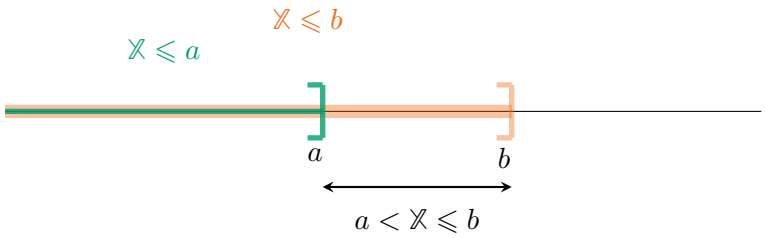
Remarque : *Elle suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbf{P}(\mathrm{A})$.*

Remarques :

— *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Si $\mathbb{X}$ est une variable aléatoire réelle, alors $[\mathbb{X} \in]a\,;b]$ est un événement. En effet,*

$$[\mathbb{X} \in]a\,;b]] = [\mathbb{X} \leqslant b] \setminus [\mathbb{X} \leqslant a] = [\mathbb{X} \leqslant b] \cap \overline{[\mathbb{X} \leqslant a]} \in \mathcal{A} \quad \text{car} \quad [\mathbb{X} \leqslant a], [\mathbb{X} \leqslant b] \in \mathcal{A}.$$

Par conséquent, le réel $\mathbf{P}([\mathbb{X} \in]a\,;b]])$ est bien défini.



— *La donnée des probabilités $\mathbf{P}([\mathbb{X} \in]a\,;b]])$ pour tous réels $a < b$ définit* la loi de probabilité *de la variable aléatoire réelle $\mathbb{X}$.*

Proposition 14 :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

P1 • *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\overline{[\mathbb{X} \leqslant x]} = [\mathbb{X} > x]$.*

P2 • *Pour tous $x < y < z$,* *(Relation de Chasles)*

$$[x \leqslant \mathbb{X} \leqslant y] \cup [y \leqslant \mathbb{X} \leqslant z] = [x \leqslant \mathbb{X} \leqslant z].$$

P3 • *Pour tous $x < y$, $[\mathbb{X} \leqslant x] \subset [\mathbb{X} \leqslant y]$.*

P4 • *Soient I et J deux intervalles disjoints, alors $[\mathbb{X} \in \mathrm{I}] \cap [\mathbb{X} \in \mathrm{J}] = \varnothing$.*

P5 • *Soit $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'intervalles de $\mathbb{R}$ formant une partition de $\mathbb{R}$, alors la famille d'événements $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\forall\, n \geqslant 0, \mathrm{A}_n = [\mathbb{X} \in \mathrm{I}_n]\,,$$

forme un système complet d'événements.

Proposition 15 – Opérations sur les variables aléatoires :

Soient $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Alors,

- *la combinaison linéaire $\lambda\mathbb{X} + \mu\mathbb{Y}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,*
- *le produit $\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}$,*
- *le maximum $\max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et le minimum $\min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$*

sont encore des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Remarque : *Cela s'étend à un nombre fini de variables aléatoires.*

I.2 – Fonction de répartition

Définition 6 – Fonction de répartition :

Soit $\mathbb{X}$, une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On définit la fonction $\mathrm{F}_{\mathbb{X}}$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}_{\mathbb{X}}(x) = \mathbf{P}([\mathbb{X} \leqslant x]).$$

La fonction $\mathrm{F}_{\mathbb{X}}$ est la fonction de répartition *de la variable aléatoire $\mathbb{X}$.*

Exemple 10 :

En généralisant l'exercice précédent, la fonction de répartition d'une loi uniforme discrète sur $[\![1\,;n]\!]$ est donnée par l'expression

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lfloor x \rfloor}{n} & \text{si } x \in [1\,;n] \\ 1 & \text{si } x \geqslant n. \end{cases}$$

Proposition 16 – Propriétés de la fonction de répartition :

Soient $\mathbb{X}$ une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et $\mathrm{F}_{\mathbb{X}}$ sa fonction de répartition.

P1 • $\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(\mathbb{X} > a) = 1 - \mathrm{F}_{\mathbb{X}}(a)$.

P2 • *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}_{\mathbb{X}}(t) \in [0\,;1]$.*

P3 • $\mathrm{F}_{\mathbb{X}}$ *est croissante :* $\forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad t_1 \leqslant t_2 \implies \mathrm{F}_{\mathbb{X}}(t_1) \leqslant \mathrm{F}_{\mathbb{X}}(t_2)$.

Méthode

À la fin de chaque calcul d'une fonction de répartition, il est toujours utile de vérifier rapidement les trois premiers points.

P4 • $\lim\limits_{t\to-\infty} \mathrm{F}_X(t) = 0$ *et* $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{F}_X(t) = 1$.

P5 • F_X *est continue à droite :* $\forall\, a \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{\substack{t\to a\\ t>a}} \mathrm{F}_X(t) = \mathrm{F}_X(a)$.

P6 • $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $a < b,\quad \mathbf{P}(a < X \leqslant b) = \mathrm{F}_X(b) - \mathrm{F}_X(a)$.

Preuve :

P1 • Par définition de la fonction de répartition, $\mathrm{F}_X(a) = \mathbf{P}(X \leqslant a)$.
Or, les événements $\{X \leqslant a\}$ et $\{X > a\}$ sont complémentaires dans Ω, donc disjoints et leur réunion est Ω.
Ainsi, $\mathbf{P}(X \leqslant a) + \mathbf{P}(X > a) = 1$.
On en déduit immédiatement :

$$\mathbf{P}(X > a) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant a) = 1 - \mathrm{F}_X(a).$$

P2 • La probabilité d'un événement est toujours comprise entre 0 et 1.

P3 • Soient $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Par croissance de la probabilité, on a :

$$\begin{aligned} t_1 \leqslant t_2 &\implies [X \leqslant t_1] \subset [X \leqslant t_2] \\ &\implies \mathbf{P}([X \leqslant t_1]) \leqslant \mathbf{P}([X \leqslant t_2]) \\ &\implies \mathrm{F}_X(t_1) \leqslant \mathrm{F}_X(t_2). \end{aligned}$$

P4 • La fonction F_X est croissante et majorée par 1.
D'après le théorème de la limite monotone pour les fonctions, la limite de F_X en $+\infty$ existe.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = [X \leqslant n]$. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, donc d'après le théorème (4) de la limite monotone pour les probabilités :

$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{F}_X(n).$$

Par croissance de F_X,

$$\lim_{\substack{t\to+\infty\\ t\in\mathbb{R}}} \mathrm{F}_X(t) = \lim_{\substack{n\to+\infty\\ n\in\mathbb{N}}} \mathrm{F}_X(n) = 1.$$

Procédons de même pour la limite de F_X en $-\infty$:
F_X est croissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone pour les fonctions, la limite de F_X en $-\infty$ existe.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $B_n = [X \leqslant -n]$. La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, donc d'après le théorème (10) de la limite monotone pour les probabilités :

$$0 = \mathbf{P}(\varnothing) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{F}_X(-n).$$

Par croissance de F_X,

$$\lim_{t\to-\infty} \mathrm{F}_X(t) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{F}_X(-n) = 0.$$

P5 • Soit $a \in \mathbb{R}$. De nouveau, le théorème de la limite monotone pour les fonctions justifie l'existence de la limite à droite en a de la fonction de répartition.
Étudions la limite de $\mathrm{F}_X\left(a + \dfrac{1}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $C_n = \left[X \leqslant a + \frac{1}{n}\right]$. La suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements, donc d'après le théorème de la limite monotone pour les probabilités :

$$F_X(a) = \mathbf{P}([X \leqslant a]) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(C_n) = \lim_{n\to+\infty} F_X\left(a + \frac{1}{n}\right).$$

Donc, $F_X(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_X\left(a + \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{\substack{t\to a\\ t>a}} F_X(t)$.

P6 • Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, sachant que $[X \leqslant a] \subset [X \leqslant b]$ on a

$$F_X(b) - F_X(a) = \mathbf{P}(X \leqslant b) - \mathbf{P}(X \leqslant a) = \mathbf{P}([X \leqslant b] \setminus [X \leqslant a]) = \mathbf{P}(a < X \leqslant b).$$

Attention

Il existe cependant des variables aléatoires dont la fonction de répartition n'est pas continue par morceaux mais on n'en parlera pas.

Grâce au théorème de la limite monotone, on sait qu'une fonction de répartition admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

En fait, toutes les fonctions de répartitions que l'on considérera seront continues par morceaux.

Théorème 17 – Caractérisation d'une fonction de répartition :

Une application $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X si, et seulement si elle satisfait les trois points suivants :

(i) *F est croissante sur $\mathbb{R}$.*

(ii) *F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.*

(iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

(i) De plus, on dispose de l'égalité :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(X = x) = P(X \leqslant x) - P(X < x) = F(x) - \lim_{t\to x^-} F(t).$$

Corollaire 18 :

Une fonction de répartition F est croissante et continue à droite sur $\mathbb{R}$. Elle est continue en tout point sauf en un ensemble au plus dénombrable de points (x_i).

En chacun de ces points,

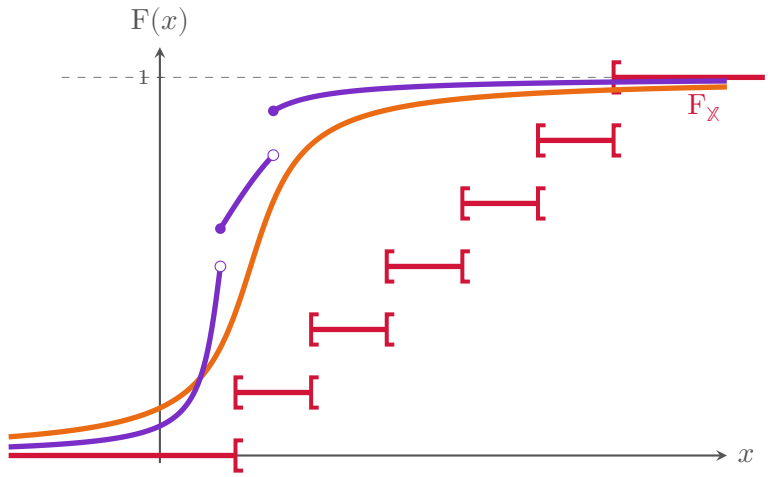
$$\lim_{x\to x_i^-} F(x) < F(x_i) = \lim_{x\to x_i^+} F(x),$$

et le saut est égal à

$$F(x_i) - F(x_i^-) = \mathbf{P}(X = x_i).$$

Exemple 11 :

Les trois courbes suivantes sont celles de fonctions de répartitions de variables aléatoires réelles.



En effet, elles sont toutes les trois croissantes, continues sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre dénombrable de points où elles sont seulement continues à droite, et elles sont bien de limite 0 et 1 respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.

À retenir
$F_{\mathbb{X}}$ *est constante par morceaux si, et seulement si* $\mathbb{X}$ *est discrète.*

I.3 – Loi d'une variable aléatoire

Définition 7 – Loi d'une variable aléatoire :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire.

On appelle ***loi de la variable*** $\mathbb{X}$ *l'application* $\mathbf{P}_{\mathbb{X}}$ *définie par :*

$$\mathbf{P}_{\mathbb{X}} : \mathrm{A} \longmapsto \mathbf{P}([\mathbb{X} \in \mathrm{A}]),$$

où A *est une réunion au plus dénombrable d'intervalles de* $\mathbb{R}$.

Attention
$\mathbb{Y}$ *suit la même loi que* $\mathbb{X}$ *n'implique pas que* $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$.

Contre-exemple 12 – Avoir la même loi ne signifie pas être égales :

On lance deux pièces équilibrées indépendantes et on définit

$$\mathbb{X} = \begin{cases} 1 & \text{si la première pièce donne Pile,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbb{Y} = \begin{cases} 1 & \text{si la deuxième pièce donne Pile,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = 1]) = \mathbf{P}([\mathbb{Y} = 1]) = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0]) = \mathbf{P}([\mathbb{Y} = 0]) = \frac{1}{2},$$

Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ont donc la même loi ce qui s'écrit $\mathbb{X} \overset{\mathcal{L}}{=} \mathbb{Y}$.

Cependant, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = \mathbb{Y}]) = \mathbf{P}(\{\mathrm{PP}, \mathrm{FF}\}) = \frac{1}{2} \neq 1$ et par conséquent $\mathbb{X} \neq \mathbb{Y}$.

Théorème 19 – Caractérisation de la fonction de répartition :

Une application $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X si, et seulement si elle satisfait les trois points suivants :

(i) *F est croissante sur $\mathbb{R}$.*

(ii) *F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.*

(iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

De plus, on dispose de l'égalité :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(X = x) = P(X \leqslant x) - P(X < x) = F(x) - \lim_{t\to x^-} F(t).$$

Proposition 20 – Caractérisation de la loi :

Soit X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

La fonction de répartition de X caractérise la loi de X.

De plus :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \mathbf{P}_X(\,]-\infty\,;x]\,).$$

Deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition si, et seulement si elles ont la même loi.

Dans la pratique, on utilisera la fonction de répartition pour déterminer la loi d'une variable aléatoire :

À retenir

Deux variables aléatoires ont même loi si, et seulement si elles ont même fonction de répartition.

X et Y ont même fonction de répartition	$\iff$	*X et Y ont même loi de probabilité*

II. Variables aléatoires discrète et finies

II.1 – Rappels

Dans le cas où $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, la définition de la variable aléatoire se simplifie.

Définition 8 – Variable aléatoire discrète :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.

Une variable aléatoire réelle X est dite discrète *lorsque son ensemble image $X(\Omega)$,* i.e. *l'ensemble des valeurs prises par X, est dénombrable.*

On dit plus précisément que X est une variable discrète finie *lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini et* discrète infinie *lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable.*

Attention

Il existe des variables aléatoires infinies qui ne sont pas discrètes.

Exemples 13 :

— *Si* $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, *alors* $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}$ *est discrète finie car* $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(\Omega) = \{0, 1\}$.

— *Si* $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$, *alors* $\mathbb{X}$ *est discrète infinie car* $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}$.

II.2 – Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

Dans la pratique, les x_i *forment (presque) toujours une suite strictement croissante* $x_1 < x_2 < \cdots$. *Dans ce cas, la fonction de répartition est une fonction continue par morceaux sur* $\mathbb{R}$.

Attention
Il existe des variables aléatoires discrètes pour lesquelles on ne peut pas ordonner l'ensemble $\mathbb{X}(\Omega)$.

Théorème 21 – Caractérisation de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète :

Une application $\mathrm{F} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète* $\mathbb{X}$ *si, et seulement si elle satisfait les trois points suivants :*

(i) F *est croissante sur* $\mathbb{R}$.

(ii) F *est en escalier et continue à droite en tout point de* $\mathbb{R}$.

(iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{F}(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = 1$.

De plus,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = \sum_{\substack{x_i \in \mathbb{X}(\Omega) \\ x_i \leqslant x}} \mathrm{P}(\mathbb{X} = x_i).$$

Preuve : Il suffit de montrer que :

$$[\mathbb{X} \leqslant x] = \bigcup_{\substack{x_i \leqslant x \\ i \in \mathrm{I}}} [\mathbb{X} = x_i]\,.$$

On raisonne par double inclusions.

$\subset$ **:** Soit $\omega \in [\mathbb{X} \leqslant x]$. Alors $\mathbb{X}(\omega) \leqslant x$.
Or $\mathbb{X}(\omega)$ est un élément du support de $\mathbb{X}$ donc s'écrit sous la forme x_i pour un certain $i \in \mathrm{I}$ et $\omega \in [\mathbb{X} = x_i] \subset \bigcup\limits_{\substack{x_i \leqslant x \\ i \in \mathrm{I}}} [\mathbb{X} = x_i]$.

$\supset$ **:** Soit $\omega \in \bigcup\limits_{\substack{x_i \leqslant x \\ i \in \mathrm{I}}} [\mathbb{X} = x_i]$.
Alors ω est un élément de l'un des événements $[\mathbb{X} = x_i]$ avec $i \in \mathrm{I}$ et $x_i \leqslant x$.
Ainsi, $\mathbb{X}(\omega) = \{x_i \leqslant x\}$ donc $\omega \in [\mathbb{X} \leqslant x]$.

Les événements $[\mathbb{X} = x_i]$ sont deux à deux incompatibles. La $\boldsymbol{\sigma}$-additivité de $\mathbf{P}$ fait le reste. ☑

II.3 – Loi d'une variable aléatoire discrète

Proposition 22 – Loi d'une variable discrète infinie :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Alors :

— *On appelle* loi de probabilité *de $\mathbb{X}$ et on note $\mathbf{P}_{\mathbb{X}}$ l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{P}_{\mathbb{X}} : & \mathbb{X}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathbf{P}_{\mathbb{X}}(x) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]). \end{array}$$

— *De plus, si les x_i forment une suite strictement croissante $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$, alors*

$$\mathbf{P}\left([\mathbb{X} = x_1]\right) = \mathrm{F}_{\mathbb{X}}\left(x_1\right) \quad \text{et} \quad \forall\, k \geqslant 2, \mathbf{P}\left([\mathbb{X} = x_k]\right) = \mathrm{F}_{\mathbb{X}}\left(x_k\right) - \mathrm{F}_{\mathbb{X}}\left(x_{k-1}\right).$$

Vocabulaire : *Donner la loi d'une variable aléatoire discrète $\mathbb{X}$ signifie donner l'ensemble $\mathbb{X}(\Omega)$ des valeurs prises par $\mathbb{X}$ et pour chaque $x \in \mathbb{X}(\Omega)$, la probabilité $\mathbf{P}([\mathbb{X} = x])$.*

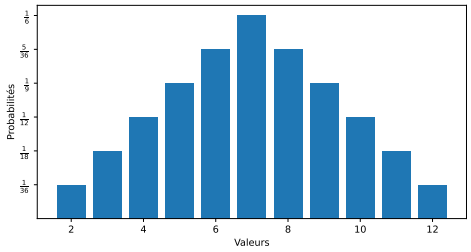
On donne parfois la loi sous forme d'un tableau.

Par exemple, la variable aléatoire $\mathbb{X}$, somme des valeurs de deux dés équilibrés a pour loi :

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}([\mathbb{X} = i])$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

On peut aussi représenter la loi à l'aide d'un diagramme en bâtons.

En abscisse, on place les valeurs possibles de la variable (ici, $2, 3, \ldots, 12$) et en ordonnée les probabilités correspondantes (ici, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 2])), \mathbf{P}([\mathbb{X} = 3]), \ldots, \mathbf{P}([\mathbb{X} = 12])$).



Et le code en Python :

Éditeur

```python
import matplotlib.pyplot as plt

# Données
val = [2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12]
loi = [1/36,1/18,1/12,1/9,5/36,1/6,
       5/36,1/9,1/12,1/18,1/36]

# Création de la figure
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,4))

# Diagramme en bâtons
```

Éditeur

```
ax.bar(val, loi)

# Graduations personnalisées
ticks = [1/36,1/18,1/12,1/9,5/36,1/6]

ax.set_yticks(ticks)

ax.set_yticklabels([
    r"$\frac{1}{36}$",
    r"$\frac{1}{18}$",
    r"$\frac{1}{12}$",
    r"$\frac{1}{9}$",
    r"$\frac{5}{36}$",
    r"$\frac{1}{6}$"
])

# Titres
ax.set_xlabel("Valeurs")
ax.set_ylabel("Probabilités")

# Affichage
plt.show()
```

Remarque : *À partir de la fonction de répartition $\mathrm{F}_{\mathbb{X}}$, on peut retrouver :*

- *$\mathbb{X}(\Omega)$: c'est l'ensemble des points x_i de discontinuité de F_{X} ;*
- *$\mathbf{P}(\mathbb{X} = x_i)$ pour tout $x_i \in \mathbb{X}(\Omega)$: c'est la « hauteur du saut » à l'abscisse x_i.*

Et réciproquement, à partir de $\mathbb{X}(\Omega)$ et des probabilités $\mathbf{P}(\mathbb{X} = x)$ pour tout $x \in \mathbb{X}(\Omega)$, on peut reconstruire la loi $\mathrm{F}_{\mathbb{X}}$ de $\mathbb{X}$. Ainsi on a la

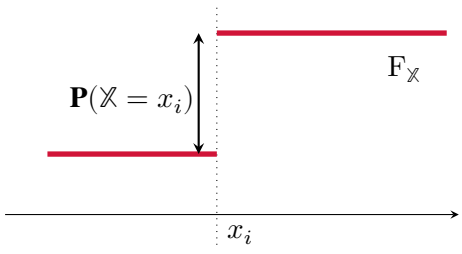
Proposition 23 – Caractérisation de la loi d'une variable discrète :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire discrète.

Alors la loi de $\mathbb{X}$ est entièrement caractérisée par la donnée :

1. *de l'ensemble image $\mathbb{X}(\Omega)$ de $\mathbb{X}$;*
2. *de tous les $\mathbf{P}(\mathbb{X} = x)$ pour $x \in \mathbb{X}(\Omega)$.*

Dès lors, si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variables aléatoires discrètes ayant la même fonction de répartition, on a



$$\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{Y}(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_m\}$$

et pour tout indice i,

$$\mathbf{P}\left([\mathbb{X} = x_i]\right) = \mathbf{P}\left([\mathbb{Y} = x_i]\right).$$

On retrouve l'égalité en loi.

Méthode 3 – Loi d'une variable aléatoire discrète :

Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète $\mathbb{X}$, on ne donne généralement pas la fonction de répartition, mais on explicitera plus simplement :

1. *l'ensemble image $\mathbb{X}(\Omega)$ de la variable $\mathbb{X}$;*
2. *la valeur de $\mathbf{P}(\mathrm{X} = x_i)$ pour tout $x_i \in \mathrm{X}(\Omega)$.*

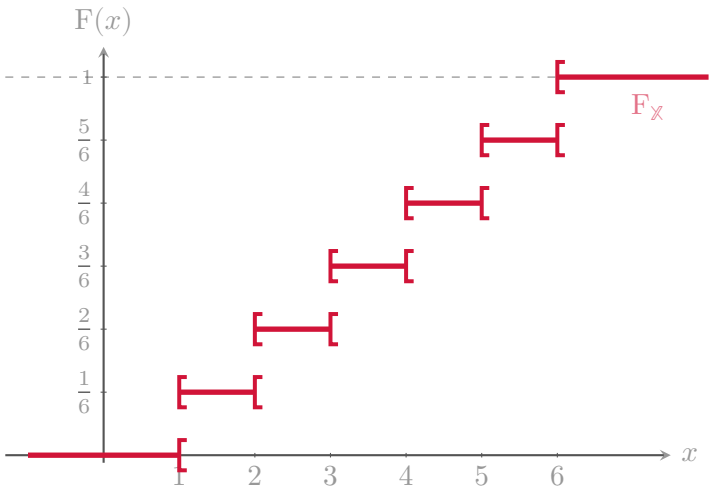
Exemple 14 :

Soit $\mathbb{X}$, la variable aléatoire donnant la valeur d'un dé équilibrée.

La loi de $\mathbb{X}$ est donnée par :

$$\mathbb{X}(\Omega) = [\![1\,;6]\!] \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(\mathbb{X} = i) = \frac{1}{6} \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant 6.$$

Quel est le graphe sur $[-1\,;7]$ de $\mathrm{F}_{\mathbb{X}}$.



II.4 – Système complet d'événements associé à une variable aléatoire discrète

À une v.a discrète $\mathbb{X}$ est associée le système complet d'événements $([\mathbb{X} = x])_{x \in \mathbb{X}(\Omega)}$.

Proposition 24 – SCE associé à une v.a.r. discrète :

*Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire **discrète** de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.*

On note $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ où $\mathrm{I} \subset \mathbb{N}$.

Alors la famille $([\mathbb{X} = x_i])_{i \in \mathrm{I}}$ est un système complet d'événements, appelé système complet d'événements associé à $\mathbb{X}$.

Preuve : Il y a deux propriétés à démontrer.

1. Montrons que $([\mathbb{X} = x_i])_{i \in \mathrm{I}}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles :
   Soit $(i, j) \in \mathrm{I}^2$ tel que $i \neq j$ et soit $\omega \in [\mathbb{X} = x_i] \cap [\mathbb{X} = x_j]$.
   Cela signifie que :

— $\omega \in [\mathbb{X} = x_i]$ donc $\mathbb{X}(\omega) = x_i$,

— $\omega \in [\mathbb{X} = x_i]$ donc $\mathbb{X}(\omega) = x_j$.

Par définition, $x_i \neq x_j$.
On en conclut qu'il n'existe pas d'élément $\omega \in [\mathbb{X} = x_i] \cap [\mathbb{X} = x_j]$.
Ainsi $[\mathbb{X} = x_i] \cap [\mathbb{X} = x_j] = \varnothing$.

2. Montrons que $\Omega = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} [\mathrm{X} = x_i]$ par double inclusion :

— $\bigcup_{i \in \mathrm{I}} [\mathbb{X} = x_i] \subset \Omega$ puisque $\bigcup_{i \in \mathrm{I}} [\mathbb{X} = x_i]$ est un événement (en tant qu'union dénombrable d'événements).

— Soit $\omega \in \Omega$.
Alors $\mathbb{X}(\omega) \in \mathbb{X}(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathrm{I}\}$.
Ainsi, il existe $i \in \mathrm{I}$ tel que $\mathbb{X}(\omega) = x_i$ *i.e.* $\omega \in [\mathbb{X} = x_i]$.

☑

En particulier, il vient

Corollaire 25 :

Si $\mathbb{X}$ est une variable aléatoire discrète, alors

1. $\forall\, x \in \mathbb{X}(\Omega)$, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \geqslant 0$;
2. *la famille* $(\mathbf{P}([\mathbb{X} = x]))_{x \in \mathbb{X}(\Omega)}$ *est sommable et sa somme vaut* 1.

Théorème 26 – Caractérisation d'une loi de probabilité :

Soient I *un ensemble fini ou dénombrable, et* $(p_k)_{k \in \mathrm{I}}$ *une famille de réels satisfaisant :*

(i) $\forall\, k \in \mathrm{I}$, $p_k \geqslant 0$;

(ii) *la famille* $(p_k)_{k \in \mathrm{I}}$ *est sommable et sa somme vaut* 1.

Alors la famille $(p_k)_{k \in \mathrm{I}}$ *définit une loi de probabilité, c'est-à-dire qu'il existe un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *et une variable aléatoire discrète* $\mathbb{X}$ *sur cet espace tels que :*

$$\mathbb{X}(\Omega) = \mathrm{I} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = p_k \text{ pour tout } k \in \mathrm{I}.$$

Méthode 4 – Loi de probabilité discrète :

Pour montrer que $(p_k)_{k \in \mathrm{I}}$ *définit une loi de probabilité, on vérifiera que :*

— *si* $\mathrm{I} = [\![0, n]\!]$,

(i) $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $p_k \geqslant 0$,

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$.

— *si* $\mathrm{I} = \mathbb{N}$,

(i) $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $p_k \geqslant 0$,

(ii) $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} p_k$ *converge et sa somme est égale à* 1.

Exemple 15 – I :

existe une variable aléatoire $\mathbb{Y}$ *satisfaisant* $\mathrm{Y}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ *et pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(\mathrm{Y} = k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

(i) *Il est assez clair que* $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $p_k = \dfrac{1}{k(k+1)} \geqslant 0$,

(ii) *En reconnaissant une somme télescopique,* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Donc la somme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)}$ *converge est sa somme vaut* 1.

On définit bien une variable aléatoire $\mathbb{Y}$ *sur* $\mathbb{N}^*$ *donnée par sa loi de probabilité* $\mathbf{P}([\mathbb{Y} = k]) = \dfrac{1}{k(k+1)}$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$.

IV

Rappels d'ECG-1
Lois usuelles

Plan du chapitre

I Lois finies usuelles 403
I.1 Loi certaine 403
I.2 Loi de Bernoulli 404
I.3 Loi binomiale 406
I.4 Loi uniforme 409
II Lois infinies usuelles 412
II.1 Loi géométrique 412
II.2 Loi de Poisson 416
Fiche 22 : Reconnaître une loi usuelle 420
Fiche 23 : Rappels (très succincts) sur les variables aléatoires réelles 423
TD 5 : Rappels d'ECG-1 – Variables aléatoires réelles 427
Programme : Couple de variables aléatoires 437

Rappelons que donner la loi d'une variable aléatoire $\mathbb{X}$ discrète revient à la donnée de :

- *$\mathbb{X}(\Omega)$: l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.*
- *Pour chaque $k \in \mathbb{X}(\Omega)$, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = k])$.*

Dans chacun des cas, on précisera la loi, une représentation à l'aide d'un diagramme en bâtons, des exemples concrets d'application.

De plus, on distinguera bien

- *les cas finis : loi certaine, loi uniforme discrète, loi de Bernoulli, loi binomiale.*
- *les cas infinis dénombrables : loi géométrique, loi de Poisson.*

I. Lois finies usuelles

I.1 – Loi certaine

Définition 9 – Loi certaine :

On dit qu'une variable aléatoire X *suit une* loi certaine *s'il existe* $m \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$X(\Omega) = \{m\} \qquad \textit{et} \qquad \mathbf{P}([X = m]) = 1.$$

Rappel
Une variable aléatoire X est certaine si, et seulement si $\mathbf{V}(X) = 0$.

On dira aussi que la variable aléatoire X *est certaine, égale à* m*. On parle aussi de variable aléatoire constante, ou de variable déterministe.*

Exemple de modélisation : *On considère une expérience qui possède une ou plusieurs issues différentes dont une issue se produit avec probabilité* 1*.*

Alors la variable X *égale à* m *si l'issue particulière se produit suit une loi quasi-certaine.*

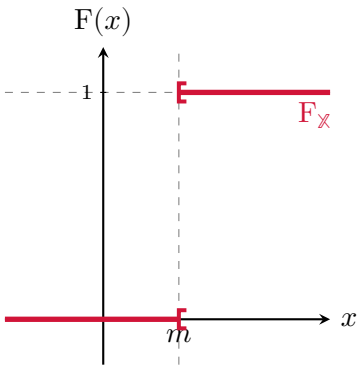
Exemple 16 – Exemple de modélisation :

On considère des lancers successifs d'un dé à 6 faces non pipé.

On note X *la variable aléatoire correspondant à la somme des numéros obtenus sur la face visible du dé et sur sa face opposée.*

Alors X *est une variable aléatoire certaine égale à* 7*.*

Fonction de répartition : X *suit la loi certaine telle que* $\mathbf{P}([X = m]) = 1$ *pour* $m \in \mathbb{R}$*.*



Proposition 27 :

Soit X *unevariable aléatoire réelle discrète finie suivant une loi certaine (ou quasi-certaine). Il existe donc* $m \in \mathbb{R}$ *tel que* $\mathbf{P}([X = m]) = 1$*.*

Alors :

1. *Alors* X *admet une espérance et une variance.*
2. *De plus,*

$$\mathbf{E}(X) = m \qquad \textit{et} \qquad \mathbf{V}(X) = 0.$$

Preuve :

1. $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance car c'est une variable aléatoire finie.
2. De plus, on a $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)} x\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]) = m\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=m]) = m\times 1 = m$.

   Et, pour le moment d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}\left((\mathbb{X}-\mathbf{E}(\mathbb{X}))^2\right) &= \sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)} (x-m)^2\mathbf{P}([\mathbb{X}=x])\\ &= (m-m)^2\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=m]) = 0.\end{aligned}$$

I.2 – Loi de Bernoulli

Définition 10 – Loi de Bernoulli :

Soit $p\in[0\,;1]$.

On dit que la variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit une loi de Bernoulli, *noté $\mathbb{X}\rightsquigarrow\mathcal{B}(p)$, si*

$$\mathbb{X}(\Omega)=\{0;1\} \quad \textit{et} \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=1])=p, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=0])=1-p.$$

Remarque

Une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p=1$ ou $p=0$ est une variable quasi-certaine.

Exemple de modélisation : *Toute expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles peut être appelée expérience de Bernoulli.*

L'une des issues est appelée « succès », l'autre « échec ». Le paramètre p correspond à la probabilité de succès, $1-p$ celle de l'échec.

À retenir

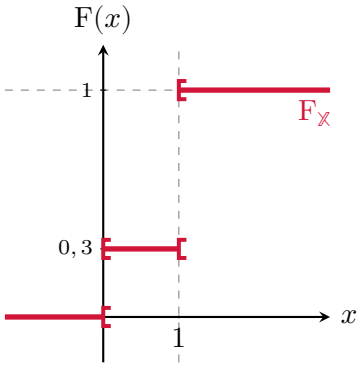
Pour $\mathrm{A}\in\mathcal{A}$ alors la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(\mathrm{A})$.

Exemples 17 – Exemples de modélisation :

— *Le résultat d'un lancer d'une pièce de monnaie équilibrée (1 pour pile, 0 face) suit une loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.*

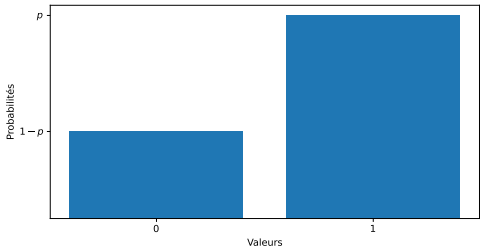
— *Plus généralement, la variable aléatoire associée à une expérience aléatoire ayant seulement deux issues (0 pour échec, 1 pour succès) suit une loi $\mathcal{B}(p)$ où p est la probabilité de succès.*

Fonction de répartition : $\mathbb{X}\rightsquigarrow\mathcal{B}(0.7)$.



Représentation de $\mathcal{B}(p)$:

Ci-contre, le diagramme en bâtons associé à une loi de Bernoulli de paramètre p.



Et le code en Python :

Éditeur

```python
import matplotlib.pyplot as plt

# Données
val = [0,1]
loi = [.3,.7]

# Création de la figure
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,4))

# Diagramme en bâtons
ax.bar(val, loi)

# Graduations personnalisées
ticks = [.3,.7]

ax.set_xticks(val)
ax.set_xticklabels([r"$0$", r"$1$"])

ax.set_yticks(ticks)

ax.set_yticklabels([
    r"$1-p$",
    r"$p$",
])

# Titres
ax.set_xlabel("Valeurs")
ax.set_ylabel("Probabilités")

# Affichage
plt.show()
```

Proposition 28 :

Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$.

Alors :

1. *X admet une espérance et une variance.*

2. De plus,

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = p(1-p).$$

Preuve :

1. $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance car c'est une variable aléatoire finie.
2. De plus, on a
$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 1 \times \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1]) + 0 \times \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0]) = p.$$
Pour le moment d'ordre 2 :
$$\mathbf{E}\left(\mathbb{X}^2\right) = 1^2 \times \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1]) + 0^2 \times \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0]) = p.$$
D'après la formule de Koenig-Huyghens,
$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}\left(\mathbb{X}^2\right) - \mathbf{E}(\mathbb{X})^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

I.3 – Loi binomiale

Définition 11 – Loi binomiale :

Soient $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0\,;1]$.

On dit que $\mathbb{X}$ suit la loi binomiale *de paramètres n et p, noté $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$, si*

$$\mathbb{X}(\Omega) = [\![0\,;n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in [\![0\,;n]\!]\,, \quad \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Remarque

$\mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(1,p)$.

Exemple de modélisation : *Toute expérience consistant à effectuer n épreuves de Bernoulli identiques* i.e. *de même paramètre p et indépendantes (le résultat de l'une ne dépend pas du résultat des autres).*

Alors la variable aléatoire donnant le nombre de succès obtenus au cours de cette expérience suit la loi binomiale de paramètre (n,p).

Exemple 18 – Exemple de modélisation :

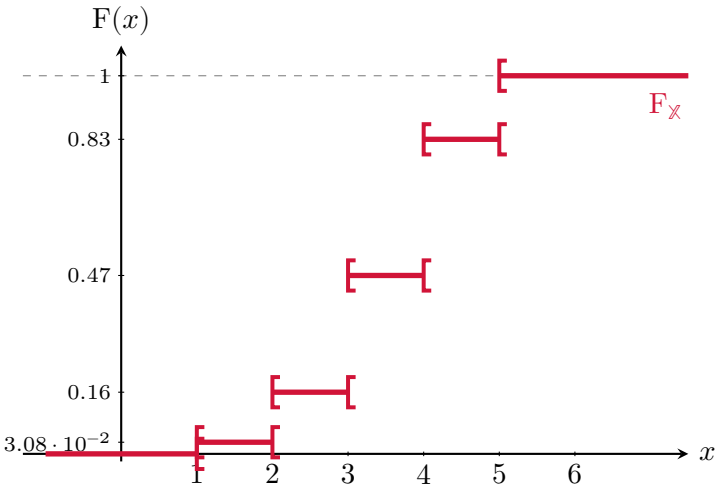
On lance successivement 10 fois un dé équilibré et on note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire correspondant au nombre de six obtenus.

Alors $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{6}\right)$.

Attention

Ne pas oublier la condition de mutuelle indépendance.

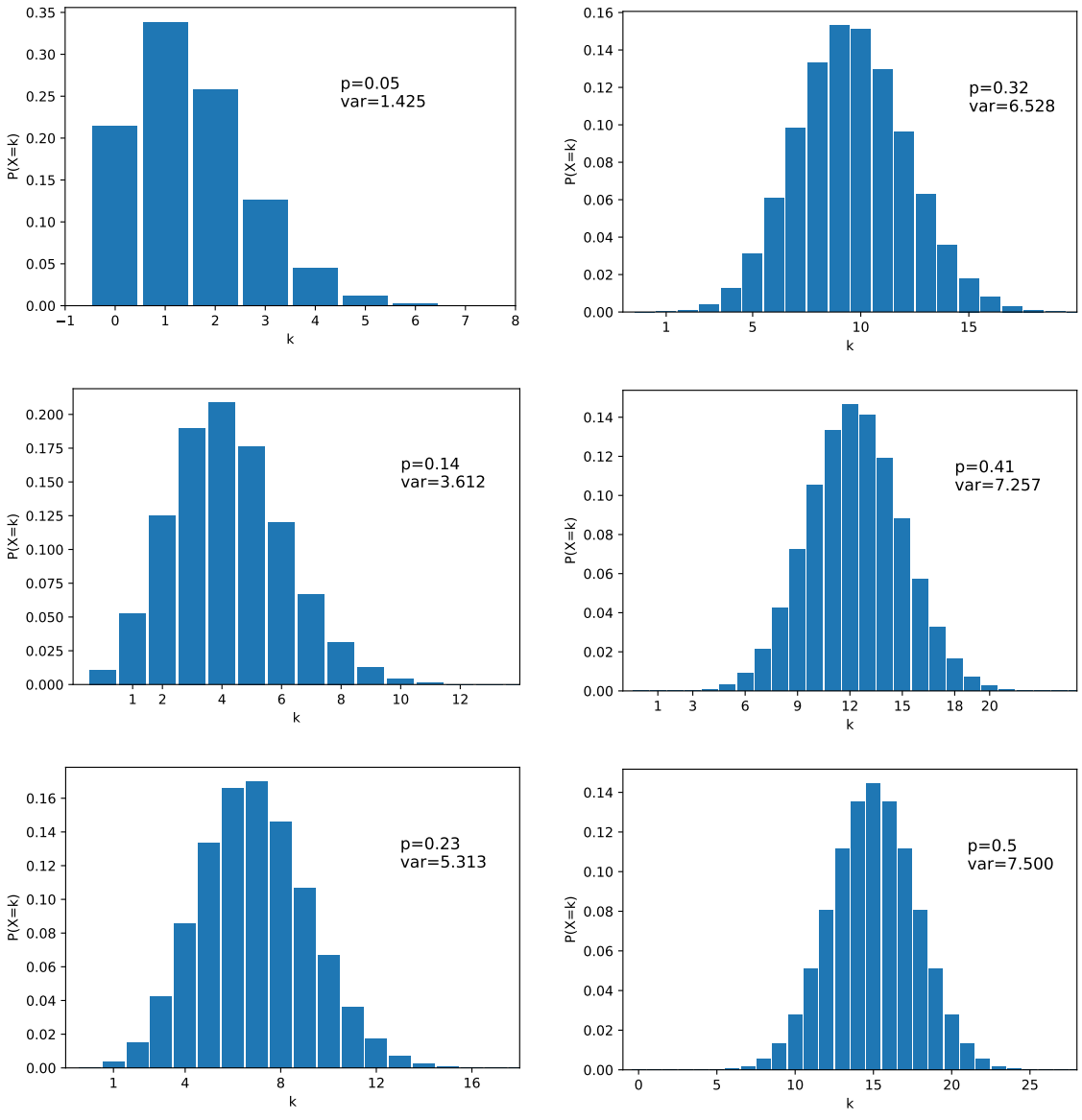
Fonction de répartition : $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(5;0,7)$.



Représentation de $\mathcal{B}(n;p)$ ***:***

Donnons quelques diagrammes en bâtons associés aux lois $\mathcal{B}(n;p)$ *avec* $n = 30$ *et*

$$p \in \{0,05; 0,14; 0,23; 0,32; 0,41; 0,5\}.$$



Avec le code en Python :

Éditeur

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import math

# Paramètres
n = ...
p = ...

# Loi binomiale
val = list(range(n+1))
loi = [math.comb(n,k)*(p**k)*((1-p)**(n-k)) for k in val]

# Création figure
fig, ax = plt.subplots(figsize=(6,4))

# Histogramme discret
ax.bar(val, loi, width=0.9)

# Axes
ax.set_xlabel("k")
ax.set_ylabel("P(X=k)")

# Annotation
var = n*p*(1-p)
ax.text(0.15*n, max(loi)*0.7,
    f"p={p}\nvar={var:.3f}",
    fontsize=12)

# Limites pour un rendu propre
ax.set_xlim(-1, n-22)

# Affichage
plt.show()
```

Proposition 29 :

Soient $n \geqslant 1$, $p \in [0\,;1]$ et $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Alors :

1. *$\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance.*
2. *De plus,*
$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = np \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = np(1-p).$$

Preuve :

1. $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance car c'est une variable aléatoire finie.

Rappel

$\forall\, n \geqslant k \geqslant 1,$

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

2. — Calculons $\mathbf{E}(\mathbb{X})$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbb{X}) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}p^{j+1}(1-p)^{n-(j+1)}\\ &= np\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}p^j(1-p)^{(n-1)-j}\\ &= np\end{aligned}$$

— Calculons $\mathbf{E}\left(\mathbb{X}^2\right)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\mathbb{X}^2\right) &= \sum_{k=1}^{n} k^2\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) = \sum_{k=1}^{n} k\times k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n} nk\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} = n\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\binom{n-1}{j}p^{j+1}(1-p)^{n-(j+1)}\\ &= np\left(\sum_{j=0}^{n-1} j\binom{n-1}{j}p^j(1-p)^{(n-1)-j} + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}p^j(1-p)^{(n-1)-j}\right)\\ &= np((n-1)p+1) = np(np+1-p)\\ &= n^2p^2 + np(1-p)\end{aligned}$$

D'après la formule de Koenig-Huyghens, on en déduit que

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}\left(\mathbb{X}^2\right) - \mathbf{E}(\mathbb{X})^2 = n^2p^2 + np(1-p) - (np)^2 = np(1-p).$$

I.4 – Loi uniforme

Définition 12 – Loi discrète uniforme :

D1 • *Soit $n \geqslant 1$.*

On dit que la variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit une loi discrète uniforme *sur $[\![1\,;n]\!]$, noté $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1\,;n]\!])$, si*

$$\mathbb{X}(\Omega) = [\![1\,;n]\!] \quad \textit{et} \quad \forall\, k \in [\![1\,;n]\!]\,, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) = \frac{1}{n}.$$

D2 • *Plus généralement, pour tous entiers $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$.*

On dit que la variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit une loi discrète uniforme *sur $[\![a\,;b]\!]$, noté $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![a\,;b]\!])$, si*

$$\mathbb{X}(\Omega) = [\![a\,;b]\!] \quad \textit{et} \quad \forall\, k \in [\![a\,;b]\!]\,, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) = \frac{1}{b-a+1}.$$

Attention

$\text{card}\,([\![a\,;b]\!]) = b-a+1.$

Remarque : *Si $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1\,;n]\!])$ avec $n = b-a+1$, alors*

$$\mathbb{Y} = \mathbb{X} + a - 1 \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![a\,;b]\!]).$$

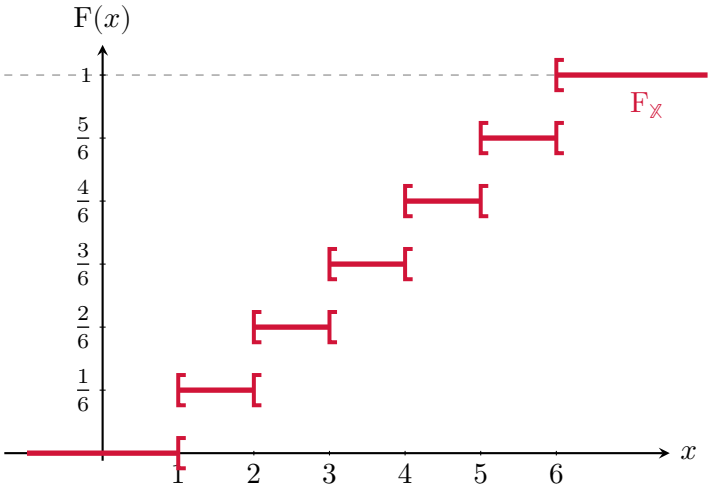
Exemple de modélisation : *Toute expérience possédant n issues différentes (qu'on numérote de 1 à n) qui sont équiprobables.*

Alors la variable aléatoire $\mathbb{X}$ égale à i si l'issue i est obtenue lors de l'expérience suit une loi uniforme sur $[\![1\,;n]\!]$.

Exemples 19 – Exemples de modélisation :

- *La variable aléatoire $\mathbb{X}$ correspondant au résultat d'un lancer de dé équilibré suit la loi uniforme sur $[\![1\,;6]\!]$.*
- *La loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ correspond à la loi uniforme sur $[\![0\,;1]\!]$.*
- *Une urne contenant n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule. Le numéro obtenu suit une loi uniforme sur $[\![1\,;n]\!]$.*

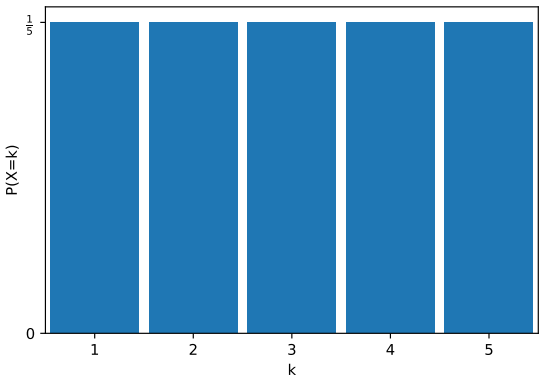
Fonction de répartition : $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1\,;6]\!])$.



Représentation de $\mathcal{U}([\![a\,;b]\!])$:

Ci-contre le diagramme en bâtons de la loi :

$$\mathcal{U}([\![1\,;5]\!]).$$



Avec le code en Python :

Éditeur

```
1  import matplotlib.pyplot as plt
2
3  # Support de la loi uniforme
```

Éditeur

```python
val = [1, 2, 3, 4, 5]

# Loi uniforme discrète sur {1,...,5}
loi = [1/5 for _ in val]

# Création figure
fig, ax = plt.subplots(figsize=(6,4))

# Histogramme discret
ax.bar(val, loi, width=0.9)

# Axes
ax.set_xlabel("k")
ax.set_ylabel("P(X=k)")

# Limites pour un rendu propre
ax.set_xlim(0.5, 5.5)

ax.set_yticks([0, 1/5])
ax.set_yticklabels(["0", r"$\frac{1}{5}$"])

# Affichage
plt.show()
```

Proposition 30 :

Soient $n \geqslant 1$ et $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 1\,;n \rrbracket)$.

Alors :

1. *$\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance.*
2. *De plus,*

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Preuve :

1. $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance car c'est une variable aléatoire finie.
2. — Calculons $\mathbf{E}(\mathbb{X})$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbb{X}) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n+1}{2}.\end{aligned}$$

— Calculons $\mathbf{E}\left(\mathbb{X}^2\right)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\mathbb{X}^2\right) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

D'après la formule de Koenig-Huyghens, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\mathbb{X}) &= \mathbf{E}\left(\mathbb{X}^2\right) - \mathbf{E}(\mathbb{X})^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2(2n+1)-3(n+1))}{12} \\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{12} \\ &= \frac{n^2-1}{12}\end{aligned}$$

II. Lois infinies usuelles

II.1 – Loi géométrique

Définition 13 – Loi géométrique :

Soient $p \in]0\,;1[$ et $q = 1-p$.

On dit que la variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit la loi géométrique *de paramètre p, notée $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$, si*

$$\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \textit{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) = (1-p)^{k-1}p = q^{k-1}p.$$

Remarque

La loi est bien définie puisque les probabilités des événements sont positives et, à partir des résultats sur les séries géométriques :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p\cdot q^{k-1} = p\sum_{i=0}^{+\infty} q^i = \frac{p}{1-q} = 1.$$

Exemple de modélisation : *Toute expérience aléatoire consistant en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli identiques (même paramètre) et indépendantes*

Alors la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du premier succès obtenu lors de l'expérience suit la loi géométrique de paramètre p.

En effet, posons :

— P_i : *« obtenir un succès au $i^{ème}$ lancer »,*

— F_i : *« obtenir un échec au $i^{ème}$ lancer ».*

Alors $[\mathbb{X}=k] = \mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{F}_{k-1} \cap \mathrm{P}_k$.

Les lancers étant indépendants, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) &= \mathbf{P}\left(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{F}_{k-1} \cap \mathrm{P}_k\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\mathrm{F}_1\right) \times \mathbf{P}\left(\mathrm{F}_2\right) \times \ldots \times \mathbf{P}\left(\mathrm{F}_{k-1}\right) \times \mathbf{P}\left(\mathrm{P}_k\right) \\ &= q^{k-1}p.\end{aligned}$$

Exemples 20 – Exemples de modélisation :

— *Une loi géométrique modélise un premier temps d'arrêt.*

Si $\mathbb{X}$ renvoie le rang du premier succès dans une succession d'expériences de Bernoulli identiques, mutuellement indépendantes, alors $\mathbb{X}$ suit une loi géométrique où p est la probabilité de succès d'une expérience de Bernoulli.

— *On lance successivement un dé équilibrée jusqu'à obtenir un six. On note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire correspondant au numéro du premier lancer tombé sur six.*

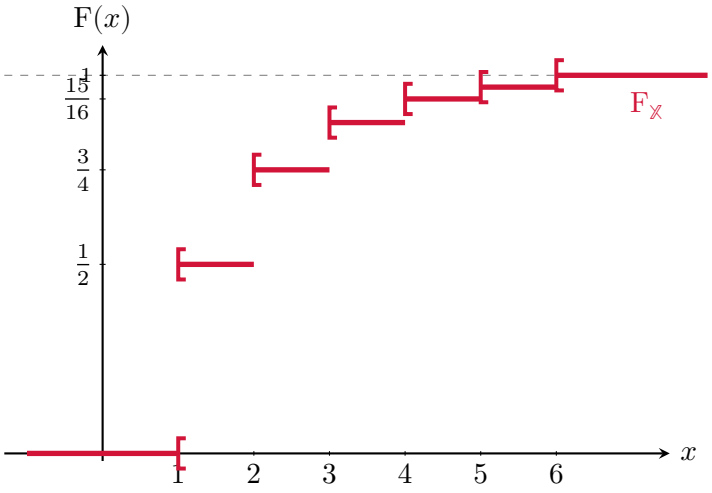
Alors $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.

— *On considère une urne contenant r boules rouges et v boules vertes. L'expérience consiste au tirage infini d'une boule avec remise.*

On note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire . donnant le rang d'apparition de la première boule rouge.

Alors $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}\left(\frac{r}{r+v}\right)$.

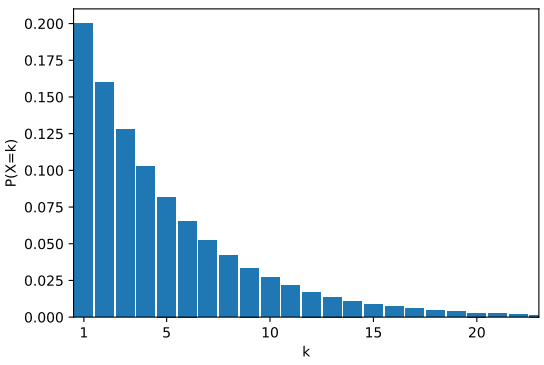
Fonction de répartition : $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.



Représentation de $\mathcal{G}(p)$:

Ci-contre le diagramme en bâtons de la loi :

$$\mathcal{G}\left(\frac{1}{5}\right).$$



Et le code en `Python` *:*

Éditeur

```python
import matplotlib.pyplot as plt

# Paramètre
p = ...

# Support de la loi géométrique
val = list(range(1,25))

# Loi géométrique
loi = [p*(1-p)**(k-1) for k in val]

# Création figure
fig, ax = plt.subplots(figsize=(6,4))

# Histogramme discret
ax.bar(val, loi, width=0.9)

# Axes
ax.set_xlabel("k")
ax.set_ylabel("P(X=k)")

# Graduations entières
ax.set_xticks([1,5,10,15,20])

# Limites pour un rendu propre
ax.set_xlim(0.5, 23)

# Affichage
plt.show()
```

Proposition 31 :

Soient $p \in]0\,;1[$ et $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$.

Alors :

1. *$\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance.*
2. *De plus,*

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Preuve :

Espérance : $\mathbb{X}$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 1} k\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=k])$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque c'est une série à termes positifs.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} k\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) = \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}.$$

Or la série géométrique dérivée $\sum_{k\geqslant 1} k(1-p)^{k-1}$ de raison $1-p \in]-1\,;1[$ est convergente.

Donc $\mathbb{X}$ admet une espérance. De plus,

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = p\,\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

Variance : La variable aléatoire . $\mathbb{X}$ admet un moment d'ordre 2 si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 1} k^2\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=k])$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque c'est une série à termes positifs.

Il suffit de se rappeler que $\forall\, k\in\mathbb{N}$, on peut écrire $k^2 = k(k-1)+k$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)p(1-p)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} kp(1-p)^{k-1} \quad (\text{car } k^2 = k(k-1)+k)\\ &= p(1-p)\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}\\ &= p(1-p)\sum_{k=2}^{n} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} \quad (\text{car } 1(1-1)(1-p)^{1-2}=0).\end{aligned}$$

Or, la série géométrique dérivée $\sum_{k\geqslant 1} k(1-p)^{k-1}$ et la série géométrique dérivée deuxième $\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)(1-p)^{k-2}$, toutes deux de raison $1-p\in\,]-1\,;1[$ sont convergentes.

Donc $\mathbb{X}$ admet un moment d'ordre *i.e.* une variance.

De plus,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\mathbb{X}^2\right) &= p(1-p)\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}\\ &= p(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} + p\frac{1}{(1-(1-p))^2}\\ &= 2\frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p}\\ &= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}\end{aligned}$$

D'après la formule de Koenig-Huyghens, on en déduit :

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}\left(\mathbb{X}^2\right) - \mathbf{E}(\mathbb{X})^2 = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}.$$

La loi géométrique est aussi caractéristique des lois sans mémoire. *C'est le propos de la proposition (32) :*

Proposition 32 :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire réelle discrète infinie telle que $\mathbb{X}\rightsquigarrow\mathcal{G}(p)$ où $p\in\,]0\,;1[$.

Alors pour tout $(k,\ell)\in\mathbb{N}^2$:

1. $\mathbf{P}([\mathbb{X}>k]) = q^k$, *où* $q=1-p$.
2. $\mathbf{P}([\mathbb{X}>k+\ell]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}>k])\times\mathbf{P}([\mathbb{X}>\ell])$.

Preuve : Soit $(k,\ell)\in\mathbb{N}^2$.

1. On remarque tout d'abord que

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} > k]) = 1 - \mathbf{P}(\overline{[\mathbb{X} > k]}) = 1 - \mathbf{P}([\mathbb{X} \leqslant k]).$$

Par ailleurs, $[\mathbb{X} \leqslant k] = \bigcup_{i=1}^{k} [\mathbb{X} = i]$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{X} \leqslant k]) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k}[\mathbb{X} = i]\right) &= \sum_{i=1}^{k}\mathbf{P}([\mathbb{X} = i]) \quad \text{(par incompatibilité)}\\ &= \sum_{i=1}^{k} pq^{i-1} = p\sum_{i=0}^{k-1} q^i = p\frac{1-q^k}{1-q}\\ &= 1 - q^k\end{aligned}$$

Enfin, $\mathbf{P}([\mathbb{X} > k]) = 1 - \mathbf{P}([\mathbb{X} \leqslant k]) = 1 - (1 - q^k) = q^k$.

2. D'après le point précédent :

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} > k + \ell]) = q^{k+\ell} = q^k \times q^\ell = \mathbf{P}([\mathbb{X} > k]) \times \mathbf{P}([\mathbb{X} > \ell]).$$

Corollaire 33 – Loi sans mémoire :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire réelle discrète infinie telle que $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0\,;1[$.

Alors pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$:

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}>k]}([\mathbb{X} > k + \ell]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} > \ell]).$$

On dit alors que la loi géométrique est à perte de mémoire (la propriété $\mathbb{X} > k$ est oubliée, seul le délai est retenu) ou encore que la loi géométrique est sans mémoire.

Preuve : Comme $[\mathbb{X} > k + \ell] \subseteq [\mathbb{X} > k]$, on a :

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}>k]}([\mathbb{X} > k + \ell]) = \frac{\mathbf{P}([\mathbb{X} > k + \ell])}{\mathbf{P}([\mathbb{X} > k])} = \frac{q^{k+\ell}}{q^k} = q^\ell = \mathbf{P}([\mathbb{X} > \ell]).$$

II.2 – Loi de Poisson

Définition 14 – Loi de Poisson [1] :

Soit λ un réel strictement positif.

On dit que la variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit la loi de Poisson *de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si*

$$\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N} \quad \textit{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Remarque

La loi est bien définie. Les probabilités sont bien positives et à partir de la série exponentielle

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\\ &= e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1.\end{aligned}$$

[1]. **Siméon Denis Poisson** (1781-1840)

« La vie n'est bonne qu'à deux choses : découvrir les mathématiques et enseigner les mathématiques »

Exemple de modélisation : *Toute expérience aléatoire simulant l'occurrence d'un événement rare au sein d'une très grande population ou dont la probabilité d'apparition sur un intervalle de temps* T *ne dépend que de la durée de cet intervalle.*

Attention
Ce n'est pas une loi sans mémoire.

Plus précisément : On considère $(\mathbb{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variable aléatoire réelle telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{X}_n \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$ *où* $\lambda > 0$.

On a alors, pour tout $k \leqslant n$ *:*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbb{X}_n = k) &= \binom{n}{k} \times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \times \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\frac{n!}{(n-k)!}}_{\underset{n\to+\infty}{\sim} 1}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\lambda}}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}1} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\mathbf{P}([\mathbb{X}=k])\end{aligned}$$

où $\mathbb{X}$ *est une variable aléatoire réelle . telle que* $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

La loi de Poisson apparaît comme la limite de lois binomiales $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

Ainsi, si n *grand* $\left(\text{et donc } \dfrac{\lambda}{n} \text{ proche de } 0\right)$ *la loi* $\mathcal{P}(\lambda)$ *est une bonne approximation de la loi* $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

Attention
« On a sanctionné les copies dans lesquelles Poisson (ou tout autre mathématicien) était écrit sans majuscule. »
Rapport de Jury HEC 2021

Exemple 21 – Exemple de modélisation :

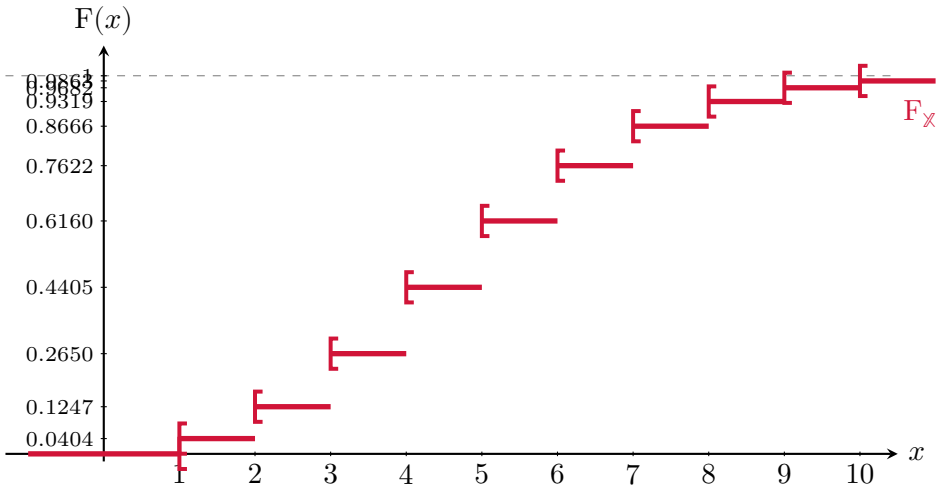
— *Si on regarde la probabilité qu'une ampoule donnée grille entre 14h et 15h aujourd'hui, cette probabilité est presque nulle.*
Mais si on compte, à Paris, le nombre de d'ampoules qui ont grillé entre 14h et 15h aujourd'hui, on peut simuler ce nombre par une loi de Poisson.

— *On considère une autoroute pour laquelle il y a en moyenne* $1,8$ *accidents par semaine.*
La variable aléatoire comptant le nombre d'accidents par semaine sur cette autoroute suit une $\mathcal{P}(1,8)$.

— *On considère un livre contenant des fautes d'impression. On sait de plus qu'il y a en moyenne* $0,8$ *faute d'impression par page.*
La variable aléatoire comptant le nombre de fautes d'impression sur une page de ce livre suit $\mathcal{P}(0,8)$.

— *On considère un serveur téléphonique qui reçoit en moyenne trois appels toutes les minutes.*
La variable aléatoire comptant le nombre d'appels reçus par le serveur en une minute suit une $\mathcal{P}(3)$.

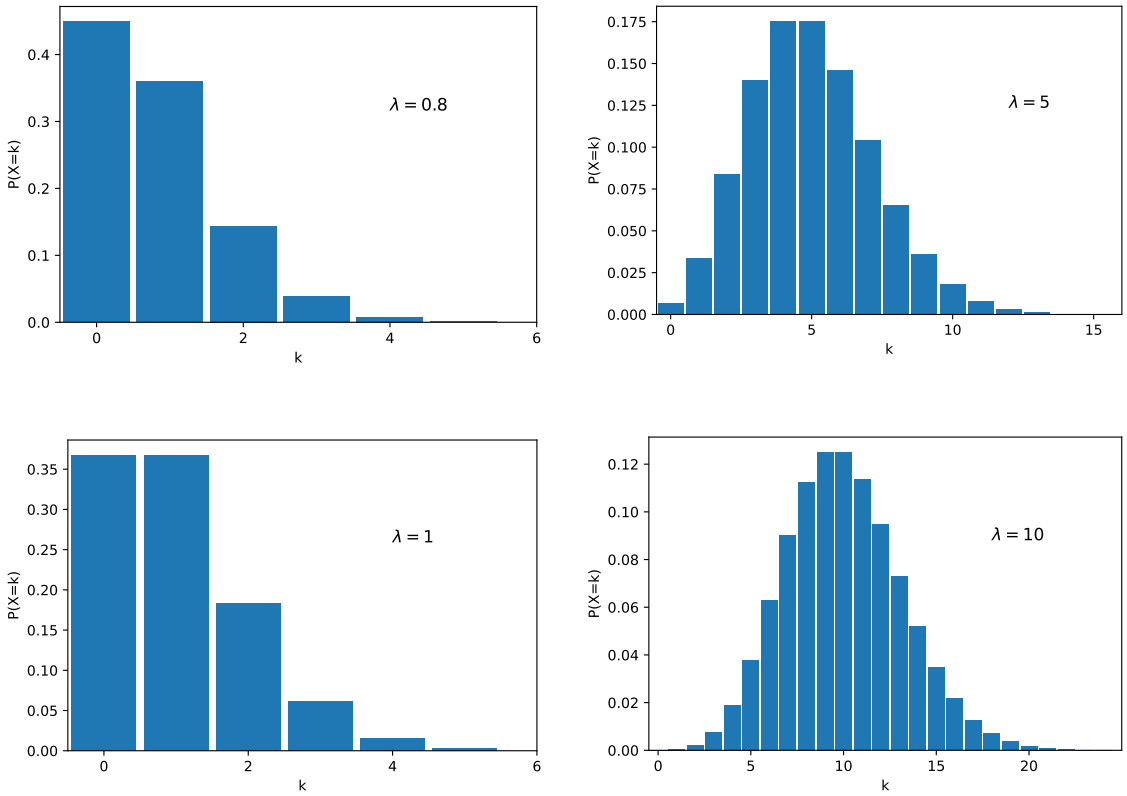
Fonction de répartition : $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{P}(5)$.



Représentation de $\mathcal{P}(\lambda)$:

Ci-dessous quelques diagrammes en bâtons de la loi :

$$\mathcal{P}(\lambda) \text{ où } p \in \{0,8; 1; 5; 10\}\,.$$



Et le code en Python :

Éditeur

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import math

# Paramètre
lam = ...                    # Le paramètre lambda

```

Éditeur

```python
# Support tronqué
val = list(range(0, 25))

# Loi de Poisson
loi = [math.exp(-lam) * lam**k / math.factorial(k) for k in val]

# Création figure
fig, ax = plt.subplots(figsize=(6,4))

# Histogramme discret
ax.bar(val, loi, width=0.9)

# Axes
ax.set_xlabel("k")
ax.set_ylabel("P(X=k)")

# Graduations entières
ax.set_xticks([0,5,10,15,20])

# Limites pour un rendu propre
ax.set_xlim(-0.5, 25)

# Annotation
ax.text(18, max(loi)*0.7,
    rf"$\lambda = {lam}$",
    fontsize=12)

# Affichage
plt.show()
```

Proposition 34 :

Soient $\lambda > 0$ et $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Alors :

1. *$\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance.*
2. *De plus,*
$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) = \lambda.$$

Preuve :

Espérance : $\mathbb{X}$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 1} k\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=k])$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque c'est une série à termes positifs.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} \quad \left(\text{car } \frac{k}{k!} = \frac{k}{k\times(k-1)!}\right)\\ &= e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda^{j+1}}{j!} \qquad \text{(par décalage d'indice)}\\ &= e^{-\lambda}\lambda\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda^j}{j!}\end{aligned}$$

Or, la série exponentielle $\sum_{j\geqslant 0}\frac{\lambda^j}{j!}$ est une série convergente.

On en déduit que $\mathbb{X}$ admet une espérance. De plus,

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) = e^{-\lambda}\lambda\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\mathrm{X}}\lambda\times e^{\mathrm{X}} = \lambda$$

Variance : La variable aléatoire . $\mathbb{X}$ admet un moment d'ordre 2 si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 1} k^2\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=k])$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque c'est une série à termes positifs.

En se rappelant encore que $\forall\, k\in\mathbb{N}$, on peut écrire $k^2 = k(k-1)+k$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2\,\mathbf{P}([\mathrm{X}=k]) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{n} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad \left(\text{car } k^2 = k(k-1)+k\right)\\ &= e^{-\lambda}\left(\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{n} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right) \quad \left(\begin{array}{l}\text{car les premiers termes de}\\ \text{ces sommes sont nuls}\end{array}\right)\\ &= e^{-\lambda}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right)\\ &= e^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\lambda^{k+2}}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^{k+1}}{k!}\right) \quad \text{(par décalage d'indice)}\\ &= e^{-\lambda}\left(\lambda^2\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\lambda^k}{k!} + \lambda\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}\right).\end{aligned}$$

Or, la série exponentielle $\sum_{k\geqslant 0}\frac{\lambda^k}{k!}$ est une série convergente.

On en déduit que $\mathbb{X}$ admet un moment d'ordre 2, donc une variance.

De plus,

$$\mathbf{E}\left(\mathrm{X}^2\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\,\mathbf{P}([\mathrm{X}=k]) = e^{-\lambda}\left(\lambda^2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} + \lambda\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\right) = e^{-\lambda}\left(\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}\right) = \lambda^2+\lambda.$$

D'après la formule de Koenig-Huyghens :

$$\mathbf{V}(\mathrm{X}) = \mathbf{E}\left(\mathrm{X}^2\right) - \mathbf{E}(\mathrm{X})^2 = \lambda^2+\lambda-\lambda^2 = \lambda.$$

Remédiation 22 — Reconnaître une loi usuelle

Exercice IV.1 – (Reconnaître la loi, l'espérance et la variance) [Correction p. 421]

Dans chaque cas, reconnaître la loi de la variable aléatoire (en précisant ses paramètres), puis donner son espérance et sa variance.

1. On lance un dé équilibré à 6 faces jusqu'à obtenir un 6. $\mathbb{X}$ est le nombre de lancers.
2. On lance 10 fois une pièce équilibrée. $\mathbb{Y}$ est le nombre de faces obtenues.
3. On choisit au hasard un entier entre 1 et 20. $\mathbb{T}$ est l'entier choisi.
4. Le nombre de clients arrivant dans un magasin en une heure suit une loi de Poisson de moyenne 4. On note $\mathbb{U}$ ce nombre.
5. Une urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires. On tire une boule au hasard ; $\mathbb{W} = 1$ si elle est blanche, 0 sinon.

Exercice IV.2 – (Variables décalées ou transformées) [Correction p. 422]

Soit $p \in]0\,;1[$ et $q = 1 - p$.

1. Soit $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$ et $\mathbb{Y} = \mathbb{X} - 1$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $\mathbb{Y}$.
2. Soit $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $\mathbb{Y} = n - \mathbb{X}$. Reconnaître la loi de $\mathbb{Y}$.
3. Soit $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ et $\mathbb{Y} = \mathbb{X} - 1$. Reconnaître la loi de $\mathbb{Y}$, puis donner $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{Y})$.
4. On lance une pièce jusqu'au premier pile, puis on la lance une dernière fois. On note $\mathbb{N}$ le nombre total de lancers. Sachant que $\mathbb{N} - 1 \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$, déterminer la loi de $\mathbb{N}$, son espérance et sa variance.

Exercice IV.3 – (Calculs de probabilités avec les lois usuelles) [Correction p. 422]

Calculer :

1. $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 2])$, $\mathbf{P}([\mathbb{X} > 3])$ et $\mathbf{P}([\mathbb{X} \leqslant 2])$ lorsque $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$.
2. $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 0])$, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 1])$ et $\mathbf{P}([\mathbb{X} \geqslant 2])$ lorsque $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{P}(2)$.
3. $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 2])$ et $\mathbf{P}([\mathbb{X} \geqslant 1])$ lorsque $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(4, \frac{1}{2}\right)$.

Correction de l'exercice IV.1 : [Énoncé]

Méthode

Toujours identifier : quelle expérience répète-t-on, qu'est-ce qu'on compte ? *Compter les succès :* binomiale. *Attendre le premier succès :* géométrique. *Choix au hasard :* uniforme.

1. *On répète des épreuves de Bernoulli indépendantes de succès* $p = \dfrac{1}{6}$ *jusqu'au premier succès :* $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{6}\right)$, $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 6$ *et* $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \dfrac{1-\frac{1}{6}}{\frac{1}{36}} = 30$.
2. $\mathbb{Y}$ *compte les succès de* 10 *épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre* $\dfrac{1}{2}$ *:* $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(10, \dfrac{1}{2}\right)$, $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = 5$ *et* $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \dfrac{5}{2}$.
3. *Choix équiprobable :* $\mathbb{T} \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 20 \rrbracket)$, $\mathbf{E}(\mathbb{T}) = \dfrac{21}{2}$ *et* $\mathbf{V}(\mathbb{T}) = \dfrac{20^2-1}{12} = \dfrac{133}{4}$.
4. $\mathbb{U} \rightsquigarrow \mathcal{P}(4)$, $\mathbf{E}(\mathbb{U}) = \mathbf{V}(\mathbb{U}) = 4$.
5. $\mathbb{W} \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{3}{10}\right)$, $\mathbf{E}(\mathbb{W}) = \dfrac{3}{10}$ *et* $\mathbf{V}(\mathbb{W}) = \dfrac{3}{10} \times \dfrac{7}{10} = \dfrac{21}{100}$.

Correction de l'exercice IV.2 : [Énoncé]

Piège

Une variance ne change pas par translation : $\mathbf{V}(\mathbb{X}+b) = \mathbf{V}(\mathbb{X})$. *Mais* $\mathbf{V}(a\mathbb{X}) = a^2\mathbf{V}(\mathbb{X})$.

1. $\mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}$ *et, pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}([\mathbb{Y} = k]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = k+1]) = q^k p$. *Par linéarité :* $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \dfrac{1}{p} - 1 = \dfrac{q}{p}$ *et* $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) = \dfrac{q}{p^2}$.
2. $\mathbb{X}$ *compte les piles parmi* n *lancers, donc* $n - \mathbb{X}$ *compte les faces :* $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, q)$. *On vérifie :* $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = n - np = nq$ *et* $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) = npq$.
3. $\mathbb{Y}(\Omega) = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ *et* $\mathbf{P}([\mathbb{Y} = k]) = \dfrac{1}{n}$ *:* $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n-1 \rrbracket)$. *Alors* $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \dfrac{n+1}{2} - 1 = \dfrac{n-1}{2}$ *et* $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) = \dfrac{n^2-1}{12}$.
4. $\mathbb{N}(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \llbracket$ *et, pour tout* $n \geqslant 2$,
$$\mathbf{P}([\mathbb{N} = n]) = \mathbf{P}([\mathbb{N} - 1 = n - 1]) = q^{n-2}p.$$
Alors $\mathbf{E}(\mathbb{N}) = \dfrac{1}{p} + 1 = \dfrac{1+p}{p}$ *et* $\mathbf{V}(\mathbb{N}) = \mathbf{V}(\mathbb{N}-1) = \dfrac{q}{p^2}$.

Correction de l'exercice IV.3 : [Énoncé]

Piège

Pour une loi géométrique, $\mathbf{P}([\mathbb{X} > k]) = q^k$ *(les* k *premiers essais sont des échecs) ; on passe par le complémentaire pour* $\mathbf{P}([\mathbb{X} \leqslant k])$.

Idée

« Au moins un » : on passe par le complémentaire $1 - \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0])$.

1. *Avec* $q = \dfrac{2}{3}$ *:* $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 2]) = qp = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}$, $\mathbf{P}([\mathbb{X} > 3]) = q^3 = \dfrac{8}{27}$ *et* $\mathbf{P}([\mathbb{X} \leqslant 2]) = 1 - \mathbf{P}([\mathbb{X} > 2]) = 1 - q^2 = \dfrac{5}{9}$.
2. $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 0]) = e^{-2}$, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 1]) = 2e^{-2}$ *et*
$$\mathbf{P}([\mathbb{X} \geqslant 2]) = 1 - \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0]) - \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1]) = 1 - 3e^{-2}.$$
3. $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 2]) = \binom{4}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$ *et* $\mathbf{P}([\mathbb{X} \geqslant 1]) = 1 - \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0]) = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$.

Remédiation 23

Rappels (très succincts) sur les variables aléatoires réelles

1. Notions fondamentales

Définition 1 – Notions de base sur les variables aléatoires :

- ***Variable aléatoire réelle (v.a.r.)*** *: Une application $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}$ définie sur l'univers Ω d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.*
- ***Support d'une v.a.r.*** *$\mathbb{X}$: L'ensemble noté $\mathbb{X}(\Omega)$ de toutes les valeurs prises par la variable $\mathbb{X}$.*
- ***Variable aléatoire discrète*** *: Une v.a.r. $\mathbb{X}$ dont le support $\mathbb{X}(\Omega)$ est un ensemble **fini** ou **dénombrable** (assimilable à une partie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$).*
- ***Loi de probabilité (ou loi de $\mathbb{X}$)*** *: La donnée de l'ensemble $\mathbb{X}(\Omega)$ et des probabilités $\mathbf{P}(\mathbb{X} = x)$ pour tout $x \in \mathbb{X}(\Omega)$.*
- ***Événement*** *$[\mathbb{X} = x]$: L'ensemble des éventualités $\omega \in \Omega$ telles que $\mathbb{X}(\omega) = x$.*
- ***Système Complet d'Événements (SCE) associé à*** *$\mathbb{X}$: La famille d'événements $([\mathbb{X} = x])_{x \in \mathbb{X}(\Omega)}$ forme un SCE de Ω.*
- ***Fonction de répartition*** *$\mathrm{F}_{\mathbb{X}}$: L'application $\mathrm{F}_{\mathbb{X}} : \mathbb{R} \to [0\,;1]$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\mathrm{F}_{\mathbb{X}}(x) = \mathbf{P}(\mathbb{X} \leqslant x)$.*

Idée
On dit souvent qu'une variable aléatoire réelle est une fonction gain.

Idée
On cherche la probabilité de gagner x.

Méthode 1 – Comment déterminer la loi d'une v.a.r. $\mathbb{X}$?:

*Pour déterminer la loi de $\mathbb{X}$, il faut **toujours** procéder en 2 étapes :*

1. ***Déterminer le support*** *$\mathbb{X}(\Omega)$: Identifier clairement l'ensemble de toutes les valeurs possibles prises par $\mathbb{X}$.*
2. ***Calculer*** *$\mathbf{P}(\mathbb{X} = x)$ **pour tout** $x \in \mathbb{X}(\Omega)$ via la méthode appropriée :*
   - ***Reconnaissance d'une loi usuelle*** *: Schéma de Bernoulli répété, rang du 1er succès, tirages équiprobables, etc.*
   - ***Formule des Probabilités Totales (FPT)*** *: Si $\mathbb{X}$ dépend d'une autre variable $\mathbb{Y}$, utiliser le SCE $([\mathbb{Y} = y])_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)}$:*

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} = x) = \sum_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)} \mathbf{P}(\mathbb{Y} = y)\, \mathbf{P}_{[\mathbb{Y}=y]}(\mathbb{X} = x)$$

   - ***Passage par la fonction de répartition*** *$\mathrm{F}_{\mathbb{X}}$: Privilégier cette voie pour les extremums ($\mathrm{M} = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ ou $m = \min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$) :*

$$\mathbf{P}(\max(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \leqslant x) = \mathbf{P}([\mathbb{X} \leqslant x] \cap [\mathbb{Y} \leqslant x])$$

$$\mathbf{P}(\min(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) > x) = \mathbf{P}([\mathbb{X} > x] \cap [\mathbb{Y} > x])$$

Attention
Cela doit être un réflexe : support puis loi.

— ***Événements équivalents*** : *Décomposer $[\mathbb{X} = k]$ sous forme d'une intersection d'événements élémentaires.*

2. Espérance, Variance et Indépendance

Définition 2 – Espérance $\mathbf{E}(\mathbb{X})$:

— ***Définition*** : *$\mathbb{X}$ admet une espérance si la série $\sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)} x\,\mathbf{P}(\mathbb{X}=x)$ est **absolument convergente**. On a alors :*

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)} x\,\mathbf{P}(\mathbb{X}=x)$$

Idée
La moyenne des gains pondérés par leur probabilité ;

— ***Linéarité*** : *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{E}(a\mathbb{X}+b\mathbb{Y}) = a\mathbf{E}(\mathbb{X}) + b\mathbf{E}(\mathbb{Y})$ (toujours vraie).*

— ***Théorème de transfert*** : *$g(\mathbb{X})$ admet une espérance si, et seulement si $\sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)} g(x)\mathbf{P}(\mathbb{X}=x)$ converge absolument. Alors :*

$$\mathbf{E}(g(\mathbb{X})) = \sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)} g(x)\,\mathbf{P}(\mathbb{X}=x)$$

À retenir
On garde les probabilités et on prend l'image des gains.

— ***Positivité / Monotonie*** : *Si $\mathbb{X} \geqslant 0$, alors $\mathbf{E}(\mathbb{X}) \geqslant 0$.*
Si $\mathbb{X} \leqslant \mathbb{Y}$, alors $\mathbf{E}(\mathbb{X}) \leqslant \mathbf{E}(\mathbb{Y})$.

Définition 3 – Variance $\mathbf{V}(\mathbb{X})$ & Écart-type $\sigma(\mathbb{X})$:

— ***Définition*** : *$\mathbb{X}$ admet une variance si $\mathbb{X}^2$ admet une espérance. Alors :*

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}((\mathbb{X}-\mathbf{E}(\mathbb{X}))^2) \quad \text{et} \quad \sigma(\mathbb{X}) = \sqrt{\mathbf{V}(\mathbb{X})}.$$

Idée
La racine de la moyenne des écarts à la moyenne au carré.

— ***Formule de König-Huygens*** : $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^2) - (\mathbf{E}(\mathbb{X}))^2$.

— ***Propriétés*** : *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{V}(a\mathbb{X}+b) = a^2\mathbf{V}(\mathbb{X})$.*
De plus, $\mathbf{V}(\mathbb{X}) \geqslant 0$.

Proposition 1 – Indépendance et propriétés :

— ***Indépendance*** : *$\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes si, et seulement si*

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega),\ \mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y]) = \mathbf{P}(\mathbb{X}=x)\mathbf{P}(\mathbb{Y}=y).$$

Attention
Pour TOUS les couples de gains !

— ***Propriétés sous indépendance*** :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y}) \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y}).$$

3. Tableau résumé des 5 Lois Usuelles Discrètes

Loi	*Support* $\mathbb{X}(\Omega)$	$\mathbf{P}(\mathbb{X}=k)$	*Espérance* $\mathbf{E}(\mathbb{X})$	*Variance* $\mathbf{V}(\mathbb{X})$
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$\{0,1\}$	$\mathbf{P}(\mathbb{X}=1)=p$, $\mathbf{P}(\mathbb{X}=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	$[\![0,n]\!]$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Uniforme $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$	$[\![1,n]\!]$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

4. Exercices types de reprise

Exercice IV.1 – (Probabilités totales (Lois uniforme & binomiale)) [Correction p. 431]

ne urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire une boule au hasard et on note $\mathbb{X}$ son numéro. Puis, on lance $\mathbb{X}$ fois une pièce équilibrée. On note $\mathbb{Y}$ le nombre de "Pile" obtenus.

1. Donner la loi de $\mathbb{X}$, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X}=k]$ pour $k \in [\![1,\mathrm{N}]\!]$.
3. Exprimer $\mathbf{P}(\mathbb{Y}=0)$.

Exercice IV.2 – (Formule de transfert (Loi Géométrique)) [Correction p. 431]

oit $\mathbb{X} \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$ et $q=1-p$.

1. Rappeler $\mathbb{X}(\Omega)$, $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X})$.
2. Soit $\mathbb{Y}=(-1)^{\mathbb{X}}$. Déterminer $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$ à l'aide du théorème de transfert.

Exercice IV.3 – (Somme et Indépendance (Loi de Poisson)) [Correction p. 431]

oient $\mathbb{X} \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathbb{Y} \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ deux variables aléatoires **indépendantes**.

1. Rappeler $\mathbf{E}(\mathbb{X}+\mathbb{Y})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y})$.
2. Déterminer la loi de $\mathbb{Z}=\mathbb{X}+\mathbb{Y}$.

Correction de l'exercice IV.1 : [Énoncé]

1. $\mathbb{X} \sim \mathcal{U}([\![1,\mathrm{N}]\!])$. *Donc* $\mathbb{X}(\Omega)=[\![1,\mathrm{N}]\!]$, $\mathbf{E}(\mathbb{X})=\frac{\mathrm{N}+1}{2}$ *et* $\mathbf{V}(\mathbb{X})=\frac{\mathrm{N}^2-1}{12}$.
2. *Sachant* $[\mathbb{X}=k]$, $\mathbb{Y}$ *compte le nombre de "Pile" lors de* k *lancers indépendants avec une pièce équilibrée. La loi conditionnelle de* $\mathbb{Y}$ *sachant* $[\mathbb{X}=k]$ *est la loi binomiale* $\mathcal{B}\left(k,\frac{1}{2}\right)$.

3. *D'après la formule des probabilités totales avec le SCE* $([\mathbb{X}=k])_{k\in[\![1,\mathrm{N}]\!]}$ *:*

$$\mathbf{P}(\mathbb{Y}=0)=\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\mathbf{P}(\mathbb{X}=k)\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}(\mathbb{Y}=0)=\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{\mathrm{N}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(1/2)^{\mathrm{N}}}{1-1/2}=\frac{1-(1/2)^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}}$$

Correction de l'exercice IV.2 : [Énoncé]

1. $\mathbb{X}(\Omega)=\mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(\mathbb{X})=\dfrac{1}{p}$ *et* $\mathbf{V}(\mathbb{X})=\dfrac{q}{p^2}$.

2. *D'après le théorème de transfert :*

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y})=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\mathbf{P}(\mathbb{X}=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k pq^{k-1}=-p\sum_{k=1}^{+\infty}(-q)^{k-1}$$

Puisque $|-q|=q<1$*, la série géométrique converge et :*

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y})=-p\cdot\frac{1}{1-(-q)}=\frac{-p}{1+q}=\frac{-p}{2-p}$$

Correction de l'exercice IV.3 : [Énoncé]

1. *Par linéarité,* $\mathbf{E}(\mathbb{X}+\mathbb{Y})=\mathbf{E}(\mathbb{X})+\mathbf{E}(\mathbb{Y})=\lambda_1+\lambda_2$.
Par indépendance, $\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y})=\mathbf{V}(\mathbb{X})+\mathbf{V}(\mathbb{Y})=\lambda_1+\lambda_2$.

2. $\mathbb{Z}(\Omega)=\mathbb{N}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$*, d'après le SCE* $([\mathbb{X}=k])_{k\in[\![0,n]\!]}$ *:*

$$\mathbf{P}(\mathbb{Z}=n)=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(\mathbb{X}=k\cap\mathbb{Y}=n-k)\underset{\text{indép.}}{=}\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(\mathbb{X}=k)\mathbf{P}(\mathbb{Y}=n-k)$$

$$\mathbf{P}(\mathbb{Z}=n)=\sum_{k=0}^{n}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}\cdot e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}$$

D'après la formule du binôme de Newton :

$$\mathbf{P}(\mathbb{Z}=n)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}$$

Ainsi, $\mathbb{Z}=\mathbb{X}+\mathbb{Y}\sim\mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$.

TD 5 Rappels d'ECG-1 -- Variables aléatoires réelles

III. Classiques

Exercice IV.1 – (Déterminer une loi) [Correction p. 431]

On lance deux dés équilibrés et on note $\mathbb{X}$ la somme des deux résultats.

1. Déterminer $\mathbb{X}(\Omega)$.
2. Donner la loi de $\mathbb{X}$.
3. Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.

Exercice IV.2 – (Fonction de répartition) [Correction p. 431]

Soit $\mathbb{X}$ définie par

x_i	-1	0	1	2
$\mathbf{P}([\mathbb{X}=x_i])$	$0,2$	$0,3$	$0,1$	$0,4$

Déterminer la fonction de répartition de $\mathbb{X}$.

Exercice IV.3 – (Loi uniforme) [Correction p. 431]

Une variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit la loi uniforme sur $[\![1,8]\!]$.

Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X})$.

Exercice IV.4 – (Loi de Bernoulli) [Correction p. 431]

Soit $\mathbb{X} \sim \mathcal{B}(p)$.

Calculer $\mathbf{E}(3\mathbb{X}+2)$ et $\mathbf{V}(3\mathbb{X}+2)$.

Exercice IV.5 – (Calculs avec une loi binomiale) [Correction p. 431]

On suppose que $\mathbb{X} \sim \mathcal{B}(5,0,4)$.

Calculer

1. $\mathbf{P}([\mathbb{X}=2])$;
2. $\mathbf{P}([\mathbb{X}\geqslant 4])$;
3. $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X})$.

Exercice IV.6 – (Loi géométrique) [Correction p. 432]

Une pièce donne « Pile » avec la probabilité $0,3$.

On note $\mathbb{X}$ le rang du premier « Pile ».

1. Donner la loi de $\mathbb{X}$.

2. Calculer $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 4])$.
3. Calculer $\mathbf{P}([\mathbb{X} > 3])$.
4. Donner l'espérance de $\mathbb{X}$.

Exercice IV.7 – (Loi de Poisson) [Correction p. 432]

Soit $\mathbb{X} \sim \mathcal{P}(2)$.

Calculer

1. $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 0])$;
2. $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 2])$;
3. $\mathbf{P}([\mathbb{X} \leqslant 2])$;
4. $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X})$.

IV. Concours

Exercice IV.8 – (Simulation Python et Loi Géométrique) [Correction p. 432]

Soient $p \in]0, 1[$ et la fonction Python X ci-dessous :

Éditeur

```python
import numpy.random as rd

def X(p):
    k = 1
    y = 0
    a = rd.rand()
    while a > p:
        y = y + 1
        k = k + 1
        a = rd.rand()
    while a < p:
        k = k + 1
        a = rd.rand()
    return k - 1 - y
```

1. En s'aidant d'un lancer d'une pièce dont la probabilité d'obtenir "Pile" est p, interpréter ce que simule la fonction X.
2. Soit $\mathbb{X}$ la variable aléatoire simulée par la fonction ci-dessus.
   a. Quelle est la loi de $\mathbb{X}$?
   b. Quelle est l'espérance de $\mathbb{X}$ si elle existe ?

Exercice IV.9 – (Problème du collectionneur (Temps d'attente)) [Correction p. 433]

On tire avec remise une boule d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n ($n \geqslant 2$).

1. On note T la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, deux boules différentes ont été tirées. Déterminer la loi et l'espérance de T.

2. Interpréter la variable aléatoire V_n dont la fonction Python suivante calcule une simulation :

```
Éditeur
1  import numpy.random as rd
2
3  def V(n):
4      A = []
5      compteur = 0
6      while len(A) < n:
7          u = rd.randint(1, n + 1)
8          if not (u in A):
9              A.append(u)
10         compteur = compteur + 1
11     return compteur
```

Exercice IV.10 – (Loi définie par une relation de récurrence) [Correction p. 433]

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire discrète telle que $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 4\mathbf{P}([\mathbb{X} = k+2]) = 9\mathbf{P}([\mathbb{X} = k+1]) - 2\mathbf{P}([\mathbb{X} = k])$$

1. Donner la loi de $\mathbb{X}$.

2. Justifier que $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance, puis les calculer.

Indication : On pourra remarquer que la variable $\mathbb{Y} = \mathbb{X} + 1$ suit une loi usuelle.

Exercice IV.11 – (Rang du premier Pile-Face) [Correction p. 434]

Considérons une infinité de lancers mutuellement indépendants d'une pièce équilibrée. On note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire qui donne le rang d'apparition du premier "Pile-Face" (dans cet ordre, aux lancers $k-1$ et k). Si une telle succession ne se produit pas, on pose $\mathbb{X} = 0$. Notons A_i l'événement « Un pile apparaît au i-ème lancer ».

1. En utilisant le SCE $(A_1, \overline{A_1})$, prouver que pour tout $k \geqslant 2$:

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = k+1]) = \frac{1}{2}\mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) + \frac{1}{2^{k+1}}$$

2. En déduire $\mathbf{P}([\mathbb{X} = k])$ pour tout $k \geqslant 2$.

3. Préciser $\mathbf{P}([\mathbb{X} \geqslant 2])$ puis $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 0])$.

4. Justifier que $\mathbb{X}$ admet une espérance et la calculer.

Exercice IV.12 – (Transformations d'une loi de Poisson) [Correction p. 434]

Soit $\mathbb{X} \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

1. Soit $\mathbb{Y} = (-1)^{\mathbb{X}}\mathbb{X}$. Est-ce que $\mathbb{Y}$ possède une espérance ? Si oui, la calculer.

2. Soit $\mathbb{Z}$ définie par :

— Si $\mathbb{X}$ prend une valeur paire, $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{X}}{2}$.

— Si $\mathbb{X}$ prend une valeur impaire, $\mathbb{Z} = 0$.

a. Quelle relation a-t-on entre $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{Z}$?

b. Est-ce que $\mathbb{Z}$ possède une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice IV.13 – (Loi conditionnelle d'une somme de Binomiales) [CORRECTION P. 435]

Soient $\mathbb{X}_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathbb{X}_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ deux variables indépendantes.

1. Rappeler la loi de $\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2$.
2. Pour $n \in (\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2)(\Omega)$, préciser $\mathbf{P}_{[\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2=n]}(\mathbb{X}_1 = k)$.
3. Exprimer à l'aide d'une somme $\mathbf{E}(\mathbb{X}_1 \mid [\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 = n])$.

Exercice IV.14 – (Processus de nœuds sur des Scoubidous) [CORRECTION P. 435]

Un sachet contient n bonbons Scoubidous. À chaque étape, on tire deux extrémités au hasard et on les noue. Soit $\mathbb{X}_n$ le nombre de ronds obtenus à la fin.

1. Justifier que le processus s'arrête avec un sachet vide.
2. Quelles sont les valeurs prises par $\mathbb{X}_n$? Préciser $\mathbf{P}(\mathbb{X}_n = 1)$ et $\mathbf{P}(\mathbb{X}_n = n)$.
3. Justifier que $\mathbf{E}(\mathbb{X}_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$. En déduire que $\mathbf{E}(\mathbb{X}_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2} \ln n$.

Corrigés

Correction de l'exercice IV.1 : [Énoncé]

1. $\mathbb{X}(\Omega) = [\![2, 12]\!]$.

2. *On compte les couples donnant chaque somme.*

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}([\mathbb{X} = k])$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

3. $\dfrac{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1}{36} = 1.$

Correction de l'exercice IV.2 : [Énoncé]

On calcule $\mathrm{F}(x) = \mathbf{P}([\mathbb{X} \leqslant x])$.

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ 0,2 & \text{si } -1 \leqslant x < 0, \\ 0,5 & \text{si } 0 \leqslant x < 1, \\ 0,6 & \text{si } 1 \leqslant x < 2, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Correction de l'exercice IV.3 : [Énoncé]

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{1+8}{2} = \frac{9}{2}.$$

Pour une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$,

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Avec $n = 8$,

$$\boxed{\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{63}{12} = \frac{21}{4}.}$$

Correction de l'exercice IV.4 : [Énoncé]

Pour une Bernoulli, $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = p, \qquad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = p(1-p)$.

Donc,

$$\boxed{\mathbf{E}(3\mathbb{X}+2) = 3p+2.} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbf{V}(3\mathbb{X}+2) = 9p(1-p).}$$

Correction de l'exercice IV.5 : [Énoncé]

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = 2]) = \binom{5}{2}(0,4)^2(0,6)^3 = 0,3456.$$

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} \geqslant 4]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = 4]) + \mathbf{P}([\mathbb{X} = 5]) = 5(0,4)^4(0,6) + (0,4)^5 = 0,08704.$$

Enfin

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 2, \qquad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = 1,2.}$$

Correction de l'exercice IV.6 : [Énoncé]

$\mathbb{X} \sim \mathcal{G}(0,3)$.

Pour tout $k \geqslant 1$,

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = (0,7)^{k-1} \times 0,3.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbf{P}([\mathbb{X} = 4]) = 0,7^3 \times 0,3 = 0,1029.}$$

Puis

$$\boxed{\mathbf{P}([\mathbb{X} > 3]) = 0,7^3 = 0,343.}$$

Enfin

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}.}$$

Correction de l'exercice IV.7 : [Énoncé]

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = 0]) = \mathrm{e}^{-2}.$$

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = 2]) = \mathrm{e}^{-2}\frac{2^2}{2!} = 2\mathrm{e}^{-2}.$$

Donc

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} \leqslant 2]) = \mathrm{e}^{-2}\,(1+2+2) = 5\mathrm{e}^{-2}.$$

Enfin

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 2, \qquad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = 2.}$$

Correction de l'exercice IV.8 : [Énoncé]

1. *La commande* `rd.rand()` *simule un tirage uniforme sur* $]0,1[$. *La condition* `a > p` *correspond à l'obtention d'un "Face" (de probabilité* $1-p$*), tandis que* `a < p` *correspond à "Pile" (de probabilité* p*).*

   — *La première boucle* `while` *compte le nombre d'échecs ("Face") consécutifs avant d'obtenir le premier "Pile". À la sortie de cette boucle,* y *représente le nombre de "Face" obtenus avant le premier "Pile".*

   — *La deuxième boucle continue de lancer la pièce tant qu'on obtient des "Pile" consécutifs.*

   — *Le résultat renvoyé est* $k-1-y$. $k-1$ *représente le nombre total de lancers effectués jusqu'au premier "Face" survenu après la première série de "Pile". La quantité* $(k-1)-y$ *correspond donc exactement au nombre de "Pile" consécutifs obtenus dans cette seconde phase.*

2. a. *La seconde phase commence dès qu'un premier "Pile" est obtenu. À partir de ce moment, on compte le nombre de "Pile" consécutifs jusqu'au premier "Face". Le nombre de "Pile" obtenus suit une loi géométrique décalée de 1 (nombre d'essais pour obtenir le premier "Face", sachant que la probabilité de succès "Face" est* $1-p$*). Ainsi,* $\mathbb{X}+1 \sim \mathcal{G}(1-p)$, *ce qui signifie que* $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ *et pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$ *:*

   $$\mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = p^{k-1}(1-p)$$

   b. *Puisque* $\mathbb{X}+1 \sim \mathcal{G}(1-p)$, $\mathbb{X}+1$ *admet une espérance égale à* $\dfrac{1}{1-p}$. *Par linéarité de l'espérance :*

   $$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}+1) - 1 = \frac{1}{1-p} - 1 = \frac{p}{1-p}$$

Correction de l'exercice IV.9 : [Énoncé]

1. *Lors du 1er tirage, on obtient une certaine boule. Pour les tirages suivants, obtenir une boule différente de la première a une probabilité de* $p = \dfrac{n-1}{n}$ *à chaque tirage (indépendant des autres). La variable* $\mathrm{T}-1$ *compte le nombre de tirages supplémentaires nécessaires pour obtenir une boule différente.* $\mathrm{T}-1$ *suit donc une loi géométrique de paramètre* $p = \dfrac{n-1}{n}$. *Ainsi,* $\mathrm{T}(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$ *et pour tout* $k \geqslant 2$ *:*

$$\mathbf{P}(\mathrm{T}=k) = \left(1-\frac{n-1}{n}\right)^{k-2}\frac{n-1}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}\frac{n-1}{n}$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}(\mathrm{T}) = 1+\mathbf{E}(\mathrm{T}-1) = 1+\frac{1}{\frac{n-1}{n}} = 1+\frac{n}{n-1} = \frac{2n-1}{n-1}$$

2. *La liste* `A` *stocke les numéros distincts déjà obtenus. La boucle continue tant que la longueur de* `A` *est strictement inférieure à* n*, c'est-à-dire tant qu'on n'a pas obtenu la totalité des* n *numéros. La variable* `compteur` *renvoie le nombre total de tirages nécessaires pour obtenir les* n *numéros distincts. La fonction simule le classique **problème du collectionneur**.*

Correction de l'exercice IV.10 : [Énoncé]

1. *Posons* $u_k = \mathbf{P}(\mathbb{X}=k)$*. La suite* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :* $4u_{k+2}-9u_{k+1}+2u_k = 0$*. L'équation caractéristique associée est* $4r^2-9r+2=0$*. Le discriminant est* $\Delta = 81-32 = 49 = 7^2$*. Les racines sont :*

$$r_1 = \frac{9-7}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{9+7}{8} = 2$$

Il existe donc $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ *tel que pour tout* $k\in\mathbb{N}$*,* $u_k = \alpha\left(\dfrac{1}{4}\right)^k + \beta 2^k$*. Comme la série* $\sum u_k$ *converge (somme des probabilités égale à 1), le terme général* u_k *doit tendre vers 0 quand* $k\to+\infty$*. Donc* $\beta = 0$*. On a alors* $\mathbf{P}(\mathbb{X}=k) = \alpha\left(\dfrac{1}{4}\right)^k$*. Utilisons la condition de normalisation* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(\mathbb{X}=k) = 1$ *:*

$$\alpha\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \alpha\cdot\frac{1}{1-1/4} = \frac{4}{3}\alpha = 1 \implies \alpha = \frac{3}{4}$$

Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{N}$*,* $\mathbf{P}(\mathbb{X}=k) = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{4}\right)^k$.

2. *Posons* $\mathbb{Y} = \mathbb{X}+1$*. Alors* $\mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ *et pour tout* $k\geqslant 1$ *:*

$$\mathbf{P}(\mathbb{Y}=k) = \mathbf{P}(\mathbb{X}=k-1) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

On reconnaît la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\dfrac{3}{4}\right)$*.* $\mathbb{Y}$ *admet donc une espérance et une variance :*

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}, \quad \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \frac{1-3/4}{(3/4)^2} = \frac{1/4}{9/16} = \frac{4}{9}$$

Par propriété de l'espérance et de la variance par translation :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{Y})-1 = \frac{4}{3}-1 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \frac{4}{9}$$

Correction de l'exercice IV.11 : [Énoncé]

1. *Par la formule des probabilités totales avec le SCE* $(\mathrm{A}_1, \overline{\mathrm{A}_1})$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{X}=k+1)=\mathbf{P}(\mathrm{A}_1)\mathbf{P}_{\mathrm{A}_1}(\mathbb{X}=k+1)+\mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}_1})\mathbf{P}_{\overline{\mathrm{A}_1}}(\mathbb{X}=k+1)$$

   — *Si* $\overline{\mathrm{A}_1}$ *est réalisé (le premier lancer est Face), le premier lancer n'aide pas à former le motif "Pile-Face". Tout recommence à partir du 2e lancer. Donc* $\mathbf{P}_{\overline{\mathrm{A}_1}}(\mathbb{X}=k+1)=\mathbf{P}(\mathbb{X}=k)$.

   — *Si* A_1 *est réalisé (premier lancer Pile), pour que* $\mathbb{X}=k+1$, *il faut faire une série de* $k-1$ *Pile consécutifs suivis d'un Face au lancer* $k+1$. *Cet événement est* $\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\cap\cdots\cap\mathrm{A}_k\cap\overline{\mathrm{A}_{k+1}}$, *de probabilité* $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$.

   D'où : $\mathbf{P}(\mathbb{X}=k+1)=\frac{1}{2}\mathbf{P}(\mathbb{X}=k)+\frac{1}{2^{k+1}}$.

2. *Posons* $u_k=\mathbf{P}(\mathbb{X}=k)$ *pour* $k\geqslant 2$. *On a* $u_{k+1}=\frac{1}{2}u_k+\frac{1}{2^{k+1}}$. *En divisant par* $\frac{1}{2^{k+1}}$, *c'est-à-dire en multipliant par* 2^{k+1} :

$$2^{k+1}u_{k+1}=2^k u_k+1$$

   La suite $v_k=2^k u_k$ *est arithmétique de raison 1. Donc pour* $k\geqslant 2$:

$$v_k=v_2+(k-2)\cdot 1$$

   Pour $k=2$, $[\mathbb{X}=2]=\mathrm{A}_1\cap\overline{\mathrm{A}_2}$, *donc* $u_2=\mathbf{P}(\mathbb{X}=2)=\frac{1}{4}$. *Ainsi* $v_2=2^2\cdot\frac{1}{4}=1$. *On en déduit* $v_k=1+k-2=k-1$, *d'où :*

$$\mathbf{P}(\mathbb{X}=k)=\frac{k-1}{2^k}\quad\text{pour tout } k\geqslant 2$$

3. *Sommons les probabilités pour* $k\geqslant 2$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{X}\geqslant 2)=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k-1}{2^k}=\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{j}{2^{j+1}}=\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{+\infty}j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$$

   On reconnaît la somme d'une série géométrique dérivée de raison $1/2$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{X}\geqslant 2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1-1/2)^2}=\frac{1}{4}\cdot 4=1$$

   Par conséquent, $\mathbf{P}(\mathbb{X}=0)=1-\mathbf{P}(\mathbb{X}\geqslant 2)=0$.

4. $\mathbb{X}$ *admet une espérance si la série* $\sum k\mathbf{P}(\mathbb{X}=k)$ *converge absolument :*

$$\mathbf{E}(\mathbb{X})=\sum_{k=2}^{+\infty}k\frac{k-1}{2^k}=\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$$

   On reconnaît la série géométrique dérivée seconde en $x=1/2$:

$$\mathbf{E}(\mathbb{X})=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{(1-1/2)^3}=\frac{1}{4}\cdot 16=4$$

Correction de l'exercice IV.12 : [Énoncé]

1. *Par le théorème de transfert,* $\mathbb{Y}$ *admet une espérance si et seulement si la série* $\sum|(-1)^k k|\mathbf{P}(\mathbb{X}=k)=\sum k\mathbf{P}(\mathbb{X}=k)$ *converge, ce qui est le cas car* $\mathbb{X}$ *admet une espérance* $(\mathbf{E}(\mathbb{X})=\lambda)$.

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y})=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

En posant $j = k-1$:

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = -\lambda e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^j}{j!} = -\lambda e^{-\lambda}e^{-\lambda} = -\lambda e^{-2\lambda}$$

2. a. *Observons les valeurs de $\mathbb{X}+\mathbb{Y}$ selon la parité de $\mathbb{X}$:*

   — *Si $\mathbb{X}$ est pair ($k = 2m$), $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$, donc $\mathbb{X}+\mathbb{Y} = 2\mathbb{X}$* $\implies \dfrac{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}{4} = \dfrac{\mathbb{X}}{2} = \mathbb{Z}$.

   — *Si $\mathbb{X}$ est impair ($k = 2m+1$), $\mathbb{Y} = -\mathbb{X}$, donc $\mathbb{X}+\mathbb{Y} = 0$* $\implies \dfrac{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}{4} = 0 = \mathbb{Z}$.

   Ainsi, pour tout cas, $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}{4}$.

   b. *Par linéarité de l'espérance, puisque $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ admettent une espérance, $\mathbb{Z}$ admet aussi une espérance :*

$$\mathbf{E}(\mathbb{Z}) = \frac{\mathbf{E}(\mathbb{X})+\mathbf{E}(\mathbb{Y})}{4} = \frac{\lambda-\lambda e^{-2\lambda}}{4} = \frac{\lambda(1-e^{-2\lambda})}{4}$$

Correction de l'exercice IV.13 : [Énoncé]

1. *Par stabilité de la loi binomiale pour des paramètres p identiques et indépendants, $\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2 \sim \mathcal{B}(n_1+n_2, p)$.*

2. *Par la formule de Bayes :*

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2=n]}(\mathbb{X}_1=k) = \frac{\mathbf{P}(\mathbb{X}_1=k\cap\mathbb{X}_2=n-k)}{\mathbf{P}(\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2=n)} = \frac{\binom{n_1}{k}p^k(1-p)^{n_1-k}\binom{n_2}{n-k}p^{n-k}(1-p)^{n_2-(n-k)}}{\binom{n_1+n_2}{n}p^n(1-p)^{n_1+n_2-n}}$$

   Les termes en p et $(1-p)$ se simplifient intégralement :

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2=n]}(\mathbb{X}_1=k) = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}}$$

   *La loi conditionnelle de $\mathbb{X}_1$ sachant $[\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2=n]$ est une loi **hypergéométrique** $\mathcal{H}(n_1+n_2, n_1, n)$.*

3. *Puisque la loi conditionnelle est une loi hypergéométrique de paramètres (n_1+n_2, n_1, n), son espérance vaut :*

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}_1 \mid [\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2=n]) = n\frac{n_1}{n_1+n_2}$$

Correction de l'exercice IV.14 : [Énoncé]

1. *À chaque étape, le nombre d'extrémités libres diminue exactement de 2 (passant de $2k$ à $2k-2$). Le nombre total d'étapes est donc fini et égal à n.*

2. $\mathbb{X}_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

— $\mathbf{P}(\mathbb{X}_n = n)$: *il faut créer un rond à chaque étape. Pour k brin(s) restant(s) ($2k$ extrémités), la probabilité de choisir deux extrémités d'un même brin est* $\dfrac{k}{\binom{2k}{2}} = \dfrac{1}{2k-1}$. *Ainsi*

$$\mathbf{P}(\mathbb{X}_n = n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{(2n-1)!!}.$$

— $\mathbf{P}(\mathbb{X}_n = 1)$: *il faut ne former aucun rond jusqu'à la dernière étape, d'où* $\mathbf{P}(\mathbb{X}_n = 1) = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{2k-1}\right) = \prod_{k=2}^{n} \dfrac{2k-2}{2k-1}$.

3. *Par linéarité et recurrence, la probabilité de former un rond au moment où il reste k brins est* $\dfrac{1}{2k-1}$. *Ainsi* $\mathbf{E}(\mathbb{X}_n) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1}$. *Par comparaison série-intégrale :* $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1} \sim \int_1^n \dfrac{1}{2t}dt = \dfrac{1}{2}\ln n$.

Programme

Couple de variables aléatoires

Ce que dit le programme en ECG2 :

I. Couples de variables aléatoires discrètes

On ne soulèvera aucune difficulté sur les séries indexées par des ensembles dénombrables, que l'on traitera comme des séries classiques. On admettra que toutes les manipulations (interversions de sommes, regroupements de termes, etc.) sont licites (sans exiger la vérification de la convergence absolue des séries envisagées). On admettra aussi que les théorèmes ou les techniques classiques concernant les séries s'étendent dans ce cadre.

Loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes.	*La loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes est caractérisée par la donnée de* $\mathrm{X}(\Omega), \mathrm{Y}(\Omega)$ *et pour tout* $(x,y) \in \mathrm{X}(\Omega) \times \mathrm{Y}(\Omega), \mathrm{P}([\mathrm{X}=x] \cap [\mathrm{Y}=y])$. *On commencera par aborder des exemples où* $\mathrm{X}(\Omega)$ *et* $\mathrm{Y}(\Omega)$ *sont finis.*
Lois marginales, lois conditionnelles.	
Loi d'une variable aléatoire $\mathrm{Z}=g(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ *où* g *est une fonction définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple* (X,Y).	*On se limitera à des cas simples tels que* $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$, XY.
Indépendance de deux variables aléatoires réelles discrètes.	*Deux variables aléatoires* X *et* Y *sont indépendantes si et seulement si pour tout* $(x,y) \in \mathrm{X}(\Omega) \times \mathrm{Y}(\Omega)$, $\mathrm{P}([\mathrm{X}=x] \cap [\mathrm{Y}=y]) = \mathrm{P}([\mathrm{X}=x])\mathrm{P}([\mathrm{Y}=y])$.
Loi du minimum, du maximum, de deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.	
Stabilité des lois binomiales et de Poisson.	*Si* X_1 *et* X_2 *sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois* $\mathcal{B}(n_1,p)$ *et* $\mathcal{B}(n_2,p)$, *alors* $\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2 \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_1+n_2,p)$. *Si* X_1 *et* X_2 *sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois* $\mathcal{P}(\lambda_1)$ *et* $\mathcal{P}(\lambda_2)$, *alors* $\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$.

1 – Suites de variables aléatoires discrètes

Indépendance mutuelle de n *variables aléatoires réelles discrètes.*	$\forall\ (x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{X}_1(\Omega) \times \dots \times \mathrm{X}_n(\Omega)$, $\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [\mathrm{X}_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left([\mathrm{X}_i = x_i]\right)$.

Indépendance d'une suite infinie de variables aléatoires réelles discrètes.	
Lemme des coalitions.	*Si* $X_1, X_2, \dots, X_n$, *sont indépendantes, toute variable aléatoire fonction de* $X_1, X_2, \dots, X_p$ *est indépendante de toute variable aléatoire fonction de* $X_{p+1}, X_{p+2}, \dots, X_n$. *Résultat admis.*

Ce que disait le programme en ECG1 :

II. Probabilités - Variables aléatoires réelles

L'étude des variables aléatoires et notamment celles associées aux lois usuelles se fera en lien étroit avec la partie informatique du programme.

L'étude des variables aléatoires discrètes se fera dans la mesure du possible en tant qu'outil de modélisation de problèmes concrets.

1 – Généralités sur les variables aléatoires réelles

Définition d'une variable aléatoire réelle.	X *est une variable aléatoire réelle définie sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *si* X *est une application de* Ω *dans* **R** *telle que pour tout élément* x *de* **R**, $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{A}$. *Démontrer que* X *est une variable aléatoire ne fait pas partie des exigibles du programme. Notations* $[X \in I], [X = x], [X \leqslant x]$, *etc.*
Système complet d'événements associé à une variable aléatoire.	

2 – Variables aléatoires discrètes

On ne soulèvera pas de difficulté théorique liée à l'ordre (convergence commutative d'une série absolument convergente) ou à la dénombrabilité.

a) Variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$

Définition d'une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$.	*L'ensemble des valeurs prises par ces variables aléatoires sera indexé par une partie finie ou infinie de* **N**.
Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire discrète par la donnée des valeurs $P(X = x)$ *pour* $x \in X(\Omega)$.	
Variable aléatoire $Y = g(X)$, *où* g *est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire* X. *Étude de la loi de* $Y = g(X)$.	*On se limite à des cas simples, tels que* $g : x \longmapsto ax + b, g : x \longmapsto x^2, \dots$

3 – Lois usuelles

a) Lois discrètes finies

Loi certaine.	*Caractérisation par la variance.*
Loi de Bernoulli.	*Notation* $\mathrm{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$.
Loi binomiale.	*Notation* $\mathrm{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$.
Application : formule du binôme de Newton donnant $(a+b)^n$.	*Lorsque* a *et* b *sont strictement positifs, lien avec* $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{a}{a+b}\right)$. *La formule du binôme de Newton dans le cas général pourra être démontrée par récurrence.*
Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.	*Application à l'étude de la loi uniforme sur* $[\![a,b]\!]$, *où* $(a,b) \in \mathbf{N}^2$. *Notation* $\mathrm{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}([a,b])$.

b) Lois discrètes infinies

Loi géométrique (rang d'apparition du premier succès dans un processus de Bernoulli sans mémoire).	*Notation* $\mathrm{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$. » *Si* $\mathrm{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p), \forall k \in \mathbf{N}^*, \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = p(1-p)^{k-1}$.
Loi de Poisson. Contexte d'utilisation.	*Notation* $\mathrm{X} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$. *On pourra remarquer que la loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$ *est loi « limite » (cette notion sera précisée en deuxième année) d'une suite de variables suivant la loi binomiale* $\mathrm{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

IV

Couples de variables aléatoires discrètes

Plan du chapitre

I Couple de variables aléatoires discrètes 441
- I.1 Introduction 441
- I.2 Lois conjointe et marginales 442
- I.3 Fondations et séries doubles 449

II Lois conditionnelles 451

III Indépendance de variables aléatoires 455

IV Opérations sur les variables aléatoires discrètes 460
- IV.1 Loi d'une somme 460
- IV.2 Loi d'un produit 465
- IV.3 Loi d'un maximum et d'un minimum 466

V Bilan et compétences attendues 469

Fiche 24 : Loi conjointe et lois marginales 470

Fiche 25 : Loi d'une somme 474

Fiche 26 : Loi de $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$ 479

Fiche 27 : Loi d'un min 481

Fiche 28 : Loi d'un max 485

Fiche 29 : Loi d'un produit 489

TD 6 : Couple de variables aléatoires discrètes 491

DM 5 : Couple de variables aléatoires 507

Corrigé : Couple de variables aléatoires 510

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilisé.

I. Couple de variables aléatoires discrètes

I.1 – Introduction

Une urne contient 6 *boules numérotées de* 1 *à* 6.

— *On en tire une et on note son numéro* $\mathbb{X}$.

— *On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à* $\mathbb{X}$.

— *On tire une nouvelle boule dont le numéro est* $\mathbb{Y}$.

Le support de chacune de ces variables aléatoires réelles est $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{Y}(\Omega) = [\![1\,;6]\!]$. Ω *désignant l'ensemble des tirages sans remise de l'urne.*

Ω *est donc l'ensemble des* 2*-arrangements de l'ensemble formé des* 6 *boules de l'urne.*

Le couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *est une nouvelle variable aléatoire de support* $[\![1\,;6]\!] \times [\![1\,;6]\!]$.

On veut déterminer la loi de $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Cela revient à chercher, pour tout couple $(i\,;j) \in [\![1\,;6]\!]^2$,

$$\mathrm{P}\big((\mathbb{X} = i) \cap (\mathrm{Y} = j)\big)$$

.

Or, $\mathrm{P}\big((\mathbb{X} = i) \cap (\mathbb{Y} = j)\big) = \mathrm{P}(\mathbb{X} = i) \times \mathrm{P}_{(\mathbb{X}=i)}(\mathbb{Y} = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{i} & \text{si } j \leqslant i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$.

$\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$	1	2	3	4	5	6	$\mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$
1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$\mathbf{P}(\mathbb{Y} = k)$	$\frac{49}{120}$	$\frac{29}{120}$	$\frac{19}{120}$	$\frac{37}{360}$	$\frac{11}{180}$	$\frac{1}{36}$	1

Commentaires :

— *Ce tableau donne la loi, dite* conjointe, *du couple* $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

— *Les marges (obtenues en sommant les valeurs) comportent les lois de* $\mathbb{X}$ *et de* $\mathbb{Y}$. *On les appellera donc les lois* marginales.

Définition 4 – Couple de variables aléatoires :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables discrètes définies sur Ω.

On appelle couple de variables aléatoires, *noté $\mathbb{Z} = (\mathbb{X}\,;\mathbb{Y})$, l'application*

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{Z}: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \omega & \longmapsto & (\mathbb{X}(\omega)\,;\mathbb{Y}(\omega))\,. \end{array}$$

Exemple 1 – Min et Max :

On lance deux fois de suite un dé à 6 faces.

- *On note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire égale au plus petit des deux résultats obtenus.*
- *On note $\mathbb{Y}$ la variable aléatoire égale au plus grand des deux résultats obtenus.*

Rapidement et facilement :

$$\mathbb{X}(\Omega) = [\![1\,;6]\!] \quad \textit{et} \quad \mathbb{Y}(\Omega) = [\![1\,;6]\!]$$

.

$\mathbb{X}\setminus\mathbb{Y}$	1	2	3	4	5	6	$\mathbf{P}(\mathbb{X}=i)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{11}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{9}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$\mathbf{P}(\mathbb{Y}=j)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

I.2 – Lois conjointe et marginales

Définition 5 – Loi conjointe et lois marginales :

D1 • *On appelle* loi du couple aléatoire $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *(ou* loi conjointe *de $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$) la donnée de la fonction*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{F}_{(\mathbb{X},\mathbb{Y})}: & \mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega) & \longrightarrow & [0\,;1] \\ & (x\,;y) & \longmapsto & \mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y]). \end{array}$$

D2 • *La loi de $\mathbb{X}$ est appelée la première* loi marginale *du couple $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, et la loi de $\mathbb{Y}$ la seconde loi marginale de $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.*

Méthode 2 – Déterminer la loi conjointe d'un couple :

Déterminer la loi jointe de $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ c'est :

— *préciser $\mathbb{X}(\Omega)$ et $\mathbb{Y}(\Omega)$.*

— *déterminer $\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])$ pour tous $x\in\mathbb{X}(\Omega)$ et $y\in\mathbb{Y}(\Omega)$.*

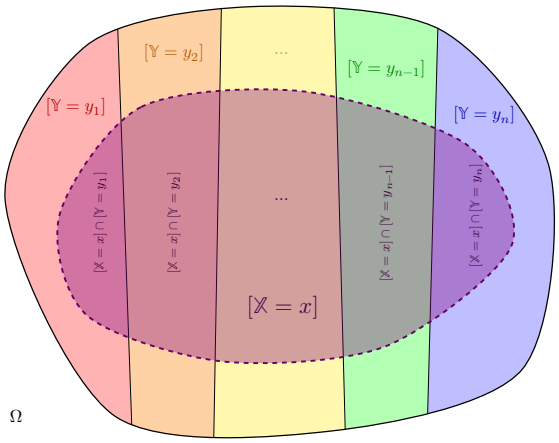


FIGURE IV.1 : Loi des probabilités totales pour $[\mathbb{X}=x]$ à travers le sce $([\mathbb{Y}=y])_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}$.

Proposition 2 – Lois marginales :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables discrètes définies sur Ω.

$$\forall\, x\in\mathbb{X}(\Omega),\quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=x])=\sum_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])$$

.

$$\forall\, y\in\mathbb{Y}(\Omega),\quad \mathbf{P}([\mathbb{Y}=y])=\sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)}\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])$$

.

Preuve : Soit $x\in\mathbb{X}(\Omega)$. La famille $([\mathbb{Y}=y])_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}$ forme un système complet d'événements de Ω. Par la formule des probabilités totales appliquée à l'événement $[\mathbb{X}=x]$, on a immédiatement :

$$\mathbf{P}([\mathbb{X}=x])=\sum_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y]).$$

Le raisonnement est rigoureusement identique pour la seconde loi marginale en échangeant les rôles de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$. ☑

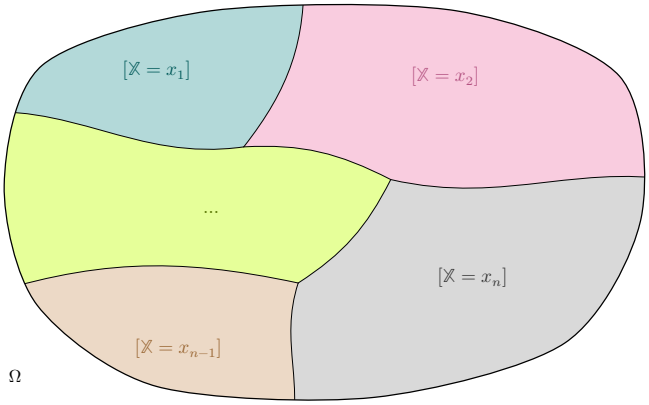


FIGURE IV.2 : Le sce $\left([\mathbb{X}=x]\right)_{x\in\mathbb{X}(\Omega)}$.

Méthode 3 – Déterminer les lois marginales à partir de la loi conjointe :

Par exemple, on obtient la loi de $\mathbb{Y}$ en utilisant la formule des probabilités totales avec $([\mathbb{X}=x])_{x\in\mathbb{X}(\Omega)}$ comme système complet d'évènements :

$$\forall\, y\in\mathbb{Y}(\Omega),\quad \mathbf{P}([\mathbb{Y}=y])=\sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)}\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y]).$$

Proposition 3 – SCE associé à un couple :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables discrètes définies sur Ω.

P1 • *La famille $([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])_{(x,y)\in\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)}$ est un système complet d'évènements.*

P2 • *La série double $\displaystyle\sum_{(x,y)\in\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)}\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])$ est convergente et sa somme est égale à 1.*

Moralité :

— *La loi conjointe contient* toute *l'information du couple : elle permet de retrouver de manière unique les deux lois marginales.*

— *La connaissance des lois marginales seules* ne suffit pas *à reconstituer la loi conjointe, sauf dans le cas très particulier où les variables sont indépendantes.*

Attention
La réciproque est fausse : si on connaît les lois marginales, on ne peut déterminer la loi conjointe.

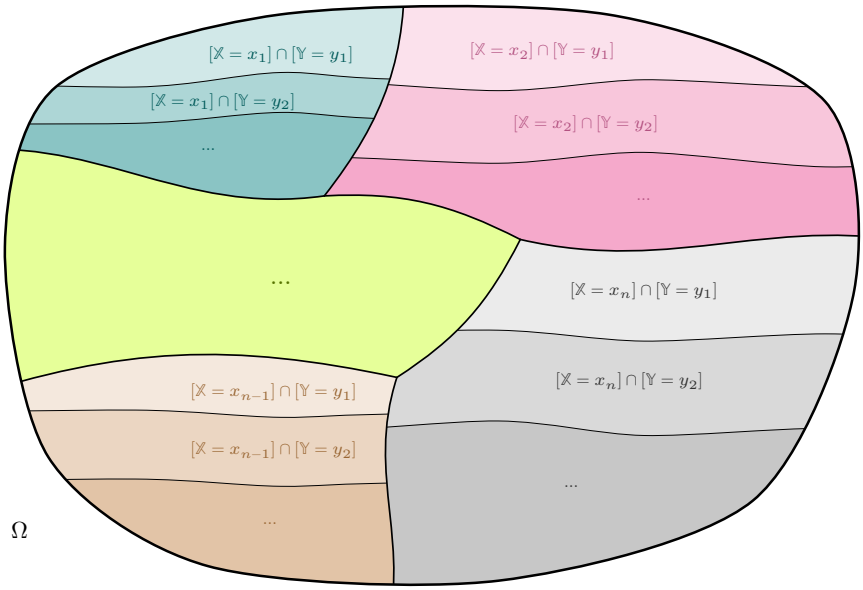


FIGURE IV.3 : Le sce $\left([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y]\right)_{(x;y)\in\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)}$.

Preuve :

P1 • Tout d'abord l'incompatibilité deux à deux :
Soit $(x_1,y_1)\in\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)$ et $(x_2,y_2)\in\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)$ tels que :

$$(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)\,.$$

Par commutativité de l'intersection, on a :

$$([\mathbb{X}=x_1]\cap[\mathbb{Y}=y_1])\cap([\mathbb{X}=x_2]\cap[\mathbb{Y}=y_2])=([\mathbb{X}=x_1]\cap[\mathbb{X}=x_2])\cap([\mathbb{Y}=y_1]\cap[\mathbb{Y}=y_2])$$

Comme $(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$ alors $x_1\neq x_2$ ou $y_1\neq y_2$ et l'une des deux intersections est vide.

$$=\varnothing.$$

Remarque
Cette démonstration est valable dans le cas où $\mathrm{X}(\Omega)$ et $\mathrm{Y}(\Omega)$ sont finis mais aussi dans le cas où ils sont infinis (dénombrables). Cela implique alors que les sommes considérées sont infinies.

Le recouvrement de Ω maintenant :

$$\begin{aligned}\bigcup_{\substack{x\in\mathbb{X}(\Omega)\\y\in\mathbb{Y}(\Omega)}}[\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y]&=\bigcup_{x\in\mathbb{X}(\Omega)}\left(\bigcup_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}[\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y]\right)\\&=\bigcup_{x\in\mathbb{X}(\Omega)}\left([\mathbb{X}=x]\cap\left(\bigcup_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}[\mathbb{Y}=y]\right)\right)&\text{(distributivité de }\cap\text{ sur }\cup)\\&\bigcup_{x\in\mathbb{X}(\Omega)}([\mathbb{X}=x]\cap\Omega)&\text{(car }([\mathbb{Y}=y])_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}\text{ est un sce)}\\&\bigcup_{x\in\mathbb{X}(\Omega)}[\mathbb{X}=x]\\&=\Omega&\text{(car }([\mathbb{X}=x])_{x\in\mathbb{X}(\Omega)}\text{ est aussi un sce).}\end{aligned}$$

Idée
Cette formule donne un moyen de vérifier le calcul de la loi d'un couple.
On peut sommer tous les nombres du tableau : on doit trouver 1.

P2 • En particulier :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{x\in\mathbb{X}(\Omega)\\y\in\mathbb{Y}(\Omega)}}\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])&=\sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)}\left(\sum_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])\right)\\&=\sum_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}\left(\sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)}\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])\right)\\&=1.\end{aligned}$$

Exercice IV.1 – (Détermination d'une loi conjointe et lois marginales)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Un couple de variables aléatoires $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ prend ses valeurs dans $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ et sa loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=i] \cap [\mathbb{Y}=j]) = a \cdot (i+j)$$

1. Déterminer la valeur de la constante a.
2. Présenter la loi conjointe du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ sous la forme d'un tableau à deux entrées.
3. En déduire les lois marginales de $\mathbb{X}$ et de $\mathbb{Y}$.

1. *Les événements* $([\mathbb{X}=i] \cap [\mathbb{Y}=j])_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$ *forment un système complet d'événements. Ainsi :*

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \mathbf{P}([\mathbb{X}=i] \cap [\mathbb{Y}=j]) = 1$$

On calcule la somme :

$$a\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(i+j) = a\left(\sum_{i=1}^{3}\left(3i + \sum_{j=1}^{3} j\right)\right) = a\left(3(1+2+3)+3(1+2+3)\right) = 36a$$

D'où $36a = 1$, *soit* $a = \dfrac{1}{36}$.

2. *Le tableau de la loi conjointe est le suivant :*

$\mathbb{X}$ \ $\mathbb{Y}$	*1*	*2*	*3*	$\mathbf{P}(\mathbb{X}=i)$
1	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{9}{36}$
2	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{12}{36}$
3	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{15}{36}$
$\mathbf{P}(\mathbb{Y}=j)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{15}{36}$	*1*

3. *Par sommation sur les lignes et les colonnes, on obtient les lois marginales de* $\mathbb{X}$ *et de* $\mathbb{Y}$ *:*

— $\mathbb{X}(\Omega) = \{1,2,3\}$

$\mathbb{X}$	*1*	*2*	*3*
$\mathbf{P}(\mathbb{X}=k)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{15}{36}$

— $\mathbb{Y}(\Omega) = \{1,2,3\}$ *avec la même loi par symétrie :*

$\mathbb{Y}$	*1*	*2*	*3*
$\mathbf{P}(\mathbb{Y}=k)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{15}{36}$

Attention
Certaines $\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])$ *peuvent être nulles sans que ni* $\mathbf{P}([\mathbb{X}=x])$ *ni* $\mathbf{P}([\mathbb{Y}=y])$ *ne le soient.*

Exemple 2 – Loi marginales à partir de la loi conjointe :

En reprenant l' exemple (1) *et en sommant par colonne et par ligne, on obtient :*

— *la loi de* $\mathbb{X}$ *:* $\mathbb{X}(\Omega)=[\![1\,;6]\!]$

$\mathbb{X}$	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
$\mathbf{P}([\mathbb{X}=i])$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$\mathbb{X}\rightsquigarrow\mathcal{U}[\![1\,;6]\!]$.

— *la loi de* $\mathbb{Y}$ *:* $\mathbb{Y}(\Omega)=[\![1\,;6]\!]$

$\mathbb{X}$	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=j])$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{6}$

$\mathbb{Y}\rightsquigarrow ?$.

Exemple 3 :

Soient $n\in[\![2\,;+\infty[\![$ *et* $p\in\,]0\,;1[$. *On lance* n *fois une même pièce donnant PILE avec la probabilité* p *et FACE avec la probabilité* $q=1-p$. *On note :*

— $\mathbb{X}$ *la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus,*

— $\mathbb{Y}$ *la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus.*

Déterminons les lois de $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *puis celle du couple* $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

— *Loi de* $\mathbb{X}$ *: L'expérience consiste en* n *répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité* p. *La variable aléatoire* $\mathbb{X}$ *prend comme valeur le nombre de succès obtenus sur des* n *répétitions.*
Par conséquent : $\mathbb{X}\rightsquigarrow\mathcal{B}(n;p)$.

— *Loi de* $\mathbb{Y}$ *: De la même manière,* $\mathbb{Y}\rightsquigarrow\mathcal{B}(n;q)$.

— *Loi jointe de* $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *: On a* $\mathbb{X}(\Omega)=\mathbb{Y}(\Omega)=[\![0\,;n]\!]$.
En remarquant que la somme des PILE et des FACES est toujours constant à n, *pour tout* $(i,j)\in[\![0\,;n]\!]^2$, *on a :*

— *si* $i+j\neq n$, *alors* $[\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j]=\varnothing$ *et* $\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j])=0$.

— *si* $i+j=n$, *alors*
$$[\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j]=[\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=n-i]$$
$$=[\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{X}=i]=[\mathbb{X}=i].$$

D'où, $\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j])=\mathbf{P}([\mathbb{X}=i])=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$

$$=\binom{n}{i}p^iq^j\qquad(q=1-p\quad et\quad i+j=n).$$

Conclusion, pour la loi jointe $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{Y}(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$ *et*

$$\forall\,(i,j)\in[\![0\,;n]\!]^2\,,\ \mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j]) = \begin{cases}\binom{n}{i}p^iq^j, & \text{si } i+j=n\\ 0, & \text{si } i+j\neq n.\end{cases}$$

Exemple 4 :

On effectue une infinité de lancers indépendants de la même pièce donnant PILE avec la probabilité $p\in\,]0\,;1[$.

On note $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *les variables aléatoires respectivement égales aux rangs du premier PILE et du second PILE.*

Déterminons la loi jointe du couple $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

Notons, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, P_k *l'évènement « obtenir PILE au* k*-ième lancer » et* $\mathrm{F}_k=\overline{\mathrm{P}_k}$.
Considérons déjà que $\mathbb{X}(\Omega)=\mathbb{N}^*$ *et* $\mathbb{Y}(\Omega)=[\![2\,;+\infty[\![$.
Soit $(i,j)\in\mathbb{N}^*\times[\![2\,;+\infty[\![$.

— *Si* $i\geqslant j$ *: Il est impossible d'obtenir le second PILE à un rang inférieur ou égal à celui du premier PILE.*
Ainsi, $[\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j]=\varnothing$ *et donc* $\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j])=0$.

— *Si* $i<j$ *:*

$$[\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j]\text{ est réalisé} \iff \text{on obtient le premier PILE au } i\text{-ème lancer et le second au } j\text{-ième lancer}$$
$$\iff \text{on obtient FACE aux éventuels lancers } 1 \text{ à } i-1, \text{ puis PILE au } i\text{-ème lancer, puis FACE aux lancers éventuels } i+1 \text{ à } j-1, \text{ et PILE au } j\text{-ème lancer}$$

D'où,

$$[\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j]=\left(\bigcap_{k=1}^{i-1}\mathrm{F}_k\right)\cap\mathrm{P}_i\cap\left(\bigcap_{k=i+1}^{j-1}\mathrm{F}_k\right)\cap\mathrm{P}_j.$$

Et,

$$\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j])=\mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{i-1}\mathrm{F}_k\right)\cap\mathrm{P}_i\cap\left(\bigcap_{k=i+1}^{j-1}\mathrm{F}_k\right)\cap\mathrm{P}_j\right)$$

Par indépendance des lancers, on simplifie,

$$\begin{aligned}&=\left(\prod_{k=1}^{i-1}(1-p)\right)\times p\times\left(\prod_{k=i+1}^{j-1}(1-p)\right)\times p\\ &=(1-p)^{i-1}p(1-p)^{j-i-1}p\\ &=p^2(1-p)^{j-2}\end{aligned}$$

Conclusion, $\mathbb{X}(\Omega)=\mathbb{N}^*,\mathbb{Y}(\Omega)=[\![2\,;+\infty[\![$ *et*

$$\forall\,(i,j)\in\mathbb{N}^*\times[\![2\,;+\infty[\![\,,\ \mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j])=\begin{cases}p^2(1-p)^{j-2} & \text{si } i<j\\ 0 & \text{si } i\geqslant j.\end{cases}$$

Rappel

— Une intersection d'évènements indexée sur un ensemble vide est égale à Ω

— Une union d'évènements indexée sur un ensemble vide est égale à $\varnothing$

— Un produit de réels indexé sur un ensemble vide est égal à 1

— Une somme de réels indexée sur un ensemble vide est égale à 0

Rappel

$\mathrm{card}\,([\![a\,;b]\!])=b-a+1$.

I.3 – Fondations et séries doubles

Définition 6 – Suite double :

On appelle suite double *(réelle), notée* $\left(u_{i,j}\right)_{(i;j)\in\mathbb{N}^2}$, *toute fonction*

$$u : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Théorème 4 – Théorème de Fubini-Tonelli (admis) :

Soit $\left(u_{i,j}\right)_{(i;j)\in\mathbb{N}^2}$ *une suite double à termes positifs.*

Si
- $\forall\,(i\,;j)\in\mathbb{N}^2,\quad u_{i,j}\geqslant 0,$
- $\forall\, j\in\mathbb{N},$ *la série* $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} u_{i,j}$ *converge vers* $s_j=\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j},$
- *la série* $\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}} s_j$ *converge,*

alors
- $\forall\, i\in\mathbb{N},$ *la série* $\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}} u_{i,j}$ *converge vers* $t_i=\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j},$
- *la série* $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} t_i$ *converge,*

et les sommes doubles satisfont :

$$\sum_{(i;j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j}=\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}=\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}.$$

Idée

Le théorème de Fubini-Tonelli permet d'échanger l'ordre des sommations infinies sans risque d'erreur, sous réserve que tous les termes manipulés soient ***positifs****.*

Exercice IV.2 – (Sommation double)

Montrer que la série double $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}\frac{1}{2^{i+j}}$ converge et calculer sa somme.

Pour tout $(i\,;j)\in\mathbb{N}^2$, *posons* $u_{i,j}=\dfrac{1}{2^{i+j}}\geqslant 0.$

— *Pour* $j\in\mathbb{N}$ *fixé :* $\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{2^{i+j}}=\frac{1}{2^j}\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^i\xrightarrow[N\to+\infty]{}\frac{1}{2^j}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{2^j}=s_j.$

— *La série* $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} s_j=\sum_{j\geqslant 0}\frac{2}{2^j}$ *est géométrique de raison* $\dfrac{1}{2}\in]-1,1[$, *donc elle converge.*

D'après le théorème de Fubini-Tonelli, la série double converge et :

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{i+j}}=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{2}{2^j}=2\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=4.$$

Théorème 5 – Fondation :

Soient I *et* J *deux ensembles finis ou dénombrables. Si* $(p_{i,j})_{(i,j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ *est une suite double* positive *telle que* $\sum_{(i,j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}} p_{i,j} = 1$, *alors pour toutes familles de réels* $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *et* $(y_j)_{j\in\mathrm{J}}$, *il existe un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *et un couple* $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *de variables aléatoires sur* Ω *tels que :*

— $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_i, i \in \mathrm{I}\}$, $\mathbb{Y}(\Omega) = \{y_j, j \in \mathrm{J}\}$.

— $\forall\, (i,j) \in \mathrm{I}\times\mathrm{J}$, $\mathbf{P}\left([\mathbb{X} = x_i] \cap [\mathbb{Y} = y_j]\right) = p_{i,j}$.

Exemple 5 :

Dans l' exercice (IV.2) *, on a établi que la série* $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{i+j}}$ *est convergente de somme égale à* 4.

Définissons alors la suite $(p_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ *par*

$$\forall\, (i,j) \in \mathbb{N}^2, p_{i,j} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^{i+j+2}}.$$

On a ainsi :

— $\forall\, (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $p_{i,j} \geqslant 0$,

— *la série* $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} p_{i,j}$ *est convergente de somme égale à* 1.

Conclusion, la suite $(p_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ *définit la loi jointe d'un couple de variables aléatoires.*

Exercice IV.3 – (Loi conjointe et constantes inconnues)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ de loi conjointe :

$$\forall\, (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = \frac{a}{2^{i+j}j!}.$$

Déterminer la valeur de a ainsi que les lois marginales du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Loi de $\mathbb{X}$: *Par la formule des probabilités totales avec* $([\mathbb{Y} = j])_{j\in\mathbb{N}}$ *:*

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = i]) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a}{2^{i+j}j!} = \frac{a}{2^i}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^j}{j!} = \frac{a}{2^i}e^{\frac{1}{2}}.$$

Valeur de a : *Comme* $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{X} = i]) = 1$, *on a*

$$ae^{\frac{1}{2}}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 \iff ae^{\frac{1}{2}} \times 2 = 1 \iff a = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}.$$

Conclusion : $\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]) = \dfrac{1}{2^{i+1}}$ i.e. $\mathbb{X}+1 \sim \mathcal{G}(\frac{1}{2})$, *et pour* $\mathbb{Y}$ *:*

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=j]) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2^{i+j+1} j!} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2^{j+1} j!} \times 2 = e^{-\frac{1}{2}} \frac{(\frac{1}{2})^j}{j!} \implies \mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{P}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Exercice IV.4 – (Loi conjointe sur un support infini)

Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère un couple de variables aléatoires $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=i] \cap [\mathbb{Y}=j]) = \frac{c}{2^i \cdot 3^j}$$

1. Montrer que la série double converge et déterminer la valeur de c pour que cette famille de réels définisse une loi de probabilité conjointe.
2. Déterminer la loi marginale de $\mathbb{X}$, puis celle de $\mathbb{Y}$.
3. Reconnaître des lois usuelles.

1. *Par séparation des variables dans la somme géométrique :*

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c}{2^i \cdot 3^j} = c \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i\right)\left(\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j\right)$$

Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$ *et* $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.

La somme vaut donc $c \times 1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{c}{2}$. *Pour obtenir une loi de probabilité, il faut* $\dfrac{c}{2} = 1$, *d'où* $c = 2$.

2. *Pour tout* $i \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$\mathbf{P}(\mathbb{X}=i) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{X}=i] \cap [\mathbb{Y}=j]) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2}{2^i \cdot 3^j} = \frac{2}{2^i} \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j = \frac{2}{2^i} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$\mathbf{P}(\mathbb{Y}=j) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{X}=i] \cap [\mathbb{Y}=j]) = \frac{2}{3^j} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{2}{3^j} \times 1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}$$

3. *On reconnaît que :*
   - $\mathbb{X} \sim \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ $\left(\textit{loi géométrique de paramètre } p_1 = \dfrac{1}{2}\right)$.
   - $\mathbb{Y} \sim \mathcal{G}\left(\dfrac{2}{3}\right)$ $\left(\textit{loi géométrique de paramètre } p_2 = \dfrac{2}{3}\right)$.

II. Lois conditionnelles

Dans de nombreux problèmes, les variables $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *n'ont pas des rôles symétriques : l'une dépend explicitement du résultat obtenu par l'autre. La notion de loi conditionnelle traduit cette dépendance chronologique ou structurelle.*

Définition 7 – Lois conditionnelles :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables discrètes définies sur Ω.

D1 • *Soit $y \in \mathbb{Y}(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}([\mathbb{Y}=y]) \neq 0$. La loi conditionnelle de $\mathbb{X}$ sachant $[\mathbb{Y}=y]$ est l'application*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{F}_{[\mathbb{Y}=y]} : & \mathbb{X}(\Omega) & \longrightarrow & [0\,;1] \\ & x & \longmapsto & \mathbf{P}_{[\mathbb{Y}=y]}([\mathbb{X}=x]). \end{array}$$

D2 • *Soit $x \in \mathbb{X}(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]) \neq 0$. La loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X}=x]$ est l'application*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{F}_{[\mathbb{X}=x]} : & \mathbb{Y}(\Omega) & \longrightarrow & [0\,;1] \\ & y & \longmapsto & \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=x]}([\mathbb{Y}=y]). \end{array}$$

Rappel

Si $\mathbf{P}(\mathrm{A}) \neq 0$ alors

$$\mathbf{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathbf{P}(\mathrm{A})}.$$

Méthode 4 – Déterminer une loi conditionnelle :

Pour déterminer la loi conditionnelle de $\mathbb{X}$ sachant $[\mathbb{Y}=y]$, on donne :

- $\mathbb{X}(\Omega)$.
- $\mathbf{P}_{[\mathbb{Y}=y]}([\mathbb{X}=x])$ *pour tous* $x \in \mathbb{X}(\Omega)$.

Exemple 6 – Un cas fini simple pour bien comprendre :

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires.

On tire successivement 2 boules donc sans remise.

On note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire définie par $\mathbb{X}=0$ si la première boule est noire et $\mathbb{X}=1$ si elle est blanche.

On définit $\mathbb{Y}$ de la même façon pour la deuxième boule.

Déterminons la loi de probabilité du couple $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ ainsi que les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ puis la loi de $\mathbb{X}$ conditionnée par $\mathbb{Y}$ ainsi que la loi de $\mathbb{Y}$ conditionnée par $\mathbb{X}$.

La loi de probabilité du couple $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ est

	$(\mathbb{Y}=0)$	$(\mathbb{Y}=1)$	*Total*
$(\mathbb{X}=0)$	$\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$
$(\mathbb{X}=1)$	$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$
Total	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	*1*

Les lois marginales sont identiques :

x	0	1
$\mathbf{P}([\mathbb{X}=x])$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

et

y	0	1
$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=y])$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

La loi de probabilité de $\mathbb{Y}$

— *conditionnée par* $[\mathbb{X}=0]$ *est :*

x	0	1
$\mathbf{P}_{(\mathbb{X}=0)}([\mathbb{Y}=y])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

— *conditionnée par* $[\mathbb{X}=1]$ *est :*

x	0	1
$\mathbf{P}_{(\mathbb{X}=1)}([\mathbb{Y}=x])$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

De même, la loi de $\mathbb{X}$

— *conditionnée par* $[\mathbb{Y}=0]$ *est :*

x	0	1
$\mathbf{P}_{(\mathbb{Y}=0)}([\mathbb{X}=x])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

— *conditionnée par* $[\mathbb{Y}=1]$ *est :*

x	0	1
$\mathbf{P}_{(\mathbb{Y}=1)}([\mathbb{X}=x])$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

En particulier,

Proposition 6 – Détermination des lois marginales à partir des lois conditionnelles :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé et* $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *un couple de variables aléatoires discrètes.*

— *Loi du couple* $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *:*

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega),\ \mathbf{P}\left([\mathbb{X}=x] \cap [\mathbb{Y}=y]\right) = \mathbf{P}\left([\mathbb{Y}=y]\right)\mathbf{P}_{[\mathbb{Y}=y]}\left([\mathbb{X}=x]\right) = \mathbf{P}\left([\mathbb{X}=x]\right)\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=x]}\left([\mathbb{Y}=y]\right).$$

— *Loi de* $\mathbb{X}$ *via les lois conditionnelles de* $\mathbb{X}$ *sachant* $[\mathbb{Y}=y]$ *pour tout* $y \in \mathbb{Y}(\Omega)$ *:*
Si $\forall\, y \in \mathbb{Y}(\Omega)$, $\mathbf{P}([\mathbb{Y}=y] \neq 0$ *alors*

$$\forall\, x \in \mathbb{X}(\Omega),\ \mathbf{P}\left([\mathbb{X}=x]\right) = \sum_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)} \mathbf{P}\left([\mathbb{Y}=y]\right)\mathbf{P}_{[\mathbb{Y}=y]}\left([\mathbb{X}=x]\right).$$

— *Loi de* $\mathbb{Y}$ *via les lois conditionnelles de* $\mathbb{Y}$ *sachant* $[\mathbb{X}=x]$ *pour tout* $x \in \mathbb{X}(\Omega)$ *:*

Idée
On retiendra que pour obtenir une loi marginale à partir de la loi du couple ou d'une loi conditionnelle, il suffit d'appliquer la formule des probabilités totales.

Si $\forall\, x \in \mathbb{X}(\Omega)$, $\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]) \neq 0$ *alors*

$$\forall\, y \in \mathbb{Y}(\Omega),\ \mathbf{P}\left([\mathbb{Y}=y]\right) = \sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)} \mathbf{P}\left([\mathbb{X}=x]\right)\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=x]}\left([\mathbb{Y}=y]\right).$$

Remarque : *Soit* $x \in \mathbb{X}(\Omega)$ *tel que* $\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]) \neq 0$.

Par définition, $\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=x]}([\mathbb{Y}=y]) = \dfrac{\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])}{\mathbf{P}([\mathbb{X}=x])}$.

Ainsi, si on connait :

- *la loi du couple* $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$,
- *et la loi de* $\mathbb{X}$,

alors on obtient la loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ *sachant* $[\mathbb{X}=x]$.

Mais aussi, $\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}=x]) \times \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=x]}([\mathbb{Y}=y])$ *donc si on connait :*

- *la loi de* $\mathbb{X}$,
- *la loi conditionnelle de* $\mathbb{Y}$ *sachant* $[\mathbb{X}=x]$ *pour tout* $x \in \mathbb{X}(\Omega)$,

alors on obtient la loi du couple $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

Preuve : Les premières égalités résultent de la définition des probabilités conditionnelles, les deux dernières formules résultent de la formule des probabilités totales appliquée aux systèmes complets d'événements $([\mathbb{Y}=y])_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}$ et $([\mathbb{X}=x])_{x\in\mathbb{X}(\Omega)}$.

Exercice IV.5 – (Application aux processus de tirages complexes (Loi de Poisson conditionnée))

Soit $\mathbb{X} \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ le nombre de baguettes magiques produites en une heure.

Chaque baguette a une probabilité $p \in]0,1[$ d'être défectueuse, indépendamment des autres.

Soit $\mathbb{Y}$ le nombre de baguettes défectueuses.

1. Préciser la loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X}=n]$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la loi marginale de $\mathbb{Y}$.

1. *Sachant* $[\mathbb{X}=n]$, $\mathbb{Y}$ *compte le nombre de succès dans* n *épreuves de Bernoulli indépendantes, donc*
$$\mathbb{Y} \underset{[\mathbb{X}=n]}{\sim} \mathcal{B}(n,p).$$
2. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *par la FPT avec* $([\mathbb{X}=n])_{n\geqslant k}$ *:*
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbb{Y}=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathbb{X}=n)\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=n]}(\mathbb{Y}=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= \frac{e^{-\lambda}p^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}\\ &= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)} = \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{Y} \sim \mathcal{P}(\lambda p)$.

Méthode 5 – Déterminer une loi conjointe à partir des lois marginales et :

Pour déterminer la loi d'un couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ lorsque l'expérience comporte deux étapes successives, il suffit de déterminer :

- *la loi de $\mathbb{X}$, puis les lois conditionnelles de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = x]$,*
- *puis la loi conjointe par multiplication :*

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y]) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = x)\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=x]}(\mathbb{Y} = y).$$

Exercice IV.6 – (Loi fille et loi mère)

Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé. Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Lorsque l'événement $[\mathbb{X} = k]$ est réalisé (avec $k \in [\![1, n]\!]$), la variable $\mathbb{Y}$ suit la loi uniforme sur $[\![1, k]\!]$.

1. Donner, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = k]$.
2. Déterminer la loi conjointe du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.
3. Déterminer la loi marginale de $\mathbb{Y}$.

1. *Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, sachant $[\mathbb{X} = k]$, $\mathbb{Y} \sim \mathcal{U}([\![1, k]\!])$. Donc :*

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}(\mathbb{Y} = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & \forall\, j \in [\![1, k]\!] \\ 0, & \text{si } j > k. \end{cases}$$

2. *Par la formule des probabilités composées :*

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = k] \cap [\mathbb{Y} = j]) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) \times \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}(\mathbb{Y} = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{nk} & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. *Pour $j \in [\![1, n]\!]$ fixé, $\mathbb{Y} = j$ est réalisé si et seulement si $\mathbb{X} \geqslant j$. Par la formule des probabilités totales :*

$$\mathbf{P}(\mathbb{Y} = j) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}([\mathbb{X} = k] \cap [\mathbb{Y} = j]) = \sum_{k=j}^{n} \mathbf{P}([\mathbb{X} = k] \cap [\mathbb{Y} = j]) = \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{nk} = \frac{1}{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k}.$$

III. Indépendance de variables aléatoires

Définition 8 – Variables aléatoires indépendantes :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires discrètes sur Ω. $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont dites indépendantes *lorsque :*

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega), \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} = y]).$$

Attention

Pour que deux variables soient indépendantes, l'égalité de factorisation doit être vérifiée pour ***tous*** *les couples $(x, y) \in \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega)$.*
Si elle échoue pour un seul couple, les variables ne son pas indépendantes.

Exemple 7 :

L'indépendance des variables aléatoires se lit rapidement à l'aide de leur loi conjointe :

$\mathbb{X}$ \ $\mathbb{Y}$	1	2	3	4	5	6	*Total*
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
Total	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes

$\mathbb{X}$ \ $\mathbb{Y}$	1	2	3	4	5	6	*Total*
1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
3	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
4	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Total	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

Alors, tout événement ne dépendant que de la variable $\mathbb{X}$ est indépendant de tout événement ne dépendant que de la variable $\mathbb{Y}$.

Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{X}(\Omega)$, pour tout $y \in \mathbb{Y}(\Omega)$:

- $\mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} \leqslant y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} \leqslant y])$,
- $\mathbf{P}([\mathbb{X} \leqslant x] \cap [\mathbb{Y} \leqslant y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} \leqslant x]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} \leqslant y])$,
- $\mathbf{P}([\mathbb{X} \leqslant x] \cap [\mathbb{Y} > y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} \leqslant x]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} > y])$,
- $\mathbf{P}([\mathbb{X} > x] \cap [\mathbb{Y} < y])) = \mathbf{P}([\mathbb{X} > x] \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} < y])$,
- ...

Cela provient essentiellement du fait que :

$$[\mathbb{Y} \leqslant y] = \bigcup_{\substack{y_j \in \mathbb{Y}(\Omega) \\ y_j \leqslant y}} [\mathbb{Y} = y_j]$$

et que $[\mathbb{X} = x]$ est indépendant de tout événement $[\mathbb{Y} = y_j]$.

De même, si on considère $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2$, ..., $\mathbb{X}_n$ des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes, alors toute famille de n événements dont chacun est construit à l'aide d'une variable aléatoire $\mathbb{X}_i$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

On a même mieux et c'est l'objet du très célèbre lemme des coalitions :

Lemme 7 – Lemme des coalitions :

Si $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors toute fonction de $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_p$ est indépendante de toute fonction des $\mathbb{X}_{p+1}, \dots, \mathbb{X}_n$.

Plus précisément, pour tout $x_1 \in \mathbb{X}_1(\Omega)$, ..., $x_n \in \mathbb{X}_n(\Omega)$:

— *les événements $[\mathbb{X}_1 = x_1]$, $[\mathbb{X}_2 \leqslant x_2]$, ..., $[\mathbb{X}_n \leqslant x_n]$ sont mutuellement indépendants,*

— *les événements $[\mathbb{X}_1 \leqslant x_1]$, $[\mathbb{X}_2 > x_2]$, ..., $[\mathbb{X}_n \leqslant x_n]$ sont mutuellement indépendants,*

— ...

Méthode 6 – Preuve de non-indépendance :

Pour montrer que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver un contre-exemple i.e. *trouver un couple $(x, y) \in \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega)$ tel que*

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y]) = 0 \quad \textit{mais} \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \neq 0 \ \textit{et} \ \mathbf{P}([\mathbb{Y} = y]) \neq 0.$$

Remarque
Un seul suffit !

Exemple 8 :

Les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ introduites dans l' exemple (4) *ne sont pas indépendantes.*

En effet, on avait $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; p)$, $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; q)$

$$\textit{et} \quad \forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times [\![2\,; +\infty[\![\,, \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = \begin{cases} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} & \textit{si } i + j = n \\ 0 & \textit{si } i + j \neq n. \end{cases}$$

Ainsi :

— $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 0]) = q^n$ *et* $\mathbf{P}([\mathbb{Y} = 0]) = p^n$, *donc* $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 0]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} = 0]) = p^n q^n \neq 0$ *car* $p \in]0\,; 1[$.

— $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 0]) = 0$, *car* $n \neq 0$

D'où, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 0]) \neq \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} = 0])$ *et les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes.*

Exercice IV.7 – (Test d'indépendance de deux variables)

Soit $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple tel que $\mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = \dfrac{1}{36}(i + j)$ sur $\{1, 2, 3\}^2$.

Les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles indépendantes ?

On a $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 1] \cap [\mathbb{Y} = 1]) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$.
D'autre part, $\mathbf{P}(\mathbb{X} = 1) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$ *et* $\mathbf{P}(\mathbb{Y} = 1) = \dfrac{1}{4}$.
Comme $\mathbf{P}(\mathbb{X} = 1) \times \mathbf{P}(\mathbb{Y} = 1) = \dfrac{1}{16} \neq \dfrac{1}{18}$, *les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes.*

Exercice IV.8 – (Égalité et comparaison de variables géométriques)

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre $p \in]0\,;1[$.

Déterminer $\mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y})$.

On a déjà

$$\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \textit{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}([\mathbb{X} = n]) = \mathbf{P}([\mathbb{Y} = n]) = p(1-p)^{n-1}.$$

D'après la formule des probabilités totales, avec $([\mathbb{X} = n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ *comme système complet d'évènements, la série* $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}([\mathbb{X} = n] \cap [\mathbb{X} = \mathrm{Y}])$ *est convergente et*

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([\mathbb{X} = \mathbb{Y}]) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{X} = n] \cap [\mathbb{X} = \mathrm{Y}]) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{X} = n] \cap [\mathbb{Y} = n]) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{X} = n])\mathbf{P}([\mathbb{Y} = n]) \quad \textit{(par indépendance)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} p^2\Big((1-p)^2\Big)^{n-1} \\
&= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \Big((1-p)^2\Big)^{k} \\
&= p^2 \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p^2}{2p-p^2} \\
&= \frac{p}{2-p}.
\end{aligned}$$

Conclusion, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = \mathbb{Y}]) = \dfrac{p}{2-p}$.

Rappel
$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, m \in \mathbb{N},$
$(x^m)^2 = x^{2m} = (x^2)^m$.

Théorème 8 :

Soit $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *un couple de variable aléatoire discrètes.*

T1 • *Si* $\forall\, x \in \mathbb{X}(\Omega)$, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \neq 0$ *alors*

$\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes si, et seulement si $\forall\, x \in \mathbb{X}(\Omega)$, $\forall\, y \in \mathbb{Y}(\Omega)$,
$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=x]}([\mathbb{Y} = y]) = \mathbf{P}([\mathbb{Y} = y])$.

T2 • *Si* $\forall\, y \in \mathbb{Y}(\Omega)$, $\mathbf{P}([\mathbb{Y} = y]) \neq 0$ *alors*

$\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes si, et seulement si $\forall\, x \in \mathbb{X}(\Omega)$, $\forall\, y \in \mathbb{Y}(\Omega)$,
$\mathbf{P}_{[\mathbb{Y}=y]}([\mathbb{X} = x]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = x])$.

Exercice IV.9 – (Nombre aléatoire de lancers)

Une urne contient trois jetons numérotés de 1 à 3.

On tire un jeton au hasard et on note $\mathbb{X}$ le numéro obtenu.

On lance ensuite $\mathbb{X}$ fois une pièce équilibrée, les lancers étant indépendants entre eux et du tirage du jeton, et on note $\mathbb{Y}$ le nombre de « Pile » obtenus.

1. Donner la loi de $\mathbb{X}$.
2. Pour $k \in [\![1\,;3]\!]$ et $j \in [\![0\,;3]\!]$, déterminer $\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}([\mathbb{Y}=j])$.
3. Déterminer la loi de $\mathbb{Y}$.
4. Les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles indépendantes ?
5. On modifie l'expérience : après le tirage du jeton, on lance *toujours deux fois* la pièce, et on note $\mathbb{Y}'$ le nombre de « Pile » obtenus.
   Montrer que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}'$ sont indépendantes, sans déterminer la loi du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y}')$.

1. *Le jeton est tiré au hasard :* $\mathbb{X}(\Omega) = [\![1\,;3]\!]$ *et* $\forall\, k \in [\![1\,;3]\!]$, $\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) = \dfrac{1}{3}$ *(loi uniforme).*

2. *Sachant* $[\mathbb{X}=k]$*, on lance* k *fois une pièce équilibrée :* $\mathbb{Y}$ *suit alors la loi* $\mathcal{B}\left(k\,;\dfrac{1}{2}\right)$*. Donc*

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}([\mathbb{Y}=j]) = \begin{cases} \dbinom{k}{j}\dfrac{1}{2^k} & \text{si } j \in [\![0\,;k]\!] \\ 0 & \text{si } j > k. \end{cases}$$

j	0	1	2	3
$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=1]}([\mathbb{Y}=j])$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=2]}([\mathbb{Y}=j])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=3]}([\mathbb{Y}=j])$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

3. *On a* $\mathbb{Y}(\Omega) = [\![0\,;3]\!]$*. La famille* $([\mathbb{X}=k])_{k\in[\![1;3]\!]}$ *est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, pour tout* $j \in [\![0\,;3]\!]$*,*

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=j]) = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{P}([\mathbb{X}=k])\,\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}([\mathbb{Y}=j]) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}([\mathbb{Y}=j]).$$

   En lisant le tableau colonne par colonne :

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=0]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) = \frac{7}{24}, \qquad \mathbf{P}([\mathbb{Y}=1]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\right) = \frac{11}{24},$$

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=2]) = \frac{1}{3}\left(0+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right) = \frac{5}{24}, \qquad \mathbf{P}([\mathbb{Y}=3]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{24}.$$

   On vérifie que $\dfrac{7+11+5+1}{24} = 1$.

4. *Pour tout* $k \in \mathbb{X}(\Omega)$, $\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) = \dfrac{1}{3} \neq 0$ *: on peut utiliser le théorème. Si* $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *étaient indépendantes, on aurait* $\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}([\mathbb{Y}=j]) = \mathbf{P}([\mathbb{Y}=j])$ *pour tous* k *et* j*.*
   Or,

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=1]}([\mathbb{Y}=2]) = 0 \neq \frac{5}{24} = \mathbf{P}([\mathbb{Y}=2]).$$

Donc $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes. (Si on a tiré le jeton 1, on ne lance qu'une seule fois la pièce et on ne peut pas obtenir deux « Pile » : savoir que $\mathbb{X}=1$ renseigne sur $\mathbb{Y}$.)

5. *Quel que soit $k \in [\![1\,;3]\!]$, sachant $[\mathbb{X}=k]$ on lance deux fois la pièce, donc $\mathbb{Y}'$ suit la loi $\mathcal{B}\left(2\,;\frac{1}{2}\right)$, quel que soit k :*

$$\forall\, k \in [\![1\,;3]\!]\,,\ \forall\, j \in [\![0\,;2]\!]\,,\quad \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}([\mathbb{Y}'=j]) = \binom{2}{j}\frac{1}{4}.$$

La formule des probabilités totales donne alors

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y}'=j]) = \sum_{k=1}^{3}\mathbf{P}([\mathbb{X}=k])\binom{2}{j}\frac{1}{4} = \binom{2}{j}\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{3}\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) = \binom{2}{j}\frac{1}{4}.$$

Ainsi $\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}([\mathbb{Y}'=j]) = \mathbf{P}([\mathbb{Y}'=j])$ pour tous k et j.
Comme $\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) \neq 0$ pour tout k, le théorème (8) permet de conclure que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}'$ sont indépendantes.

IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

Maintenant que nous savons caractériser un couple, nous pouvons déterminer la loi de nouvelles variables aléatoires construites à partir de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$, telles que leur somme, leur produit, leur minimum ou leur maximum.

IV.1 – Loi d'une somme

Proposition 9 – Loi d'une somme de variables aléatoires :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires réelles discrètes.

Alors,

- *$\mathbb{X}+\mathbb{Y}$ est une variable aléatoire réelle discrète.*
- $\forall\, z \in (\mathbb{X}+\mathbb{Y})(\Omega)$, $\mathbf{P}([\mathbb{X}+\mathbb{Y}=z]) = \displaystyle\sum_{\substack{x\in\mathbb{X}(\Omega)\\ z-x\in\mathbb{Y}(\Omega)}} \mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=z-x])$
$$= \sum_{\substack{z-y\in\mathbb{X}(\Omega)\\ y\in\mathbb{Y}(\Omega)}} \mathbf{P}([\mathbb{X}=z-y]\cap[\mathbb{Y}=y]).$$

On dit que la loi de $\mathbb{Z}=\mathbb{X}+\mathbb{Y}$ est le produit de convolution (discret) des lois de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.

Preuve : L'événement $[\mathbb{X}+\mathbb{Y}=z]$ se décompose selon le système complet d'événements $([\mathbb{X}=x])_{x\in\mathbb{X}(\Omega)}$:

$$[\mathbb{X}+\mathbb{Y}=z] = \bigcup_{x\in\mathbb{X}(\Omega)}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{X}+\mathbb{Y}=z]) = \bigcup_{x\in\mathbb{X}(\Omega)}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=z-x]).$$

Par incompatibilité de ces événements, la probabilité de la réunion est la somme des probabilités. ☑

Corollaire 10 :

Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(\mathbb{X}=k)\mathbf{P}(\mathbb{Y}=n-k).$$

Exemple 9 :

On considère deux variable aléatoire $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ telles que

$$\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 1\,;6 \rrbracket) \qquad \textit{et} \qquad \mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 1\,;4 \rrbracket),$$

par exemple le résultat d'un lancer d'un dé à six faces et d'un dé à quatre faces.

Déterminons la loi de $\mathbb{X}+\mathbb{Y}$.

— *L'univers est $\Omega = \llbracket 1\,;6 \rrbracket \times \llbracket 1\,;4 \rrbracket$, muni de la probabilité uniforme $\mathbf{P}$.*

— *Les variables prennent leurs valeurs dans $\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket 1\,;6 \rrbracket$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \llbracket 1\,;4 \rrbracket$.*

— *Ainsi, $(\mathbb{X}+\mathbb{Y})(\Omega) = \llbracket 2\,;10 \rrbracket$.*

— *Soit $k \in \llbracket 2\,;10 \rrbracket$. On a*

$$[\mathbb{X}+\mathbb{Y}=k] = \bigcup_{\substack{i\in\llbracket 1;6\rrbracket \\ k-i\in\llbracket 1;4\rrbracket}} [\mathbb{X}=i] \cap [\mathbb{Y}=k-i].$$

Cette réunion est disjointe. Comme $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes,

$$\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=k-i]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}=i])\,\mathbf{P}([\mathbb{Y}=k-i]) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

Il suffit donc de compter le nombre de couples $(i,j) \in \llbracket 1\,;6 \rrbracket \times \llbracket 1\,;4 \rrbracket$ tels que $i+j=k$.

On obtient alors la loi de $\mathbb{X}+\mathbb{Y}$:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de couples (i,j)	1	2	3	4	4	4	3	2	1
$\mathbf{P}([\mathbb{X}+\mathbb{Y}=k])$	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$

Théorème 11 – Stabilité des lois binomiales et de Poisson :

T1 • *Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ainsi que $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0\,;1[$.*
Alors,

$$\left.\begin{array}{r} \mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n;p) \\ \mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{B}(m;p) \\ \mathbb{X} \text{ et } \mathbb{Y} \text{ sont indépendantes} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbb{X}+\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n+m;p).$$

T2 • *Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ainsi que $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+*}$.*

Alors

$$\left.\begin{array}{r} \mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ \mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\mu) \\ \mathbb{X} \text{ et } \mathbb{Y} \text{ sont indépendantes} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbb{X}+\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu).$$

Preuve :

T1 • Comme $\mathbb{X}(\Omega) = [\![0\,;m]\!]$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$, on a $(\mathbb{X}+\mathbb{Y})(\Omega) \subset [\![0\,;m+n]\!]$.
Soit $k \in [\![0\,;m+n]\!]$.
Comme la famille $([\mathbb{X}=i])_{i\in[\![0;m]\!]}$ est un sce, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([\mathbb{X}+\mathbb{Y}=k]) &= \sum_{i=0}^{m} \mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{X}+\mathbb{Y}=k]) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=k-i]) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \mathbf{P}([\mathbb{X}=i])\mathbf{P}([\mathbb{Y}=k-i]) \quad \text{(par indépendance)} \\
&= \sum_{\substack{i=0 \\ k-i\in[\![0;m]\!]}}^{m} \mathbf{P}([\mathbb{X}=i])\mathbf{P}([\mathbb{Y}=k-i]) + \cancel{\sum_{\substack{i=0 \\ k-i\notin[\![0;m]\!]}}^{m} \mathbf{P}([\mathbb{X}=i])\mathbf{P}([\mathbb{Y}=k-i])} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} p^i (1-p)^{m-i} \binom{n}{k-i} p^{k-i}(1-p)^{n-k+i} \\
&= p^k(1-p)^{n+m-k} \sum_{\substack{i=0 \\ k-i\in[\![0;m]\!]}}^{m} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} \\
&= \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k},
\end{aligned}$$

en utilisant la formule de Vandermonde.
Ainsi, $\mathbb{X}+\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{B}(m+n,p)$.

Rappel
Formule de Vandermonde : $\forall\, k,m,n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant m+n$, $\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$.

T2 • Comme $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}$, on a $(\mathbb{X}+\mathbb{Y})(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

Comme la famille $([\mathbb{X}=i])_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([\mathbb{X}+\mathbb{Y}=k]) &= \sum_{i=0}^{+\infty}\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{X}+\mathbb{Y}=k])\\
&= \sum_{i=0}^{+\infty}\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=k-i])\\
&= \sum_{i=0}^{+\infty}\mathbf{P}([\mathbb{X}=i])\mathbf{P}([\mathbb{Y}=k-i]) \quad \text{(par indépendance)}\\
&= \sum_{\substack{i=0\\ k-i\in\mathbb{Y}(\Omega)}}^{+\infty}\mathbf{P}([\mathbb{X}=i])\mathbf{P}([\mathbb{Y}=k-i]) + \cancel{\sum_{\substack{i=0\\ k-i\notin\mathbb{Y}(\Omega)}}^{+\infty}\mathbf{P}([\mathbb{X}=i])\mathbf{P}([\mathbb{Y}=k-i])}\\
&= \sum_{i=0}^{k}\mathbf{P}([\mathbb{X}=i])\mathbf{P}([\mathbb{Y}=k-i]) \quad \text{car } (i\in\mathbb{N})\cap(k-i\in\mathbb{N})=(0\leqslant i\leqslant k).\\
&= \sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\mu}\\
&= e^{-\lambda}e^{-\mu}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!(k-i)!}\lambda^i\mu^{k-i}\\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda^i\mu^{k-i}\\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^i\mu^{k-i}\\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{k!}(\lambda+\mu)^k \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton.}
\end{aligned}$$

Idée
$[\mathbb{Y}=k-i]=\varnothing$ si $k-i\notin\mathbb{Y}(\Omega)$.

Finalement, $\mathbb{X}+\mathbb{Y}\rightsquigarrow\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Et si c'est vrai pour deux, c'est vrai pour n…À condition de pouvoir conserver l'indépendance, et ça, c'est l'affaire du lemme (??) des coalitions.

Théorème 12 – Stabilité des lois binomiales et lois de Poisson :

T1 • *Soient $(\mathbb{X}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ ainsi que $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers de $\mathbb{N}^*$ et $p\in]0\,;1[$.*
Alors

$$\left.\begin{array}{r}\forall\, k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{X}_k\rightsquigarrow\mathcal{B}(n_k;p)\\ (\mathbb{X}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}\text{ est une suite de variables}\\ \text{aléatoires indépendantes}\end{array}\right\}\Longrightarrow\ \forall\, n\in[\![2\,;+\infty[\![\,,\ \sum_{k=1}^{n}\mathbb{X}_k\rightsquigarrow\mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^{n}n_k;p\right).$$

T2 • *Soient $(\mathbb{X}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ ainsi que $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels de $\mathbb{R}^{+*}$.*
Alors

$$\left.\begin{array}{r}\forall\, k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{X}_k\rightsquigarrow\mathcal{P}(\lambda_k)\\ (\mathbb{X}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}\text{ est une suite de variables}\\ \text{aléatoires indépendantes}\end{array}\right\}\Longrightarrow\ \forall\, n\in[\![2\,;+\infty[\![\,,\ \sum_{k=1}^{n}\mathbb{X}_k\rightsquigarrow\mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right).$$

À retenir
Cas particulier si les $n_k=1$, on retrouve que la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$ est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{B}(n;p)$.

Preuve : **(Résultat admis)**

T1 • Supposons $\left.\begin{array}{r}\forall\, k\in\mathbb{N}^*,\, \mathbb{X}_k \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_k;p)\\ (\mathbb{X}_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite de variables}\\ \text{aléatoires indépendantes.}\end{array}\right\}$

Et montrons, par récurrence sur $\mathrm{N}\in[\![2\,;+\infty[\![$ que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\mathbb{X}_k \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} n_k;p\right)$.

— **Initialisation.** Pour $\mathrm{N}=2$, c'est ce que dit le théorème (11) :

$$\left.\begin{array}{r}\mathbb{X}_1 \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_1;p)\\ \mathbb{X}_2 \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_2;p)\\ \mathbb{X}_1 \text{ et } \mathbb{X}_2 \text{ sont indépendantes}\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2 \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_1+n_2;p)\,.$$

— **Hérédité.** Soit $\mathrm{N}\in[\![2\,;+\infty[\![$. Supposons $\displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\mathbb{X}_k \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} n_k;p\right)$ et montrons

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}+1}\mathbb{X}_k \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}+1} n_k;p\right).$$

On a :

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}+1}\mathbb{X}_k = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\mathbb{X}_k + \mathbb{X}_{\mathrm{N}+1}.$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\mathbb{X}_k \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} n_k;p\right)$ et $\mathbb{X}_{\mathrm{N}+1} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_{\mathrm{N}+1};p)$.

Comme les variables aléatoires $\mathbb{X}_1,\dots,\mathbb{X}_{\mathrm{N}},\mathbb{X}_{\mathrm{N}+1}$ sont indépendantes, d'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires $\mathbb{X}_1+\dots+\mathbb{X}_{\mathrm{N}}$ et $\mathbb{X}_{\mathrm{N}+1}$ sont également indépendantes.

C'est encore le théorème (11) qui nous donne le résultat : la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\mathbb{X}_k+\mathbb{X}_{\mathrm{N}+1}$ suit la loi $\mathcal{B}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{N}+1} n_k;\mathrm{P}\right)$.

L'hérédité est ainsi établie.

— **Conclusion.** $\forall\,\mathrm{N}\in[\![2\,;+\infty[\![,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\mathbb{X}_k \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} n_k;p\right)$.

T2 • On procède de la même façon.

Méthode
Le lemme des coalitions permet de généraliser, par récurrence, la stabilité d'une loi dans le cas de 2 variables aléatoires aux cas de n variables aléatoires.

Méthode 7 :

Pour déterminer la loi de $\mathbb{X}\pm\mathbb{Y}$ ou $|\mathbb{X}-\mathbb{Y}|$, on utilise la formule des probabilités totales (avec $([\mathbb{X}=x])_{x\in\mathbb{X}(\Omega)}$ ou $([\mathbb{Y}=y])_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}$ comme sce) puis :

M1 • *soit on connaît la loi jointe,*

M2 • *soit on connaît une loi conditionnelle associée avec la bonne loi marginale,*

M3 • *soit $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes et on connaît leur loi.*

Attention
Pour $\mathbf{P}([\mathbb{X}+\mathbb{Y}=z])$, on obtiendra la somme des $\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=z-x])$. Cette probabilité est nulle dès que $z-x\notin\mathbb{Y}(\Omega)$.

Exercice IV.10 – (Somme de deux variables géométriques indépendantes)

Soient $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \sim \mathcal{G}(p)$ deux variables indépendantes ($p \in]0,1[$).

Déterminer la loi de $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$.

$\mathbb{Z}(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$. *Pour $n \geqslant 2$, par le produit de convolution :*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbb{Z} = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(\mathbb{X} = k)\mathbf{P}(\mathbb{Y} = n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} (p(1-p)^{k-1})(p(1-p)^{n-k-1}) \\ &= p^2(n-1)(1-p)^{n-2}.\end{aligned}$$

$\mathbb{Z}$ suit une loi binomiale négative (rang du second succès).

Exercice IV.11 – (Stabilité de la loi de Poisson et loi conditionnelle)

Soient $\mathbb{X} \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathbb{Y} \sim \mathcal{P}(\mu)$ deux variables indépendantes.

Soit $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$.

1. Donner la loi de $\mathbb{Z}$.
2. Sachant $[\mathbb{Z} = n]$, déterminer la loi conditionnelle de $\mathbb{X}$.

1. *Par stabilité et indépendance, $\mathbb{Z} \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.*
2. *Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on cherche $\mathbf{P}_{[\mathbb{Z}=n]}(\mathbb{X} = k)$:*

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{Z}=n]}(\mathbb{X} = k) = \frac{\mathbf{P}([\mathbb{X} = k] \cap [\mathbb{X} + \mathbb{Y} = n])}{\mathbf{P}(\mathbb{Z} = n)} = \frac{\mathbf{P}([\mathbb{X} = k] \cap [\mathbb{Y} = n-k])}{\mathbf{P}(\mathbb{Z} = n)}$$

Par indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$:

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{Z}=n]}(\mathbb{X} = k) = \frac{e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} \times e^{-\mu}\dfrac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\dfrac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$$

Conclusion : *Sachant $[\mathbb{Z} = n]$, $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.*

IV.2 – Loi d'un produit

Proposition 13 – Loi d'un produit de variables aléatoires :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires réelles discrètes.

Alors,

— *$\mathbb{X}\mathbb{Y}$ est une variable aléatoire réelle discrète.*

— *La loi de $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ est fournie par,* $\forall\, z \in (\mathbb{X}\mathbb{Y})(\Omega)$,

$$\mathbf{P}([\mathbb{X}\mathbb{Y}=z]) = \sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)} \mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{X}\mathbb{Y}=z]) = \sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)} \mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[x\mathbb{Y}=z]$$

ou

$$= \sum_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)} \mathbf{P}([\mathbb{X}\mathbb{Y}=z]\cap[\mathbb{Y}=y]) = \sum_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)} \mathbf{P}([y\mathbb{X}=z]\cap[\mathbb{Y}=y].$$

Le choix de l'introduction du sce $([\mathbb{Y}=y])_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}$ ou $([\mathbb{X}=x])_{x\in\mathbb{Y}(\Omega)}$ est guidé par les lois de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.

Méthode
On optera toujours pour le sce le plus simple.

Exercice IV.12 – (Produit de variables de Bernoulli)

Soient $\mathbb{X}\sim\mathcal{B}(p)$ et $\mathbb{Y}\sim\mathcal{B}(q)$ deux variables indépendantes $(p,q\in]0,1[)$.

Déterminer la loi de $\mathbb{Z}=\mathbb{X}\mathbb{Y}$ et tester l'indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Z}$.

— *Comme $\mathbb{X}(\Omega)=\{0,1\}$ et $\mathbb{Y}(\Omega)=\{0,1\}$ alors $\mathbb{X}\mathbb{Y}(\Omega)=\{0,1\}$.*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{X}\mathbb{Y}=1]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X}=1]\cap[\mathbb{Y}=1])\\ &= \mathbf{P}([\mathbb{X}=1])\times\mathbf{P}([\mathbb{Y}=1]) \qquad \textit{par indépendance}\\ &= pq.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{X}\mathbb{Y}\rightsquigarrow\mathcal{B}(pq)$.

— *De plus, $\mathbf{P}([\mathbb{X}=0]\cap[\mathbb{Z}=1])=0\neq\mathbf{P}(\mathbb{X}=0)\mathbf{P}(\mathbb{Z}=1)=(1-p)pq$, donc $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas indépendantes.*

IV.3 – Loi d'un maximum et d'un minimum

Théorème 14 :

Soient $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ un espace probabilisé, $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires réelles discrètes ***indépendantes****.*

On note $\mathrm{F}_{\mathbb{X}}$ et $\mathrm{F}_{\mathbb{Y}}$ les fonctions de répartition de ces variables aléatoires réelles ainsi que $\mathbb{U}=\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ et $\mathbb{V}=\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

T1 •
— *$\mathbb{V}=\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ est une variable aléatoire réelle discrète.*
— *La fonction de répartition de $\mathbb{V}=\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ vérifie :*

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\ \mathrm{F}_{\mathbb{V}}(t)=\mathrm{F}_{\mathbb{X}}(t)\mathrm{F}_{\mathbb{Y}}(t).$$

T2 •
— *$\mathbb{U}=\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ est une variable aléatoire réelle discrète.*
— *La fonction de répartition de $\mathbb{U}=\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ vérifie :*

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\ \mathrm{F}_{\mathbb{U}}(t)=1-(1-\mathrm{F}_{\mathbb{X}}(t))\,(1-\mathrm{F}_{\mathbb{Y}}(t))\,.$$

Preuve : Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned}\forall\, t\in\mathbb{R},\ [\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})\leqslant t] &= [\mathbb{X}\leqslant t]\cap[\mathbb{Y}\leqslant t],\\ [\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})>t] &= [\mathbb{X}>t]\cap[\mathbb{Y}>t].\end{aligned}$$

D'après le théorème (??) , $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ sont des variables aléatoires réelles .

De plus,

À retenir

$$\max(x,y) \leqslant z \iff \begin{cases} x \leqslant z \\ y \leqslant z. \end{cases}$$

T1 • Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_{\mathbb{V}}(t) &= \mathbf{P}([\mathbb{V} \leqslant t]) \\ &= \mathbf{P}([\max(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \leqslant t]) \\ &= \mathbf{P}([\mathbb{X} \leqslant t] \cap [\mathbb{Y} \leqslant t]) \\ &= \mathbf{P}([\mathbb{X} \leqslant t])\mathbf{P}([\mathbb{Y} \leqslant t]) \quad \text{(car } \mathbb{X} \text{ et } \mathbb{Y} \text{ sont indépendantes)} \\ &= \mathrm{F}_{\mathbb{X}}(t)\mathrm{F}_{\mathbb{Y}}(t) \end{aligned}$$

À retenir

$$\min(x,y) > z \iff \begin{cases} x > z \\ y > z. \end{cases}$$

T2 • Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_{\mathbb{U}}(t) &= \mathbf{P}(\mathbb{U} \leqslant t) \\ &= 1 - \mathbf{P}(\mathbb{U} > t) \\ &= 1 - \mathbf{P}(\min(\mathbb{X},\mathbb{Y}) > t) \\ &= 1 - \mathbf{P}([\mathbb{X} > t] \cap [\mathbb{Y} > t]) \\ &= 1 - \mathbf{P}([\mathbb{X} > t])\mathbf{P}([\mathbb{Y} > t]) \quad \text{(car } \mathbb{X} \text{ et } \mathbb{Y} \text{ sont indépendantes)} \\ &= 1 - (1 - \mathrm{F}_{\mathbb{X}}(t))\,(1 - \mathrm{F}_{\mathbb{Y}}(t)) \end{aligned}$$

Remarque : *Une fois connu le maximum de 2 variables aléatoires réelles , on peut en déduire le minimum en utilisant le fait que*

$$\mathbb{X} + \mathbb{Y} = \min(\mathbb{X},\mathbb{Y}) + \max(\mathbb{X},\mathbb{Y}).$$

Méthode 8 – Loi d'un minimum :

Pour déterminer la loi de $\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *dans le cas où* $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *sont* ***indépendantes*** *à valeurs dans* $\mathbb{N}$*, il faudra donc :*

(i) calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\mathbb{X} > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$, *et de même pour* $\mathbf{P}(\mathbb{Y} > n)$ *;*

(ii) montrer que $\mathbf{P}(\min(\mathbb{X},\mathbb{Y}) > n) = \mathbf{P}(\mathbb{X} > n) \times \mathbf{P}(\mathbb{Y} > n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*;*

(iii) conclure en utilisant que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(\min(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = n) = \mathbf{P}(\min(\mathbb{X},\mathbb{Y}) > n-1) - \mathbf{P}(\min(\mathbb{X},\mathbb{Y}) > n).$$

Exercice IV.13 – (Minimum de variables géométriques)

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

On suppose que $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p_1)$ et $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p_2)$ où p_1 et p_2 sont dans $]0\,;1[$.

Déterminer la loi de $\mathbb{U} = \min(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

On suit la méthode (8) :

(i) *Soit* $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{X} > n]) &= 1 - \mathbf{P}([\mathbb{X} \leqslant n]) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} [\mathbb{X} = k]\right) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left([\mathbb{X} = k]\right) \qquad \textit{(par incompatibilité des } [\mathbb{X} = k]\textit{)} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n} q_1^{k-1} p_1 \qquad \textit{où } q_1 = 1 - p_1 \\ &= 1 - \frac{1 - q_1^n}{1 - q_1} p_1 = 1 - (1 - q_1^n) \\ &= q_1^n.\end{aligned}$$

De même, $\mathbf{P}([\mathbb{Y} > n] = q_2^n$.

(ii) *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Alors :*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{U} > n]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X} > n] \cap [\mathbb{Y} > n]) \\ &= \mathbf{P}([\mathbb{X} > n])\mathbf{P}([\mathbb{Y} > n]) \qquad \textit{(par indépendance de } \mathbb{X} \textit{ et } \mathbb{Y}\textit{)} \\ &= q_1^n q_2^n = (q_1 q_2)^n.\end{aligned}$$

(iii) *Comme* $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ *et* $\mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, *alors* $\mathbb{U}(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *On sait que* $[\mathbb{U} > n - 1] = [\mathbb{U} = n] \cup [\mathbb{U} > n]$, *union de deux événements incompatibles.*

On en déduit :

$$\mathbf{P}([\mathbb{U} > n - 1]) = \mathbf{P}([\mathbb{U} = n]) + \mathbf{P}([\mathbb{U} > n])$$

D'où,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{U} = n]) &= \mathbf{P}([\mathbb{U} > n - 1]) - \mathbf{P}([\mathbb{U} > n]) \\ &= (q_1 q_2)^{n-1} - (q_1 q_2)^n \\ &= (q_1 q_2)^{n-1} (1 - q_1 q_2).\end{aligned}$$

Comme $q_1 q_2 \in]0\,;1[$, *on en déduit :* $\mathbb{U} \rightsquigarrow \mathcal{G}(1 - q_1 q_2)$.

Méthode 9 – Loi d'un maximum :

Pour déterminer la loi de $\max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *dans le cas où* $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *sont* ***indépendantes*** *à valeurs dans* $\mathbb{N}$, *il faudra donc :*

(i) *calculer pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\mathbb{X} \leqslant n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$, *et de même pour* $\mathbf{P}(\mathbb{Y} \leqslant n)$;

(ii) *montrer que* $\mathbf{P}(\max(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \leqslant n) = \mathbf{P}(\mathbb{X} \leqslant n) \times \mathbf{P}(\mathbb{Y} \leqslant n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$;

(iii) *conclure en utilisant que pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(\max(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = n) = \mathbf{P}(\max(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \leqslant n) - \mathbf{P}(\max(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \leqslant n - 1).$$

Exercice IV.14 – (Loi d'un maximum)

On reprend les notations de l' exercice (IV.13) et on pose $\mathbb{V} = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Déterminons la loi de $\mathbb{V}$.

On suit la méthode (9) :

(ii) *Soit* $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{V} \leqslant n]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X} \leqslant n] \cap [\mathbb{Y} \leqslant n]) \\ &= \mathbf{P}([\mathbb{X} \leqslant n])\mathbf{P}([\mathbb{Y} \leqslant n]) \quad \textit{(par indépendance de } \mathbb{X} \textit{ et } \mathbb{Y}\textit{)} \\ &= (1-q_1^n)(1-q_2^n) = 1 - q_1^n - q_2^n + (q_1q_2)^n.\end{aligned}$$

(iii) *Comme* $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ *et* $\mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, *alors* $\mathbb{V}(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *On sait que* $[\mathbb{V} \leqslant n] = [\mathbb{V} = n] \cup [\mathbb{V} \leqslant n-1]$, *union de deux événements incompatibles.*
On en déduit :

$$\mathbf{P}([\mathbb{V} \leqslant n]) = \mathbf{P}([\mathbb{V} = n]) + \mathbf{P}([\mathbb{V} \leqslant n-1])$$

D'où,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{V} = n]) &= \mathbf{P}([\mathbb{V} \leqslant n]) - \mathbf{P}([\mathbb{V} \leqslant n-1]) \\ &= -q_1^n - q_2^n + (q_1q_2)^n + q_1^{n-1} + q_2^{n-1} - (q_1q_2)^{n-1} \\ &= q_1^{n-1}(1-q_1) + q_2^{n-1}(1-q_2) - (q_1q_2)^{n-1}(1-q_1q_2).\end{aligned}$$

Exercice IV.15 – (Maximum de variables uniformes discrètes)

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ ($n \geqslant 1$). On pose $\mathbb{V} = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, calculer $\mathbf{P}(\mathbb{V} \leqslant k)$.
2. En déduire la loi de $\mathbb{V}$, c'est-à-dire $\mathbf{P}(\mathbb{V} = k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

1. $[\max(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \leqslant k] = [\mathbb{X} \leqslant k] \cap [\mathbb{Y} \leqslant k]$. *Par indépendance :*

$$\mathbf{P}(\mathbb{V} \leqslant k) = \mathbf{P}(\mathbb{X} \leqslant k) \times \mathbf{P}(\mathbb{Y} \leqslant k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{k^2}{n^2}$$

2. *Pour* $k = 1$ *:* $\mathbf{P}(\mathbb{V} = 1) = \mathbf{P}(\mathbb{V} \leqslant 1) = \dfrac{1}{n^2}$.
Pour $k \in [\![2, n]\!]$ *:*

$$\mathbf{P}(\mathbb{V} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{V} \leqslant k) - \mathbf{P}(\mathbb{V} \leqslant k-1) = \frac{k^2 - (k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}$$

V. Bilan et compétences attendues

Les compétences attendues sur le chapitre couple de variables aléatoires réelles sont les suivantes :

— *savoir déterminer la loi d'un couple (et rédaction associée).*

— *savoir déterminer une loi marginale connaissant la loi du couple.*

— *savoir déterminer une loi marginale connaissant une loi conditionnelle.*

— *savoir passer de la loi du couple à la loi conditionnelle (et inversement) à l'aide de la connaissance de la loi de la variable aléatoire réelle adéquate.*

— *savoir démontrer que deux variables aléatoires réelles $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont non indépendantes en exhibant un couple $(x, y) \in \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega)$ qui met en défaut la propriété d'indépendance.*

(on exhibe un couple particulier, on ne cherche en aucun cas tous les couples qui mettent en défaut la propriété)

— *savoir déterminer la loi d'une v.a.r. $\mathbb{Z} = g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ dans les cas particuliers classiques.*

Plus précisément, savoir déterminer la loi d'une somme $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$ / d'une différence $\mathbb{X} - \mathbb{Y}$ / d'une distance $|\mathbb{X} - \mathbb{Y}|$/ d'un produit $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ de deux variables aléatoires réelles .

Pour ce faire, on testera l'événement $[\mathbb{Z} = z]$ en fonction du sce $([\mathbb{X} = x])_{x\in\mathbb{X}(\Omega)}$ ou du sce $([\mathbb{Y} = y])_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}$ (on choisira le sce le plus simple) et on déterminera la probabilité de $\mathbb{P}([\mathrm{Z} = z])$ à l'aide de la FPT.

— *savoir déterminer la loi du max ou du min de deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes (en particulier la loi du min de deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$)*

Remédiation 24 — Loi conjointe et lois marginales

Exercice IV.1 – (Loi conjointe donnée par un tableau) [Correction p. 472]

Soit $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$\mathbb{X}\backslash\mathbb{Y}$	1	2	3
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
3	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

1. Vérifier que ce tableau définit bien une loi de probabilité.
2. Déterminer les lois marginales de $\mathbb{X}$ et de $\mathbb{Y}$.
3. Les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice IV.2 – (Loi conjointe donnée par une formule (support fini)) [Correction p. 472]

Soit $c \in \mathbb{R}$. Soit $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires tel que $\mathbb{X}(\Omega) = [\![1, 2]\!]$, $\mathbb{Y}(\Omega) = [\![1, 3]\!]$ et

$$\forall (j, k) \in [\![1, 2]\!] \times [\![1, 3]\!], \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = j] \cap [\mathbb{Y} = k]) = c\,(j + k).$$

1. Déterminer c.
2. Déterminer les lois marginales de $\mathbb{X}$ et de $\mathbb{Y}$.

Exercice IV.3 – (Loi conjointe donnée par une formule (support infini)) [Correction p. 473]

Soit $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires tel que $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\forall (j, k) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = j] \cap [\mathbb{Y} = k]) = \frac{1}{2^{j+k}}.$$

1. Vérifier que l'on définit bien une loi conjointe.
2. Déterminer la loi de $\mathbb{X}$, puis celle de $\mathbb{Y}$.
3. Les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice IV.4 – (Support triangulaire) [Correction p. 473]

On lance un dé équilibré à 3 faces, on note $\mathbb{X}$ le résultat.

On tire ensuite au hasard un entier $\mathbb{Y}$ dans $[\![1, \mathbb{X}]\!]$.

1. Montrer que $\mathbf{P}([\mathbb{X} = j] \cap [\mathbb{Y} = k]) = \dfrac{1}{3j}$ si $k \leqslant j$ et 0 sinon.
2. Donner la loi conjointe de $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ sous forme de tableau.
3. En déduire la loi de $\mathbb{Y}$.

Correction de l'exercice IV.1 : [Énoncé]

1. *Les neuf nombres sont positifs. La somme des lignes vaut* $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ *et* $\frac{1}{4}$, *donc la somme de tous les coefficients vaut* 1.
   Le tableau définit bien une loi de probabilité.

Méthode
Les marges se calculent dans le tableau : on vérifie ainsi que les deux marges somment à 1.

2. *On somme chaque ligne pour* $\mathbb{X}$, *chaque colonne pour* $\mathbb{Y}$.
   Par exemple,

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = 2]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = 2] \cap [\mathbb{Y} = 1]) + \mathbf{P}([\mathbb{X} = 2] \cap [\mathbb{Y} = 2]) + \mathbf{P}([\mathbb{X} = 2] \cap [\mathbb{Y} = 3]) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

$\mathbb{X} \backslash \mathbb{Y}$	1	2	3	$\mathbf{P}([\mathbb{X} = i])$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
3	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$\mathbf{P}([\mathbb{Y} = j])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

Méthode
Pour prouver la non-indépendance, une seule case suffit : on cherche un zéro dans le tableau, ou une case qui n'est pas le produit des marges.

3. *Non :* $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 1] \cap [\mathbb{Y} = 3]) = 0$ *alors que* $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 1])\,\mathbf{P}([\mathbb{Y} = 3]) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \neq 0$.
   Les variables aléatoires $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *ne sont donc pas indépendantes.*

Correction de l'exercice IV.2 : [Énoncé]

1. *La somme de toutes les probabilités vaut* 1 *:*

$$\sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{3} c\,(j+k) = c \sum_{j=1}^{2} (3j+6) = c\,(9+12) = 21c.$$

   D'où $c = \dfrac{1}{21}$.

Piège
On n'oublie pas de vérifier que $c > 0$ *: une probabilité est toujours positive.*

2. *Soit* $j \in [\![1, 2]\!]$.
   Par la formule des probabilités totales avec le système complet $([\mathbb{Y} = k])_{k \in [\![1,3]\!]}$ *:*

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = j]) = \sum_{k=1}^{3} \frac{j+k}{21} = \frac{3j+6}{21} = \frac{j+2}{7}.$$

   Ainsi

j	1	2
$\mathbf{P}([\mathbb{X} = j])$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

Soit $k \in [\![1,3]\!]$.
De même :

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=k]) = \sum_{j=1}^{2} \frac{j+k}{21} = \frac{3+2k}{21}.$$

Ainsi

k	1	2	3
$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=k])$	$\frac{5}{21}$	$\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$	$\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$

Méthode
Vérification : $\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=1$ *et* $\frac{5}{21}+\frac{7}{21}+\frac{9}{21}=1$.

Correction de l'exercice IV.3 : [Énoncé]

1. *Les probabilités sont positives. Pour $j \in \mathbb{N}^*$, la série géométrique $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{2^{j+k}}$ converge et*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j+k}} = \frac{1}{2^j}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^j}\times 1 = \frac{1}{2^j}.$$

Puis $\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{2^j}=1$: la somme de la série double vaut 1.

2. *Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Par la formule des probabilités totales, avec le calcul précédent :*

$$\mathbf{P}([\mathbb{X}=j]) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k]) = \frac{1}{2^j}.$$

Ainsi $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$. Par symétrie des rôles de j et k, $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. *Pour tout $(j,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$:*

$$\mathbf{P}([\mathbb{X}=j])\,\mathbf{P}([\mathbb{Y}=k]) = \frac{1}{2^j}\times\frac{1}{2^k} = \mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k]).$$

Les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont donc indépendantes.

À retenir
Quand la formule se factorise en (fonction de j)×(fonction de k) sur un support « rectangulaire », c'est un signe d'indépendance.
Si le support est triangulaire ($k \leqslant j$), c'est impossible.

Correction de l'exercice IV.4 : [Énoncé]

1. *Soit $(j,k) \in [\![1,3]\!]^2$.*
Si $k > j$, l'événement est impossible.
Si $k \leqslant j$, par la formule des probabilités composées :

$$\mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}=j])\,\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=j]}([\mathbb{Y}=k]) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{j} = \frac{1}{3j}.$$

2.

$\mathbb{X}\backslash\mathbb{Y}$	1	2	3
1	$\frac{1}{3}$	0	0
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

3. *On somme les colonnes :*

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=1]) = \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9} = \frac{11}{18},\quad \mathbf{P}([\mathbb{Y}=2]) = \frac{1}{6}+\frac{1}{9} = \frac{5}{18},\quad \mathbf{P}([\mathbb{Y}=3]) = \frac{1}{9} = \frac{2}{18}.$$

Vérification : $\frac{11+5+2}{18}=1$.

Remédiation 25 Loi d'une somme

Exercice IV.1 – (Somme de lois de Poisson) [Correction p. 475]

Soient $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

Soient $\mathrm{X} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathrm{Y} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\mu)$ deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Déterminer la loi de $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$.

Exercice IV.2 – (Somme de lois binomiales) [Correction p. 475]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0\,;1[$.

Soient $\mathrm{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $\mathrm{Y} \rightsquigarrow \mathcal{B}(m,p)$ deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Déterminer la loi de $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$.

Exercice IV.3 – (Somme de lois géométriques) [Correction p. 476]

Soient $p \in]0\,;1[$ et $q \in]0\,;1[$ deux réels distincts.

Soient $\mathrm{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$ et $\mathrm{Y} \rightsquigarrow \mathcal{G}(q)$ deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Déterminer la loi de $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$.

Exercice IV.4 – (Somme de lois uniformes) [Correction p. 477]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ et $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Déterminer la loi de $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$.

Ces exercices sont tous les mêmes. La rédaction est donc fortement similaire :

1. *On commence par déterminer le support de la loi $\mathbb{Z}$:*

	$\mathbb{X}(\Omega)$	$\mathbb{Y}(\Omega)$	$\mathbb{Z}(\Omega)$
Exercice IV.1	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$
Exercice IV.2	$[\![0\,;n]\!]$	$[\![0\,;m]\!]$	$[\![0\,;n+m]\!]$
Exercice IV.3	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N}^*$	$[\![2\,;+\infty[\![$
Exercice IV.2	$[\![1\,;n]\!]$	$[\![1\,;n]\!]$	$[\![2\,;2n]\!]$

2. *On détermine $\mathbf{P}(\mathbb{Z}=k)$ grâce à la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à $\mathbb{X}$, c'est-à-dire la famille $([\mathbb{X}=i])_{i\in\mathbb{X}(\omega)}$ pour un $k \in \mathbb{Z}(\Omega)$.*
   On commencera donc toujours par calculer :

Soit $k \in \mathbb{Z}(\Omega)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbb{Z}=k) &= \mathbf{P}([\mathbb{X}+\mathbb{Y}=k]) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{X}(\Omega)} \mathbf{P}([\mathbb{X}+\mathbb{Y}=k]\cap[\mathbb{X}=i]) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{X}(\Omega)} \mathbf{P}([\mathbb{Y}=k-i]\cap[\mathbb{X}=i]) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{X}(\Omega)} \mathbf{P}([\mathbb{Y}=k-i])\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]) \quad (\textit{ par indépendance })\end{aligned}$$

... la suite dépend des lois considérées.

Correction de l'exercice IV.1 : [Énoncé]

Comme $\mathbb{X}(\Omega)=\mathbb{N}$ et $\mathbb{Y}(\Omega)=\mathbb{N}$, on a $\mathbb{Z}(\Omega)=\mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à $\mathbb{X}$, c'est-à-dire la famille $([\mathbb{X}=i])_{i\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{Z}=k]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X}+\mathbb{Y}=k]) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{P}([\mathbb{X}+\mathbb{Y}=k]\cap[\mathbb{X}=i]) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{Y}=k-i]\cap[\mathbb{X}=i]) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{Y}=k-i])\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]) \quad (\textit{ par indépendance }) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}([\mathbb{Y}=k-i])\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]) \quad (\textit{ car } k-i\geqslant 0 \iff k\leqslant i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \mathrm{e}^{-\mu}\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \\ &= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\sum_{i=0}^{k}\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}\frac{\lambda^i}{i!} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{k!(k-i)!}\lambda^i\mu^{k-i} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^i\mu^{k-i} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{k!}(\lambda+\mu)^k \\ &= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}\end{aligned}$$

La somme de deux lois de Poisson de paramètres λ et μ est une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Correction de l'exercice IV.2 : [Énoncé]

Comme $\mathbb{X}(\Omega)=[\![0\,;n]\!]$ et $\mathbb{Y}(\Omega)=[\![0\,;m]\!]$, on a $\mathbb{Z}(\Omega)=[\![0\,;m+n]\!]$.

Soit $k \in [\![0\,;m+n]\!]$.

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à $\mathbb{X}$, c'est-à-dire la famille $([\mathbb{X}=i])_{i\in[\![0;n]\!]}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([\mathbb{Z}=k]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X}+\mathbb{Y}=k]) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}([\mathbb{X}+\mathbb{Y}=k]\cap[\mathbb{X}=i]) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}([\mathbb{Y}=k-i]\cap[\mathbb{X}=i]) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}([\mathbb{Y}=k-i])\mathbf{P}([\mathbb{X}=i])) \quad (\textit{ par indépendance }) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{m}{k-i} p^{k-i}(1-p)^{m-(k-i)} \binom{n}{i} p^{i}(1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{m}{k-i}\binom{n}{i} p^{k}(1-p)^{m+n-k} \\
&= p^{k}(1-p)^{m+n-k} \sum_{i=0}^{n} \binom{m}{k-i}\binom{n}{i}
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{m}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{m+n}{k}$ *:*

$$\textit{Donc, } \mathbf{P}([\mathbb{Z}=k]) = \binom{m+n}{k} p^{k}(1-p)^{m+n-k}.$$

La somme de deux lois binomiales de paramètres n,p et m,p est une loi binomiale de paramètre $m+n,p$.

Correction de l'exercice IV.3 : [Énoncé]

Comme $\mathbb{X}(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Y}(\Omega)=\mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{Z}(\Omega)=[\![2\,;+\infty[\![$.

Soit $k\in[\![2\,;+\infty[\![$.

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à $\mathbb{X}$, c'est-à-dire la famille $([\mathbb{X}=i])_{i\in\mathbb{N}^*}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([\mathbb{Z}=k]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X}+\mathbb{Y}=k])\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}\mathbf{P}([\mathbb{X}+\mathbb{Y}=k]\cap[\mathbb{X}=i])\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}\mathbf{P}([\mathbb{Y}=k-i]\cap[\mathbb{X}=i])\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}\mathbf{P}([\mathbb{Y}=k-i])\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]) \quad (\textit{ par indépendance })\\
&= \sum_{i=1}^{k-1}\mathbf{P}([\mathbb{Y}=k-i])\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]) \quad (k-i\geqslant 1 \iff i\leqslant k-i)\\
&= \sum_{i=1}^{k-1} q(1-q)^{k-i-1}p(1-p)^{i-1}\\
&= pq\frac{(1-q)^{k-1}}{1-p}\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{i}\\
&= pq\frac{(1-q)^{k-1}}{1-p}\frac{1-p}{1-q}\frac{1-\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{k-1}}{1-\frac{1-p}{1-q}} \qquad \left(p\neq q \textit{ donc } \frac{1-p}{1-q}\neq 1\right)\\
&= pq(1-q)^{k-1}\frac{1-\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{k-1}}{p-q}\\
&= pq\frac{(1-q)^{k-1}-(1-p)^{k-1}}{p-q}.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice IV.4 : [Énoncé]

Comme $\mathbb{X}(\Omega)=[\![1\,;n]\!]$ et $\mathbb{Y}(\Omega)=[\![1\,;n]\!]$, on a $\mathbb{Z}(\Omega)=[\![2\,;2n]\!]$.

Soit $k\in[\![2\,;2n]\!]$.

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à $\mathbb{X}$, c'est-à-dire la famille $([\mathbb{X}=i])_{i\in[\![1;n]\!]}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([\mathbb{X}+\mathbb{Y}=k]) &= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}([\mathbb{X}+\mathbb{Y}=k]\cap[\mathbb{X}=i])\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}([\mathbb{Y}=k-i]\cap[\mathbb{X}=i])\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}([\mathbb{Y}=k-i])\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]) \quad (\textit{ par indépendance })\\
&= \sum_{\substack{1\leqslant k-i\leqslant n\\ 1\leqslant i\leqslant n}}\mathbf{P}([\mathbb{Y}=k-i])\mathbf{P}([\mathbb{X}=i])
\end{aligned}$$

Or, $1\leqslant k-i\leqslant n \iff k-n\leqslant i\leqslant k-1$

D'où,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{X}+\mathbb{Y}=k]) &= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ k-n\leqslant i\leqslant k-1}} \mathbf{P}([\mathbb{Y}=k-i])\mathbf{P}([\mathbb{X}=i])\\ &= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ k-n\leqslant i\leqslant k-1}} \frac{1}{n^2}\\ &= \sum_{i=\max(1,k-n)}^{\min(n,k-1)} \frac{1}{n^2}\\ &= \frac{1}{n^2}(\min(n,k-1)-\max(1,k-n)+1)\end{aligned}$$

On distingue alors deux cas.

Premier cas : $k \geqslant n+1$ **:** *Alors* $\min(n,k-1)=n$ *et* $\max(1,k-n)=k-n$ *puis*

$$\mathbf{P}([\mathbb{X}+\mathbb{Y}=k]) = \frac{1}{n^2}(n-(k-n)+1) = \frac{2n-k+1}{n^2}.$$

Deuxième cas : $k \leqslant n$ **:** *Alors* $\min(n,k-1)=k-1$ *et* $\max(1,k-n)=1$ *puis*

$$\mathbf{P}([\mathbb{X}+\mathbb{Y}=k]) = \frac{1}{n^2}(k-1-1+1) = \frac{k-1}{n^2}.$$

Et on remarque que les deux formules coïncident pour $k=n+1$.

En conclusion,

$$\forall\, k\in[\![2\,;2n]\!]\,,\ \mathbf{P}([\mathbb{X}+\mathbb{Y}=k]) = \begin{cases}\dfrac{2n-k+1}{n^2} & \text{si } k\geqslant n+1\\[2ex] \dfrac{k-1}{n^2} & \text{si } k\leqslant n.\end{cases}$$

Remédiation 26 — Loi de $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$

Exercice IV.1 – (Loi d'une fonction du couple) [Correction p. 479]

Soit $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$\mathbb{X}\backslash\mathbb{Y}$	1	2	3
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
3	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

1. Calculer $\mathbf{P}([\mathbb{X} = \mathbb{Y}])$ et $\mathbf{P}([\mathbb{X} < \mathbb{Y}])$.
2. Déterminer la loi de $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$.

Exercice IV.2 – (Loi de l'égalité de deux lois uniformes) [Correction p. 480]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ et $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Déterminer la loi de $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$.

Correction de l'exercice IV.1 : [Énoncé]

1. *L'événement* $[\mathbb{X} = \mathbb{Y}]$ *est la réunion disjointe de* $[\mathbb{X} = 1] \cap [\mathbb{Y} = 1]$, $[\mathbb{X} = 2] \cap [\mathbb{Y} = 2]$ *et* $[\mathbb{X} = 3] \cap [\mathbb{Y} = 3]$, *donc*
$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = \mathbb{Y}]) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$
De même, $[\mathbb{X} < \mathbb{Y}]$ *correspond aux cases* $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$ *:*
$$\mathbf{P}([\mathbb{X} < \mathbb{Y}]) = \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

2. *On a* $\mathbb{Z}(\Omega) = [\![2, 6]\!]$. *On regroupe les cases du tableau selon la valeur de* $j + k$ *:*

m	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}([\mathbb{Z} = m])$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Par exemple,
$$\mathbf{P}([\mathbb{Z} = 4]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1] \cap [\mathbb{Y} = 3]) + \mathbf{P}([\mathbb{X} = 2] \cap [\mathbb{Y} = 2]) + \mathbf{P}([\mathbb{X} = 3] \cap [\mathbb{Y} = 1]) = 0 + \frac{1}{4} + 0.$$

Méthode
On repère les cases « antidiagonales » du tableau, et on vérifie que la somme vaut 1.

Correction de l'exercice IV.2 : [Énoncé]

On a $\mathbb{X}(\Omega) = [\![1\,;n]\!]$ *et* $\mathbb{Y}(\Omega) = [\![1\,;n]\!]$.

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à $\mathbb{X}$*, c'est-à-dire la famille* $([\mathbb{X}=k])_{k\in[\![1;n]\!]}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([\mathbb{X}=\mathbb{Y}]) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}([\mathbb{X}=\mathbb{Y}]\cap[\mathbb{X}=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}([\mathbb{Y}=k]\cap[\mathbb{X}=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}([\mathbb{Y}=k])\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) \quad (\textit{ par indépendance }) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{n} \\
&= n\times\left(\frac{1}{n}\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Remédiation 27 — Loi d'un min

Méthode 1 – Loi d'un minimum :

Pour déterminer la loi de $\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *dans le cas où* $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *sont* ***indépendantes*** *à valeurs dans* $\mathbb{N}$*, il faudra donc :*

(i) *calculer pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\mathbb{X}>n)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathbf{P}(\mathbb{X}=k)$, *et de même pour* $\mathbf{P}(\mathbb{Y}>n)$ *;*

(ii) *montrer que* $\mathbf{P}(\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})>n)=\mathbf{P}(\mathbb{X}>n)\times\mathbf{P}(\mathbb{Y}>n)$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$*;*

(iii) *conclure en utilisant que pour tout* $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})=n)=\mathbf{P}(\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})>n-1)-\mathbf{P}(\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})>n).$$

Exercice IV.1 – (Loi du minimum de deux variables) [Correction p. 482]

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes, suivant toutes les deux la loi uniforme sur $\{1,2,\dots,n\}$.

On pose $\mathbb{T}=\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

1. Déterminer $\mathbb{T}(\Omega)$.
2. Pour tout $k\in\mathbb{T}(\Omega)$, calculer $\mathbf{P}(\mathbb{T}>k)$.
3. En déduire la loi de $\mathbb{T}$.
4. Vérifier que $\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(\mathbb{T}=k)=1$.

Exercice IV.2 – (Minimum de deux variables géométriques) [Correction p. 482]

Soient p_1 et p_2 deux réels de $]0,1[$. On pose $q_1=1-p_1$ et $q_2=1-p_2$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes, avec $\mathbb{X}\rightsquigarrow\mathcal{G}(p_1)$ et $\mathbb{Y}\rightsquigarrow\mathcal{G}(p_2)$.

On pose $\mathbb{T}=\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

1. Déterminer $\mathbb{T}(\Omega)$.
2. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, calculer $\mathbf{P}(\mathbb{T}>k)$.
3. En déduire la loi de $\mathbb{T}$. La reconnaître.
4. Que devient ce résultat si $p_1=p_2$?

Exercice IV.3 – (Minimum d'une variable uniforme et d'une géométrique) [Correction p. 483]

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in]0,1[$. On pose $q=1-p$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes, avec $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 1\,;n\rrbracket)$ et $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$.

On pose $\mathbb{T} = \min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

1. Déterminer $\mathbb{T}(\Omega)$.
2. Pour tout $k \in \llbracket 0\,;n\rrbracket$, calculer $\mathbf{P}(\mathbb{T} > k)$.
3. En déduire la loi de $\mathbb{T}$.
4. Écrire la loi de $\mathbb{T}$ lorsque $n = 2$ et vérifier que la somme des probabilités vaut 1.

Correction de l'exercice IV.1 : [Énoncé]

1. *$\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ prennent leurs valeurs dans $\{1, 2, \dots, n\}$, donc leur minimum aussi, et toutes ces valeurs sont atteintes (par exemple $\mathbb{T} = k$ si $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = k$).*
   Ainsi $\mathbb{T}(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$.

Méthode
Pour un minimum, passer par $\mathbf{P}(\mathbb{T} > k)$: l'événement $(\min(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) > k)$ est l'intersection $(\mathbb{X} > k) \cap (\mathbb{Y} > k)$, ce qui permet d'utiliser l'indépendance.
On retrouve ensuite la loi par différence :
$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{T} > k-1) - \mathbf{P}(\mathbb{T} > k)$.

2. *Soit $k \in \llbracket 1\,;n\rrbracket$.*
   Le minimum de deux nombres est supérieur à k si et seulement si les deux le sont :
$$(\mathbb{T} > k) = (\mathbb{X} > k) \cap (\mathbb{Y} > k).$$
   Par indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$:
$$\mathbf{P}(\mathbb{T} > k) = \mathbf{P}(\mathbb{X} > k)\,\mathbf{P}(\mathbb{Y} > k).$$
   Or $\mathbb{X}$ suit la loi uniforme, donc
$$\mathbf{P}(\mathbb{X} > k) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=k+1}^{n} [\mathbb{X} = k]\right) = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n-k}{n}.$$
   et de même pour $\mathbb{Y}$.
   Ainsi,
$$\mathbf{P}(\mathbb{T} > k) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^2.$$

3. *Pour $k \in \llbracket 1\,;n\rrbracket$, on a*
$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{T} > k-1) - \mathbf{P}(\mathbb{T} > k).$$
   Ainsi,
$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \frac{(n-k+1)^2 - (n-k)^2}{n^2} = \frac{2(n-k)+1}{n^2} = \frac{2n-2k+1}{n^2}.$$

Piège
Ne pas écrire $\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = k)\,\mathbf{P}(\mathbb{Y} = k)$. L'événement $(\mathbb{T} = k)$ contient aussi les cas où l'une des deux variables vaut k et l'autre est strictement plus grande.

4. *On calcule :*
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbb{T} = k) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1) = \frac{1}{n^2}\left(2n^2 - 2\times\frac{n(n+1)}{2} + n\right)\\ &= \frac{1}{n^2}\times 2n^2 - n^2 - n + n) = \frac{n^2}{n^2}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice IV.2 : [Énoncé]

1. *$\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$, donc leur minimum aussi. De plus, toutes ces valeurs sont atteintes : pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(\mathbb{X} = \mathbb{Y} = k)$ est de probabilité non nulle et il implique $\mathbb{T} = k$.*
   Ainsi $\mathbb{T}(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
2. *Soit $k \in \mathbb{N}$.*

Le minimum de deux nombres est strictement supérieur à k si et seulement si les deux le sont :

$$(\mathbb{T} > k) = (\mathbb{X} > k) \cap (\mathbb{Y} > k).$$

Par indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} > k) = \mathbf{P}(\mathbb{X} > k)\,\mathbf{P}(\mathbb{Y} > k).$$

Or $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p_1)$, donc

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} > k) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=k+1}^{+\infty} [\mathbb{X} = j]\right) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} q_1^{j-1} p_1 = p_1 \frac{q_1^k}{1-q_1} = q_1^k,$$

et de même $\mathbf{P}(\mathbb{Y} > k) = q_2^k$.
Ainsi,

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} > k) = (q_1 q_2)^k.$$

3. *Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) &= \mathbf{P}(\mathbb{T} > k-1) - \mathbf{P}(\mathbb{T} > k)\\ &= (q_1 q_2)^{k-1} - (q_1 q_2)^k\\ &= (q_1 q_2)^{k-1}(1 - q_1 q_2).\end{aligned}$$

Posons $r = 1 - q_1 q_2 = p_1 + p_2 - p_1 p_2$.

On a $r \in]0,1[$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = (1-r)^{k-1} r.$$

À retenir
Le min de deux variables suivant une loi géométrique suit encore une loi géométrique.

On reconnaît la loi géométrique de paramètre r :

$$\mathbb{T} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p_1 + p_2 - p_1 p_2).$$

4. *Si $p_1 = p_2 = p$, alors $q_1 = q_2 = 1 - p$ et $r = 1 - (1-p)^2 = p(2-p)$, donc*

$$\mathbb{T} \rightsquigarrow \mathcal{G}\left(p(2-p)\right).$$

Correction de l'exercice IV.3 : [Énoncé]

1. *$\mathbb{X}$ prend ses valeurs dans $[\![1\,;n]\!]$ et $\mathbb{Y}$ dans $\mathbb{N}^*$, donc $\mathbb{T}$ prend ses valeurs dans $[\![1\,;n]\!]$.*
Toutes ces valeurs sont atteintes : pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, l'événement $(\mathbb{X} = \mathbb{Y} = k)$ est de probabilité non nulle et il implique $\mathbb{T} = k$.
Ainsi $\mathbb{T}(\Omega) = [\![1\,;n]\!]$.

2. *Soit $k \in [\![0\,;n]\!]$.*
Le minimum de deux nombres est strictement supérieur à k si et seulement si les deux le sont :

$$(\mathbb{T} > k) = (\mathbb{X} > k) \cap (\mathbb{Y} > k).$$

Par indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} > k) = \mathbf{P}(\mathbb{X} > k)\,\mathbf{P}(\mathbb{Y} > k).$$

Or $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1\,;n]\!])$, donc

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} > k) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=k+1}^{n} [\mathbb{X} = j]\right) = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n-k}{n}.$$

Et $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$, donc

$$\mathbf{P}(\mathbb{Y} > k) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{j-1} p = p \frac{q^k}{1-q} = q^k.$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} > k) = \frac{n-k}{n}\, q^k.$$

3. *Pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, on a*

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{T} > k-1) - \mathbf{P}(\mathbb{T} > k).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) &= \frac{n-k+1}{n}\, q^{k-1} - \frac{n-k}{n}\, q^k \\ &= \frac{q^{k-1}}{n}\left((n-k+1) - (n-k)(1-p)\right) \\ &= \frac{q^{k-1}}{n}\left(1 + (n-k)p\right).\end{aligned}$$

4. *Pour $n = 2$:*

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = 1) = \frac{1+p}{2}, \qquad \mathbf{P}(\mathbb{T} = 2) = \frac{q}{2} = \frac{1-p}{2}.$$

On vérifie :

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = 1) + \mathbf{P}(\mathbb{T} = 2) = \frac{1+p+1-p}{2} = 1.$$

Remédiation 28 — Loi d'un max

Méthode 1 – Loi d'un maximum :

Pour déterminer la loi de $\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *dans le cas où* $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *sont* ***indépendantes*** *à valeurs dans* $\mathbb{N}$*, il faudra donc :*

(i) *calculer pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\mathbb{X}\leqslant n)=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(\mathbb{X}=k)$, *et de même pour* $\mathbf{P}(\mathbb{Y}>n)$ *;*

(ii) *montrer que* $\mathbf{P}(\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})\leqslant n)=\mathbf{P}(\mathbb{X}\leqslant n)\times\mathbf{P}(\mathbb{Y}\leqslant n)$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$*;*

(iii) *conclure en utilisant que pour tout* $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})=n)=\mathbf{P}(\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})\leqslant n)-\mathbf{P}(\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})\leqslant n-1).$$

Exercice IV.1 – (Maximum de deux variables uniformes) [Correction p. 486]

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes, suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[\![1\,;n]\!]$.

On pose $\mathbb{T}=\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

1. Déterminer $\mathbb{T}(\Omega)$.
2. Pour tout $k\in[\![0\,;n]\!]$, calculer $\mathbf{P}(\mathbb{T}\leqslant k)$.
3. En déduire la loi de $\mathbb{T}$.
4. Vérifier que $\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(\mathbb{T}=k)=1$.

Exercice IV.2 – (Maximum de deux variables géométriques) [Correction p. 486]

Soient p_1 et p_2 deux réels de $]0,1[$. On pose $q_1=1-p_1$ et $q_2=1-p_2$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes, avec $\mathbb{X}\rightsquigarrow\mathcal{G}(p_1)$ et $\mathbb{Y}\rightsquigarrow\mathcal{G}(p_2)$.

On pose $\mathbb{T}=\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

1. Déterminer $\mathbb{T}(\Omega)$.
2. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, calculer $\mathbf{P}(\mathbb{T}\leqslant k)$.
3. En déduire la loi de $\mathbb{T}$.
4. Calculer $\mathbf{P}(\mathbb{T}=1)$ et $\mathbf{P}(\mathbb{T}=2)$ lorsque $p_1=p_2=\dfrac{1}{2}$.

Exercice IV.3 – (Maximum de deux variables uniformes de supports différents) [Correction p. 487]

Soient n et m deux entiers tels que $1 \leqslant n \leqslant m$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes, avec $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 1\,;n\rrbracket)$ et $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 1\,;m\rrbracket)$.

On pose $\mathbb{T} = \max(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

1. Déterminer $\mathbb{T}(\Omega)$.
2. Pour tout $k \in \llbracket 0\,;m\rrbracket$, calculer $\mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k)$. On distinguera les cas $k \leqslant n$ et $k \geqslant n$.
3. En déduire la loi de $\mathbb{T}$.
4. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}(\mathbb{T}=k) = 1$.

Correction de l'exercice IV.1 : [Énoncé]

1. *$\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ prennent leurs valeurs dans $\llbracket 1\,;n\rrbracket$, donc leur maximum aussi, et toutes ces valeurs sont atteintes (par exemple $\mathbb{T}=k$ si $\mathbb{X}=\mathbb{Y}=k$).*
   Ainsi $\mathbb{T}(\Omega) = \llbracket 1\,;n\rrbracket$.

Méthode
Pour un maximum, passer par $\mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k)$: l'événement $(\max(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \leqslant k)$ est l'intersection
$$(\mathbb{X} \leqslant k) \cap (\mathbb{Y} \leqslant k),$$
ce qui permet d'utiliser l'indépendance.
On retrouve ensuite la loi par différence :
$\mathbf{P}(\mathbb{T}=k) = \mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k) - \mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k-1)$.

2. *Soit $k \in \llbracket 0\,;n\rrbracket$.*
   Le maximum de deux nombres est inférieur ou égal à k si et seulement si les deux le sont :
$$(\mathbb{T} \leqslant k) = (\mathbb{X} \leqslant k) \cap (\mathbb{Y} \leqslant k).$$
   Par indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$:
$$\mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k) = \mathbf{P}(\mathbb{X} \leqslant k)\,\mathbf{P}(\mathbb{Y} \leqslant k).$$
   Or $\mathbb{X}$ suit la loi uniforme, donc
$$\mathbf{P}(\mathbb{X} \leqslant k) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{k} [\mathbb{X}=j]\right) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n},$$
   et de même pour $\mathbb{Y}$.
   Ainsi,
$$\mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

3. *Pour $k \in \llbracket 1\,;n\rrbracket$, on a*
$$\mathbf{P}(\mathbb{T}=k) = \mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k) - \mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k-1).$$
   Ainsi,
$$\mathbf{P}(\mathbb{T}=k) = \frac{k^2-(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}.$$

Piège
Ne pas écrire $\mathbf{P}(\mathbb{T}=k) = \mathbf{P}(\mathbb{X}=k)\,\mathbf{P}(\mathbb{Y}=k)$.
L'événement $(\mathbb{T}=k)$ contient aussi les cas où l'une des deux variables vaut k et l'autre est strictement plus petite.

4. *On calcule :*
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbb{T}=k) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{1}{n^2}\left(2\times\frac{n(n+1)}{2} - n\right)\\ &= \frac{n^2+n-n}{n^2} = \frac{n^2}{n^2}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice IV.2 : [Énoncé]

1. *$\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$, donc leur maximum aussi.*
   De plus, toutes ces valeurs sont atteintes : pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(\mathbb{X}=\mathbb{Y}=k)$ est de probabilité non nulle et il implique $\mathbb{T}=k$.

Ainsi $\mathbb{T}(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

2. *Soit* $k \in \mathbb{N}$. *On a* $(\mathbb{T} \leqslant k) = (\mathbb{X} \leqslant k) \cap (\mathbb{Y} \leqslant k)$, *donc par indépendance de* $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k) = \mathbf{P}(\mathbb{X} \leqslant k)\,\mathbf{P}(\mathbb{Y} \leqslant k).$$

Or $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p_1)$, *donc en passant par l'événement contraire :*

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} \leqslant k) = 1 - \mathbf{P}(\mathbb{X} > k) = 1 - \sum_{j=k+1}^{+\infty} q_1^{j-1} p_1 = 1 - p_1 \frac{q_1^k}{1-q_1} = 1 - q_1^k,$$

et de même $\mathbf{P}(\mathbb{Y} \leqslant k) = 1 - q_2^k$.
Ainsi,

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k) = \left(1 - q_1^k\right)\left(1 - q_2^k\right).$$

3. *Pour* $k \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k) - \mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k-1).$$

En développant :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) &= \left(1 - q_1^k - q_2^k + (q_1 q_2)^k\right) - \left(1 - q_1^{k-1} - q_2^{k-1} + (q_1 q_2)^{k-1}\right) \\ &= \left(q_1^{k-1} - q_1^k\right) + \left(q_2^{k-1} - q_2^k\right) - \left((q_1 q_2)^{k-1} - (q_1 q_2)^k\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = q_1^{k-1} p_1 + q_2^{k-1} p_2 - (q_1 q_2)^{k-1}\left(1 - q_1 q_2\right).$$

Remarque
La loi du max de deux lois géométriques n'est pas géométrique.

4. *Si* $p_1 = p_2 = \dfrac{1}{2}$, *alors* $q_1 = q_2 = \dfrac{1}{2}$ *et* $q_1 q_2 = \dfrac{1}{4}$. *Donc*

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4},$$

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{16}.$$

Correction de l'exercice IV.3 : [Énoncé]

1. $\mathbb{X}$ *prend ses valeurs dans* $[\![1\,;n]\!] \subset [\![1\,;m]\!]$ *et* $\mathbb{Y}$ *dans* $[\![1\,;m]\!]$, *donc* $\mathbb{T}$ *prend ses valeurs dans* $[\![1\,;m]\!]$.
Toutes ces valeurs sont atteintes : pour $k \in [\![1\,;m]\!]$, *l'événement* $(\mathbb{X} = 1) \cap (\mathbb{Y} = k)$ *est de probabilité non nulle et il implique* $\mathbb{T} = k$.
Ainsi $\mathbb{T}(\Omega) = [\![1\,;m]\!]$.

2. *Soit* $k \in [\![0\,;m]\!]$. *On a* $(\mathbb{T} \leqslant k) = (\mathbb{X} \leqslant k) \cap (\mathbb{Y} \leqslant k)$, *donc par indépendance :*

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k) = \mathbf{P}(\mathbb{X} \leqslant k)\,\mathbf{P}(\mathbb{Y} \leqslant k).$$

Attention
La valeur de $\mathbf{P}(\mathbb{X} \leqslant k)$ *dépend de la position de* k *par rapport à* n : *pour* $k \geqslant n$, *l'événement* $(\mathbb{X} \leqslant k)$ *est certain.*

Comme $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1\,;m]\!])$, *on a* $\mathbf{P}(\mathbb{Y} \leqslant k) = \dfrac{k}{m}$.

— *Si* $k \in [\![0\,;n]\!]$, *alors* $\mathbf{P}(\mathbb{X} \leqslant k) = \dfrac{k}{n}$, *donc*

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k) = \frac{k}{n} \times \frac{k}{m} = \frac{k^2}{nm}.$$

— *Si* $k \in [\![n\,;m]\!]$, *alors* $\mathbf{P}(\mathbb{X} \leqslant k) = 1$, *donc*

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k) = \frac{k}{m}.$$

Les deux formules coïncident pour $k = n$: *on trouve* $\dfrac{n}{m}$.

Remarque

Si $n = m$, on retrouve la loi de l' exercice (IV.1) *:*

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \frac{2k-1}{n^2}.$$

3. *Pour $k \in [\![1\,;m]\!]$, on a*

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k) - \mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k-1).$$

— *Si $k \in [\![1\,;n]\!]$, alors $k-1 \in [\![0\,;n]\!]$ et*

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \frac{k^2-(k-1)^2}{nm} = \frac{2k-1}{nm}.$$

— *Si $k \in [\![n+1\,;m]\!]$, alors $k-1 \in [\![n\,;m]\!]$ et*

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \frac{k}{m} - \frac{k-1}{m} = \frac{1}{m}.$$

4. *On sépare la somme selon les deux cas :*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}(\mathbb{T} = k) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{nm} + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{m} \\ &= \frac{1}{nm}\left(n(n+1)-n\right) + \frac{m-n}{m} \\ &= \frac{n}{m} + \frac{m-n}{m} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Remédiation 29 Loi d'un produit

Exercice IV.1 – (Produit de deux variables uniformes) [Correction p. 489]

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes, suivant chacune la loi uniforme sur $[\![1\,;3]\!]$. On pose $\mathbb{T} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$.

1. Déterminer $\mathbb{T}(\Omega)$ puis la loi de $\mathbb{T}$.
2. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{T})$ de deux manières différentes.

Exercice IV.2 – (Produit de deux variables de Bernoulli) [Correction p. 489]

Soit $p \in]0,1[$.

1. Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. Déterminer la loi de $\mathbb{X}\mathbb{Y}$.
2. Soient $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ et $\mathbb{Y} = 1 - \mathbb{X}$. Déterminer la loi de $\mathbb{X}\mathbb{Y}$. Comparer $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y})$.

Exercice IV.3 – (Produit d'une Bernoulli et d'une géométrique) [Correction p. 490]

Soient $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.

Soient $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$ indépendantes.

On pose $\mathbb{T} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$.

1. Déterminer la loi de $\mathbb{T}$.
2. Montrer que $\mathbb{T}$ admet une espérance et la calculer.

Correction de l'exercice IV.1 : [Énoncé]

Méthode

Pour la loi d'un produit, on écrit l'événement $[\mathbb{X}\mathbb{Y} = k]$ comme réunion d'événements incompatibles $[\mathbb{X} = i, \mathbb{Y} = j]$ avec $ij = k$, puis on utilise l'indépendance.

1. *$\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{Y}(\Omega) = [\![1\,;3]\!]$, donc $\mathbb{T}(\Omega) = \{1,2,3,4,6,9\}$.*
   Par indépendance, $\mathbf{P}(\mathbb{X} = i, \mathbb{Y} = j) = \frac{1}{9}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;3]\!]^2$. Il suffit de compter les couples (i,j) de produit donné :

k	1	2	3	4	6	9
$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

2. *Par définition :* $\mathbf{E}(\mathbb{T}) = \dfrac{1+4+6+4+12+9}{9} = \dfrac{36}{9} = 4$.
   Par indépendance, $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = 2 \times 2 = 4$.

Correction de l'exercice IV.2 : [Énoncé]

1. *$\mathbb{X}\mathbb{Y}$ prend ses valeurs dans $\{0,1\}$.*
   Un produit de variables à valeurs dans $\{0,1\}$ vaut 1 si et seulement si chaque facteur vaut 1 d'où
   $$\mathbf{P}(\mathbb{X}\mathbb{Y} = 1) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = 1, \mathbb{Y} = 1) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = 1)\mathbf{P}(\mathbb{Y} = 1) = p^2.$$

Ainsi $\mathbb{X}\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{B}(p^2)$.

2. $\mathbb{X}(1-\mathbb{X}) = 0$ *car* $\mathbb{X} \in \{0,1\}$ *(*$\mathbb{X}^2 = \mathbb{X}$*).*
Donc $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ *est certaine égale à* 0 *et* $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = 0$.
Mais $\mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = p(1-p) > 0$. *C'est tout à fait normal.*

Piège
$\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y})$ *n'est vrai qu'en cas d'indépendance (ou de non-corrélation).*
Ici $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *sont dépendantes, et*
$\mathrm{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = -p(1-p) \neq 0$.

Correction de l'exercice IV.3 : [Énoncé]

1. $\mathbb{X}(\Omega) = \{0,1\}$ *et* $\mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ *donc* $\mathbb{T}(\Omega) = \mathbb{N}$.

   a. $[\mathbb{T}=0] = [\mathbb{X}=0]$ *car* $\mathbb{Y} \geqslant 1$, *donc* $\mathbf{P}(\mathbb{T}=0) = \dfrac{1}{2}$.

   b. *Pour* $k \in \mathbb{N}^*$: $[\mathbb{T}=k] = [\mathbb{X}=1] \cap [\mathbb{Y}=k]$, *donc par indépendance* $\mathbf{P}(\mathbb{T}=k) = \dfrac{1}{2}\, p\, q^{k-1}$.

   Vérification : $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$.

2. *Par indépendance et existence des espérances de* $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *:*

$$\mathbf{E}(\mathbb{T}) = \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{p} = \frac{1}{2p}.$$

Méthode
Quand un facteur peut s'annuler, séparer le cas $[\mathbb{T}=0]$ *des valeurs* $k \geqslant 1$.

TD 6 Couple de variables aléatoires discrètes

Exercice IV.1 – (Loi d'un couple, lois marginales) [Correction p. 495]

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 0,3 \rrbracket)$ et $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{3}\right)$.

1. Déterminer la loi du couple $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.
2. Donner l'espérance et la variance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.

Exercice IV.2 – (Loi d'un couple, lois marginales, indépendance) [Correction p. 495]

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires telles que $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^2$.

La loi de $\mathbb{X}$ est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	-1	0	1	2
$\mathbf{P}([\mathbb{X} = x_i])$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

.

1. Donner la loi du couple $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ puis la loi de $\mathbb{Y}$.
2. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice IV.3 – (Loi d'un couple, lois marginales, indépendance) [Correction p. 496]

La loi conjointe du couple $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ est donnée par :

$\mathbb{X}$ \ $\mathbb{Y}$	0	1	2
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. Vérifier que l'on a bien défini la loi d'un couple, puis déterminer les lois marginales.
2. Les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$.

Exercice IV.4 – (Loi d'une variable aléatoire définie à partir d'un couple) [Correction p. 497]

On considère la loi conjointe du couple $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ de l'exercice précédent.

Déterminer la loi de :

1. $\mathbb{Z}_1 = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$
2. $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{X}\mathbb{Y}$
3. $\mathbb{Z}_3 = \text{Max}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$
4. $\mathbb{Z}_4 = \text{Min}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Exercice IV.5 – (Loi d'un couple, lois marginales, indépendance) [Correction p. 498]

1. Un dé B porte les nombres $-2, -1, 0, 1, 2, 3$. Ce dé n'est pas équilibré.

   Les probabilités d'apparition de chaque face forment une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   Quelles sont ces probabilités ?

Un dé A parfaitement équilibré porte les nombres 1 sur 4 faces et -2 sur les autres faces.

Soit $\mathbb{X}$ la variable aléatoire qui à un lancer du dé A associe le nombre obtenu.

On lance une fois simultanément les deux dés A et B et on désigne par $\mathbb{S}$ la variable aléatoire qui au lancer des deux dés associe la valeur absolue de la somme des nombres obtenus.

2. a. Déterminer la loi du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{S})$.

   b. Quelle est la loi marginale de $\mathbb{S}$?

   c. $\mathbb{X}$ et $\mathbb{S}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice IV.6 – (Loi d'un couple, lois marginales, tirage sans remise) [Correction p. 499]

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne contient une boule blanche, une boule verte et $n-2$ boules rouges numérotées de 1 à $n-2$. Ces boules sont indiscernables au toucher.

On tire successivement et sans remise les N boules de l'urne.

On note $\mathbb{X}_1$ la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule blanche et $\mathbb{X}_2$ la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule verte.

1. $\forall\,(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, montrer que $\mathbf{P}\left([\mathbb{X}_1 = i] \cap [\mathbb{X}_2 = j]\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(n-1)} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$
2. Déterminer les lois marginales des variables aléatoires $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$.

Exercice IV.7 – (Famille définissant un loi conjointe) [Correction p. 500]

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi jointe :

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = \frac{a}{2^{i+1} j!}.$$

1. Déterminer le réel a.
2. a. Montrer que $\mathbb{X} + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

   b. En déduire l'espérance et la variance de $\mathbb{X}$.
3. a. Déterminer la loi de $\mathbb{Y}$.

   b. Déterminer l'espérance et la variance de $\mathbb{Y}$.

4. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $\mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y})$.

Exercice IV.8 – (Loi d'une somme) [Correction p. 501]

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n.

On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac.

On note $\mathbb{T}_1$ le numéro du premier jeton tiré et $\mathbb{T}_2$ le numéro du deuxième jeton tiré.

1. Déterminer la loi de $\mathbb{T}_1$.
2. Déterminer la loi du couple $(\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2)$.
3. En déduire la loi de $\mathbb{T}_2$.
4. Les variables aléatoires $\mathbb{T}_1$ et $\mathbb{T}_2$ sont-elles indépendantes ?
5. Déterminer $\mathbf{E}(\mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_2)$.

Exercice IV.9 – (Loi d'un min et d'un max) [Correction p. 502]

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on tire au hasard deux boules, avec remise dans cette urne.

On note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire égale au numéro de la première boule et $\mathbb{Y}$ la variable aléatoire au numéro de la deuxième boule.

1. Justifier que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes.
2. On pose $\mathbb{S} = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Déterminer $\mathbf{P}([\mathbb{S} \leqslant k])$ puis donner la loi de $\mathbb{S}$.
3. On pose $\mathbb{T} = \min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Déterminer $\mathbf{P}([\mathbb{T} > k])$ puis donner la loi de $\mathbb{T}$.

Exercice IV.10 – (Loi d'un produit) [Correction p. 503]

On considère $\mathbb{B}$ et $\mathbb{G}$ deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et une loi géométrique $\mathcal{G}(p')$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\mathbb{B}\mathbb{G}$.
2. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{B}\mathbb{G})$.

Exercice IV.11 [Correction p. 503]

Soient $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ et $\mathbb{Z}$ trois variables aléatoires discrètes.

Vrai ou faux ?

1. Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes, et si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Z}$ sont indépendantes, alors $\mathbb{X}$ est indépendante de $(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$.
2. Si $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et $\mathbb{Z}$ sont indépendantes, alors $\mathbb{Y}$ est indépendante de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{X}$ est indépendante de $\mathbb{Z}$.
3. Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes et $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est indépendante de $\mathbb{Z}$, alors $\mathbb{X}$ est indépendante de $(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$.

Exercice IV.12 – (Loi conditionnelle) [Correction p. 504]

On considère deux variables aléatoires $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre $p \in]0\,;1[$.

1. Donner la loi de $\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2$.
2. Déterminer la loi conditionnelle de $\mathbb{X}_1$ sachant que l'évènement $(\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 = n)$ est réalisé.

Exercice IV.13 – (Maximum de deux boules tirées sans remise) [Correction p. 505]

Soit $n \geqslant 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire simultanément deux boules de l'urne, et on note $\mathbb{T}$ le plus grand des deux numéros obtenus.

1. Déterminer $\mathbb{T}(\Omega)$.
2. Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, calculer $\mathbf{P}(\mathbb{T} \leqslant k)$.
3. En déduire la loi de $\mathbb{T}$.
4. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = 1$.

Corrigés

Correction de l'exercice IV.1 : [Énoncé]

1. *On a déjà* $\mathbb{X}(\Omega) = [\![0\,;3]\!]$ *et* $\mathbb{Y}(\Omega) = \{0;1\}$.
Les lois de $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *sont connues :*

$\mathbb{X}$	0	1	2	3
$\mathbf{P}([\mathbb{X}=x])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\mathbb{Y}$	0	1
$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=y])$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Par indépendance, $\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)$,

$$\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}=x])\times\mathbf{P}([\mathbb{Y}=y]).$$

On en déduit la loi conjointe de $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *:*

$\mathbb{Y}$ \ $\mathbb{X}$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

2. *Sur des lois connues, on sait que*

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{(3-0)(3-0+2)}{12} = \frac{5}{4}.$$
$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}.$$

Correction de l'exercice IV.2 : [Énoncé]

1. *On a* $\mathbb{X}(\Omega) = \{-2;-1;0;1;2\}$ *et* $\mathbb{Y}(\Omega) = \{0;1;4\}$. *Remarquons déjà que*

$$[\mathbb{X}=-2]\cap[\mathbb{Y}=0] = [\mathbb{X}=-2]\cap[\mathbb{Y}=1] = \varnothing = [\mathbb{X}=0]\cap[\mathbb{Y}=1] = [\mathbb{X}=0]\cap[\mathbb{Y}=4] = \varnothing.$$

$$[\mathbb{X}=1]\cap[\mathbb{Y}=0] = [\mathbb{X}=1]\cap[\mathbb{Y}=4] = [\mathbb{X}=2]\cap[\mathbb{Y}=0] = [\mathbb{X}=2]\cap[\mathbb{Y}=1] = \varnothing.$$

Les probabilités afférentes seront donc nulles.
Pour les autres,

— $\mathbf{P}([\mathbb{X}=-2]\cap[\mathbb{Y}=4]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}=-2] = \frac{1}{6}$.

— $\mathbf{P}([\mathbb{X}=-1]\cap[\mathbb{Y}=1]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}=-1] = \frac{1}{4}$.

— $\mathbf{P}([\mathbb{X}=0]\cap[\mathbb{Y}=0]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}=0] = \frac{1}{6}$.

— $\mathbf{P}([\mathbb{X}=1]\cap[\mathbb{Y}=1]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}=1] = \frac{1}{4}$.

— $\mathbf{P}([\mathbb{X}=2]\cap[\mathbb{Y}=4]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}=2] = \frac{1}{6}$.

Ce que l'on résume dans le tableau ci-dessous :

$\mathbb{X}$ \ $\mathbb{Y}$	0	1	4
-2	0	0	$\frac{1}{6}$
-1	0	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{6}$	0	0
1	0	$\frac{1}{4}$	0
2	0	0	$\frac{1}{6}$
$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=y])$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

2. *Par exemple,* $\mathbf{P}([\mathbb{X}=-2]\cap[\mathbb{Y}=0])=0\neq\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\mathbf{P}([\mathbb{X}=-2])\mathbf{P}([\mathbb{Y}=0])$ *donc les variables* $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *ne sont pas indépendantes.*

Correction de l'exercice IV.3 : [Énoncé]

1. *Toutes les valeurs dans le tableau sont positifs et leur somme fait* 1 *donc on a bien défini la loi d'un couple de variables aléatoires.*

   D'après la loi des probabilités totales on trouve rapidement les lois marginales :

$$\forall\, x\in[\![0\,;1]\!]\,,\ \mathbf{P}([\mathbb{X}=x])=\sum_{y\in[\![0;2]\!]}\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y]),$$

   et

$$\forall\, y\in[\![0\,;2]\!]\,,\ \mathbf{P}([\mathbb{Y}=y])=\sum_{x\in[\![0;1]\!]}\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y]).$$

   Ce que l'on résume dans deux tableaux :

$\mathbb{X}$	0	1
$\mathbf{P}([\mathbb{X}=x])$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$

Loi de $\mathbb{X}$

$\mathbb{Y}$	0	1	2
$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=y])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Loi de $\mathbb{Y}$

Idée
$\mathbb{X}\rightsquigarrow\mathcal{B}\left(\frac{7}{10}\right)$.

Remarque : *Histoire de redonner son sens au terme « marginal », on peut aussi présenter ces probabilités à la « marge » du tableau précédent :*

$\mathbb{X}$ \ $\mathbb{Y}$	0	1	2	$\mathbf{P}([\mathbb{X}=x])$
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{10}$
$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=y])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

2. *Comme* $\mathbf{P}([\mathbb{X}=0]\cap[\mathbb{Y}=0])=\frac{1}{20}\neq\frac{1}{10}=\mathbf{P}([\mathbb{X}=0])\times\mathbf{P}([\mathbb{Y}=0])$, *les variables* $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *ne sont pas indépendantes.*

3. $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ prenant un nombre fini de valeurs, elles admettent une espérance et on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbb{X}) &= \sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)} x\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]) \\ &= 0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{7}{10}=\frac{7}{10}.\\ \mathbf{E}(\mathbb{Y}) &= \sum_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)} y\,\mathbf{P}([\mathbb{Y}=y]) \\ &= 0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.\end{aligned}$$

Remarque

On retrouve l'espérance d'une loi de Bernoulli pour $\mathbb{X}$.

Correction de l'exercice IV.4 : [Énoncé]

1. $\mathbb{Z}_1(\Omega)=\{0,1,2,3\}$.

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}([\mathbb{Z}_1=0])=\mathbf{P}([\mathbb{X}=0]\cap[\mathbb{Y}=0])=\frac{1}{20}\\ &\mathbf{P}([\mathbb{Z}_1=1])=\mathbf{P}([\mathbb{X}=0]\cap[\mathbb{Y}=1])+\mathbf{P}([\mathbb{X}=1]\cap[\mathbb{Y}=0])=\frac{1}{4}+\frac{17}{60}=\frac{8}{15}\\ &\mathbf{P}([\mathbb{Z}_1=2])=\mathbf{P}([\mathbb{X}=0]\cap[\mathbb{Y}=2])+\mathbf{P}([\mathbb{X}=1]\cap[\mathbb{Y}=1])=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\\ &\mathbf{P}([\mathbb{Z}_1=3])=\mathbf{P}([\mathbb{X}=1]\cap[\mathbb{Y}=2])=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Ainsi,

z	0	1	2	3
$\mathbf{P}([\mathbb{Z}_1=z])$	$\frac{1}{20}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

2. $\mathbb{Z}_2(\Omega)=\{0,1,2\}$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{Z}_2=0]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X}=0]\cap[\mathbb{Y}=0])+\mathbf{P}([\mathbb{X}=0]\cap[\mathbb{Y}=1])+\\ &\qquad \mathbf{P}([\mathbb{X}=0]\cap[\mathbb{Y}=2])+\mathbf{P}([\mathbb{X}=1]\cap[\mathbb{Y}=0])\\ &= \frac{1}{20}+\frac{1}{4}+0+\frac{17}{60}=\frac{7}{12}\\ \mathbf{P}([\mathbb{Z}_2=1]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X}=1]\cap[\mathbb{Y}=1])=\frac{1}{4}\\ \mathbf{P}([\mathbb{Z}_2=2]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X}=1]\cap[\mathbb{Y}=2])=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Ainsi,

z	0	1	2
$\mathbf{P}([\mathbb{Z}_2=z])$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

3. $\mathbb{Z}_3(\Omega)=\{0,1,2\}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{Z}_3=0]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X}=0]\cap[\mathbb{Y}=0])=\frac{1}{20}\\ \mathbf{P}([\mathbb{Z}_3=1]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X}=0]\cap[\mathbb{Y}=1])+\mathbf{P}([\mathbb{X}=1]\cap[\mathbb{Y}=0])+\mathbf{P}([\mathbb{X}=1]\cap[\mathbb{Y}=1])\\ &= \frac{1}{4}+\frac{17}{60}+\frac{1}{4}=\frac{47}{60}\\ \mathbf{P}([\mathbb{Z}_3=2]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X}=0]\cap[\mathbb{Y}=2])+\mathbf{P}([\mathbb{X}=1]\cap[\mathbb{Y}=2])\\ &= 0+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Ainsi,

z	0	1	2
$\mathbf{P}([\mathbb{Z}_3=z])$	$\frac{1}{20}$	$\frac{47}{60}$	$\frac{1}{6}$

4. $\mathbb{Z}_4(\Omega) = \{0, 1\}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{Z}_4 = 1]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1] \cap [\mathbb{Y} = 1]) + \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1] \cap [\mathbb{Y} = 2]) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

Par complémentarité,

$$\mathbf{P}([\mathbb{Z}_4 = 0]) = 1 - \mathbf{P}([\mathbb{Z}_4 = 1]) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}.$$

Ainsi,

z	*0*	*1*
$\mathbf{P}([\mathbb{Z}_4 = z])$	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$

Correction de l'exercice IV.5 : [ÉNONCÉ]

1. *Soit $a \in \mathbb{R}$. Notons $\mathbb{Y}$ le nombre obtenu à partir du dé B. La loi de $\mathbb{Y}$ est*

k	-2	-1	0	1	2	3	*Total*
$\mathbf{P}([\mathbb{Y} = k])$	a	$a\frac{1}{2}$	$a\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$a\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$a\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$a\left(\frac{1}{2}\right)^5$	1

La somme des probabilités devant faire 1, on a :

$$\sum_{k=0}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k a = 1 \iff a\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}} = 1 \iff a \times \frac{63}{32} = 1$$
$$\iff a = \frac{32}{63}.$$

Conclusion,

k	-2	-1	0	1	2	3
$\mathbf{P}([\mathbb{Y} = k])$	$\frac{32}{63}$	$\frac{16}{63}$	$\frac{8}{63}$	$\frac{4}{63}$	$\frac{2}{63}$	$\frac{1}{63}$

2. a. $\mathbb{X}(\Omega) = \{-2; 1\}$. *Dénombrons les valeurs de $\mathbb{S}$.*

$\mathbb{X}$ \ $\mathbb{Y}$	-2	-1	0	1	2	3
-2	4	3	2	1	0	1
1	1	0	1	2	3	4

Donc $\mathbb{S}(\Omega) = [\![0\,;4]\!]$.

Par indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$, on en déduit la loi de $(\mathbb{X}, \mathbb{S})$:

— $\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{X} = -2] \cap [\mathbb{S} = 0]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X} = -2] \cap [\mathbb{Y} = 2]) \\ &= \mathbf{P}([\mathbb{X} = -2])\mathbf{P}([\mathbb{Y} = 2]) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{63}\end{aligned}$

$$\frac{2}{189}.$$

— $\mathbf{P}([\mathbb{X}=-2]\cap[\mathbb{S}=1]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}=-2]\cap[\mathbb{Y}=1]) + \mathbf{P}([\mathbb{X}=-2]\cap[\mathbb{Y}=3])$
$= \mathbf{P}([\mathbb{X}=-2])\mathbf{P}([\mathbb{Y}=1]) + \mathbf{P}([\mathbb{X}=-2])\mathbf{P}([\mathbb{Y}=3])$
$= \frac{1}{3}\times\frac{4}{63} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{63}$
$= \frac{5}{189}.$

— ...

On résume tous ces calculs dans un tableau :

$\mathbb{X}$ \ $\mathbb{S}$	0	1	2	3	4
-2	$\frac{2}{189}$	$\frac{5}{189}$	$\frac{8}{189}$	$\frac{16}{189}$	$\frac{32}{189}$
1	$\frac{32}{189}$	$\frac{80}{189}$	$\frac{8}{189}$	$\frac{4}{189}$	$\frac{2}{189}$

b. *D'après la loi des probabilités totales,* $\forall\, s\in[\![0\,;4]\!]$, *on a :*

$$\mathbf{P}([\mathbb{S}=s]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}=-2]\cap[\mathbb{S}=s]) + \mathbf{P}([\mathbb{X}=1]\cap[\mathbb{S}=s]).$$

Ce qui s'écrit :

$\mathbb{S}$	0	1	2	3	4
$\mathbf{P}([\mathbb{S}=s])$	$\frac{34}{189}$	$\frac{85}{189}$	$\frac{16}{189}$	$\frac{20}{189}$	$\frac{34}{189}$

c. *Considérons l'événement* $[\mathbb{X}=-2]\cap[\mathbb{S}=0]$. *On a :*

$$\mathbf{P}([\mathbb{X}=-2]\cap[\mathbb{S}=0]) = \frac{2}{189} = \frac{6}{567} \neq \frac{34}{567} = \frac{1}{3}\times\frac{34}{189} = \mathbf{P}([\mathbb{X}=-2])\mathbf{P}([\mathbb{S}=0]).$$

Les variables $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{S}$ *ne sont pas indépendantes.*

Correction de l'exercice IV.6 : [Énoncé]

1. *Soient* $i,j\in[\![1\,;n]\!]$.

— *Si* $i=j$, *la boule blanche et la boule verte ne peuvent pas être tirées au même rang. Ainsi,*

$$\mathbf{P}\left([\mathbb{X}_1=i]\cap[\mathbb{X}_2=j]\right)=0.$$

— *Supposons maintenant que* $i\neq j$.

Les $n!$ *ordres possibles de tirage des* n *boules sont équiprobables.*

Pour que l'événement $[\mathbb{X}_1=i]\cap[\mathbb{X}_2=j]$ *soit réalisé, il suffit de fixer la boule blanche au rang* i *et la boule verte au rang* j.

Les $n-2$ *boules rouges peuvent alors être disposées arbitrairement sur les* $n-2$ *positions restantes.*

Il y a donc $(n-2)!$ *tirages favorables.*

Par conséquent,

$$\mathbf{P}\left([\mathbb{X}_1=i]\cap[\mathbb{X}_2=j]\right)=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)}.$$

Finalement,

$$\mathbf{P}\left([\mathbb{X}_1=i]\cap[\mathbb{X}_2=j]\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{n(n-1)} & \text{si } i\neq j,\\ 0 & \text{si } i=j.\end{cases}$$

2. *Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$.*
En utilisant la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{X}_1 = i]) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\left([\mathbb{X}_1 = i] \cap [\mathbb{X}_2 = j]\right) \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{n(n-1)} \\ &= (n-1) \times \frac{1}{n(n-1)}.\end{aligned}$$

Le même raisonnement conduit à

$$\forall\, j \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \mathbf{P}([\mathbb{X}_2 = j]) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left([\mathbb{X}_1 = i] \cap [\mathbb{X}_2 = j]\right) = \frac{1}{n}.$$

Les variables aléatoires $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ suivent donc toutes deux la loi uniforme sur $[\![1\,;n]\!]$.

Correction de l'exercice IV.7 : [Énoncé]

1. *La somme de toutes les probabilités doit être égale à 1. On écrit donc*

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = 1$$

En remplaçant par l'expression donnée,

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a}{2^{i+1} j!} = 1$$

Comme tous les termes sont positifs, on peut séparer les deux sommes :

$$\begin{aligned} a\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+1}}\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}\right) &= 1 \\ \underbrace{a\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)}_{=1} \times e &= 1 \\ ae &= 1 \\ a &= \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

2. a. $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}$ $(\mathbb{X}+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
D'après la loi des probabilités totales, avec le sce $([\mathbb{Y} = j])_{j\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned}\forall\, i \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(\mathbb{X}+1 = i) &= \mathbf{P}(\mathbb{X} = i-1) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{X} = i-1] \cap [\mathbb{Y} = j]) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{e\, 2^i\, j!} = \frac{1}{e\, 2^i} \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}}_{=e} \\ &= \frac{1}{2^i}.\end{aligned}$$

On reconnaît une loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $p = \frac{1}{2}$.

b. *On en déduit que $\mathbf{E}(\mathbb{X}+1) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ puis, par linéarité, $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 2 - 1 = 1$.*

De même, $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}+1) = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2.$

3. a. *De même,* $\mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}$ *et, à travers le sce* $([\mathbb{X}=i])_{i\in\mathbb{N}}$*, on a :*

$$\begin{aligned}\forall\, j\in\mathbb{N},\ \mathbf{P}(\mathbb{Y}=j) &= \sum_{i=0}^{+\infty}\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j])\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{e\,2^{i+1}j!} = \frac{1}{e\,j!}\underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{i+1}}}_{=1}\\ &= \frac{1}{e\,j!}.\end{aligned}$$

On reconnaît une loi de Poisson de paramètre 1*.*

b. *Comme* $\mathbb{Y}\rightsquigarrow\mathcal{P}(1)$*, on a* $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = 1$*.*

4. *Soient* $i,j\in\mathbb{N}$*. On a :*

$$\mathbf{P}(\mathbb{X}=i)\mathbf{P}(\mathbb{Y}=j) = \frac{1}{2^{i+1}}\times\frac{1}{e\,j!} = \frac{1}{e\,2^{i+1}j!} = \mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j]).$$

Par conséquent, $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *sont indépendantes.*

5. *On remarque que* $[\mathbb{X}=\mathbb{Y}] = \bigcup_{i=0}^{+\infty}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=i])$*, réunion dont les événements sont incompatibles.*
On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{X}=\mathbb{Y}]) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=i]\right) = \sum_{i=0}^{+\infty}\mathbf{P}\left([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=i]\right)\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{e^{-1}}{2^{i+1}i!} = \frac{e^{-1}}{2}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^i}{i!}\\ &= \frac{e^{-1}}{2}\times e^{\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{e}}\end{aligned}$$

Remarque
On reconnaît une somme exponentielle.

Correction de l'exercice IV.8 : [Énoncé]

1. *Lors du premier tirage, chacun des* n *jetons a la même probabilité d'être obtenu.*
Ainsi, pour tout $i\in[\![1\,;n]\!]$*,* $\mathbf{P}(\mathbb{T}_1=i) = \dfrac{1}{n}$*.*
La variable aléatoire $\mathbb{T}_1$ *suit donc la loi uniforme sur* $[\![1\,;n]\!]$*.*

2. *Considérons deux entiers* $i,j\in[\![1\,;n]\!]$*.*

— *Si* $i=j$*, il est impossible d'obtenir deux fois le même jeton puisque le tirage est sans remise.*
Donc, $\mathbf{P}(\mathbb{T}_1=i,\mathbb{T}_2=i) = 0$*.*

— *Si* $i\neq j$*, on utilise la formule des probabilités composées :*

$$\mathbf{P}([\mathbb{T}_1=i]\cap[\mathbb{T}_2=j]) = \mathbf{P}([\mathbb{T}_1=i])\mathbf{P}_{[\mathbb{T}_1=i]}([\mathbb{T}_2=j]).$$

Or, $\mathbf{P}([\mathbb{T}_1=i]) = \dfrac{1}{n}$ *et, une fois le jeton* i *retiré, il reste* $n-1$ *jetons, tous équiprobables :*

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{T}_1=i]}([\mathbb{T}_2=j]) = \frac{1}{n-1}.$$

Par conséquent, $\mathbf{P}([\mathbb{T}_1 = i] \cap [\mathbb{T}_2 = j]) = \dfrac{1}{n(n-1)}$.

Conclusion,

$$\mathbf{P}([\mathbb{T}_1 = i] \cap [\mathbb{T}_2 = j]) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(n-1)} & \text{si } i \neq j, \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

3. $\mathbb{T}_2(\Omega) = \mathbb{N}$ *et, d'après la loi des probabilités totales :*

$$\begin{aligned} \forall\, j \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \mathbf{P}([\mathbb{T}_2 = j]) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}([\mathbb{T}_1 = i] \cap [\mathbb{T}_2 = j]) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{1}{n(n-1)} \\ &= (n-1) \times \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

La variable $\mathbb{T}_2$ *suit également la loi uniforme sur* $[\![1\,;n]\!]$.

4. *Soit* $i \in [\![1\,;n]\!]$. *On a :*

$$\mathbf{P}([\mathbb{T}_1 = i] \cap [\mathbb{T}_2 = i]) = 0 \neq \mathbf{P}([\mathbb{T}_1 = i])\mathbf{P}([\mathbb{T}_2 = i]) = \frac{1}{n^2} > 0.$$

Les variables $\mathbb{T}_1$ *et* $\mathbb{T}_2$ *ne sont pas indépendantes.*

5. *Par linéarité de l'espérance avec deux lois suivant la loi uniforme sur* $[\![1\,;n]\!]$, *on a :*

$$\mathbf{E}(\mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_2) = \mathbf{E}(\mathbb{T}_1) + \mathbf{E}(\mathbb{T}_2) = \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} = n+1.$$

Remarque

Le résultat est naturel : connaître le premier tirage modifie les probabilités du second puisque le tirage est effectué sans remise.

Correction de l'exercice IV.9 : [Énoncé]

1. *Comme le deuxième tirage est effectué avec remise, il n'est pas influencé par le premier. Ainsi,* $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *sont indépendantes.*

2. *Tout d'abord* $\mathbb{S}(\Omega) = \mathbb{N}$ *puis, pour tout* $k \in [\![1\,;n]\!]$, $[\mathbb{S} \leqslant k] = [\mathbb{X} \leqslant k] \cap [\mathbb{Y} \leqslant k]$.
Comme $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *sont indépendantes,* $\mathbf{P}([\mathbb{S} \leqslant k]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} \leqslant k])\,\mathbf{P}([\mathbb{Y} \leqslant k])$.
Or, parmi les n *valeurs possibles de* $\mathbb{X}$ *ou de* $\mathbb{Y}$, *exactement* k *sont inférieures ou égales à* k.
Ainsi,

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} \leqslant k]) = \frac{k}{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([\mathbb{Y} \leqslant k]) = \frac{k}{n}.$$

On en déduit

$$\mathbf{P}([\mathbb{S} \leqslant k]) = \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

Pour obtenir la loi de $\mathbb{S}$, *il suffit de remarquer que* $[\mathbb{S} = k] = [\mathbb{S} \leqslant k] \setminus [\mathbb{S} \leqslant k-1]$.
D'où,

$$\begin{aligned} \forall\, k \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \mathbf{P}([\mathbb{S} = k]) &= \mathbf{P}([\mathbb{S} \leqslant k]) - \mathbf{P}([\mathbb{S} \leqslant k-1]) \\ &= \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} \\ &= \frac{2k-1}{n^2}. \end{aligned}$$

3. *Le raisonnement est identique :*
Tout d'abord $\mathbb{T}(\Omega) = \mathbb{N}$.
Puis, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $[\mathbb{T} > k] = [\mathbb{X} > k] \cap [\mathbb{Y} > k]$.
Comme $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *sont indépendantes,* $\mathbf{P}([\mathbb{T} > k]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} > k])\,\mathbf{P}([\mathbb{Y} > k])$.

Parmi les n valeurs possibles de $\mathbb{X}$ ou $\mathbb{Y}$, il y en a $n-k$ qui sont strictement supérieures à k. Ainsi,

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} > k]) = \mathbf{P}([\mathbb{Y} > k]) = \frac{n-k}{n}.$$

Par conséquent, $\mathbf{P}([\mathbb{T} > k]) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^2$.

Pour obtenir la loi de $\mathbb{T}$, on remarque que $[\mathbb{T} = k] = [\mathbb{T} > k-1] \setminus [\mathbb{T} > k]$.
D'où,

$$\begin{aligned}\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \mathbf{P}([\mathbb{T} = k]) &= \mathbf{P}([\mathbb{T} > k-1]) - \mathbf{P}([\mathbb{T} > k]) \\ &= \frac{(n-k+1)^2 - (n-k)^2}{n^2} \\ &= \frac{2(n-k)+1}{n^2}.\end{aligned}$$

Rappel
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Correction de l'exercice IV.10 : [Énoncé]

1. *Comme $\mathbb{B}$ suit un loi de Bernoulli, $\mathbb{B}(\Omega) = \{0,1\}$ et $(\mathbb{B}\mathbb{G})(\Omega) = \mathbb{N}$.*

   — *Comme $\mathbb{G} \geqslant 1$, $[\mathbb{B}\mathbb{G} = 0] = [\mathbb{B} = 0]$ puis*

   $$\mathbf{P}([\mathbb{B}\mathbb{G} = 0]) = 1 - p.$$

   — *Soit $k \in \mathbb{N}^*$.Il est clair que $[\mathbb{B}\mathbb{G} = k] = [\mathbb{B} = 1] \cap [\mathbb{G} = k]$.*
   Les variables aléatoires $\mathbb{B}$ et $\mathbb{G}$ étant indépendantes, on obtient :

   $$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{B}\mathbb{G} = k]) &= \mathbf{P}([\mathbb{B} = 1] \cap [\mathbb{G} = k]) \\ &= \mathbf{P}([\mathbb{B} = 1])\mathbf{P}([\mathbb{G} = k]) \\ &= p\,p'(1-p')^{k-1}.\end{aligned}$$

   Finalement,

   $$\begin{cases} \mathbf{P}([\mathbb{B}\mathbb{G} = 0]) = 1 - p, \\ \forall\, k \geqslant 1, \quad \mathbf{P}([\mathbb{B}\mathbb{G} = k]) = p\,p'(1-p')^{k-1}. \end{cases}$$

2. *Les variables aléatoires $\mathbb{B}$ et $\mathbb{G}$ étant indépendantes,*

   $$\mathbf{E}(\mathbb{B}\mathbb{G}) = \mathbf{E}(\mathbb{B})\mathbf{E}(\mathbb{G}) = p \times \frac{1}{p'} = \frac{p}{p'}.$$

   Remarque : *On pouvait également calculer cette espérance à la main à l'aide de la série géométrique dérivée :*

   $$\mathbf{E}(\mathbb{B}\mathbb{G}) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\,\mathbf{P}([\mathbb{B}\mathbb{G} = k]) = pp' \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p')^{k-1} = \frac{pp'}{(p')^2} = \frac{p}{p'}.$$

Rappel
$\forall\ |x| < 1$,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Correction de l'exercice IV.11 : [Énoncé]

1. ***Faux.***
   Il suffit de construire un contre-exemple.
   Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes telles que

   $$\mathbf{P}([\mathbb{X} = -1]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1]) = \mathbf{P}([\mathbb{Y} = -1]) = \mathbf{P}([\mathbb{Y} = 1]) = \frac{1}{2}.$$

   Posons $\mathbb{Z} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$.
   La loi conjointe du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Z})$ est donnée par le tableau ci-dessous :

$\mathbb{X}$ \ $\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}=-1$	$\mathbb{Z}=1$
$\mathbb{X}=-1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\mathbb{X}=1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Ainsi, pour tous $i,j\in\{-1,1\}$, $\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Z}=j])=\frac{1}{4}=\mathbf{P}([\mathbb{X}=i])\,\mathbf{P}([\mathbb{Z}=j])$.

Donc $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Z}$ *sont indépendantes.*

En revanche, $\mathbf{P}([\mathbb{X}=1]\cap[\mathbb{Y}=1]\cap[\mathbb{Z}=1])=\frac{1}{4}$, *alors que*

$$\mathbf{P}([\mathbb{X}=1])\,\mathbf{P}([\mathbb{Y}=1]\cap[\mathbb{Z}=1])=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.$$

Donc, $\mathbf{P}([\mathbb{X}=1]\cap[\mathbb{Y}=1]\cap[\mathbb{Z}=1])\neq\mathbf{P}([\mathbb{X}=1])\,\mathbf{P}([\mathbb{Y}=1]\cap[\mathbb{Z}=1])$, *ce qui montre que* $\mathbb{X}$ *n'est pas indépendante du couple* $(\mathbb{Y},\mathbb{Z})$.

2. ***Vrai.***
Supposons que $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *et* $\mathbb{Z}$ *soient indépendantes.*
Alors, pour tous $i,j,k\in\mathbb{N}$;,

$$\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j]\cap[\mathbb{Z}=k])=\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j])\,\mathbf{P}([\mathbb{Z}=k]).$$

En sommant sur toutes les valeurs possibles de $\mathbb{X}$, *on obtient :*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{Y}=j]\cap[\mathbb{Z}=k])&=\sum_{i\geqslant 0}\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j]\cap[\mathbb{Z}=k])\\&=\sum_{i\geqslant 0}\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j])\,\mathbf{P}([\mathbb{Z}=k])\\&=\mathbf{P}([\mathbb{Z}=k])\sum_{i\geqslant 0}\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j])\\&=\mathbf{P}([\mathbb{Y}=j])\,\mathbf{P}([\mathbb{Z}=k]).\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{Y}$ *et* $\mathbb{Z}$ *sont indépendantes.*
De même, $\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Z}=k])=\mathbf{P}([\mathbb{X}=i])\,\mathbf{P}([\mathbb{Z}=k])$, *ce qui montre que* $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Z}$ *sont indépendantes.*

3. ***Vrai.***
Supposons que $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *soient indépendantes et que* $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *soit indépendante de* $\mathbb{Z}$.
Pour tous $i,j,k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j]\cap[\mathbb{Z}=k])&=\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j])\,\mathbf{P}([\mathbb{Z}=k])\\&=\mathbf{P}([\mathbb{X}=i])\,\mathbf{P}([\mathbb{Y}=j])\,\mathbf{P}([\mathbb{Z}=k])\quad\text{par indépendance de }\mathbb{X}\text{ et }\mathbb{Y}.\end{aligned}$$

D'après la question précédente, l'indépendance de $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *et* $\mathbb{Z}$ *entraîne l'indépendance de* $\mathbb{Y}$ *et* $\mathbb{Z}$, *donc*

$$=\mathbf{P}([\mathbb{X}=i])\,\mathbf{P}([\mathbb{Y}=j]\cap[\mathbb{Z}=k]).$$

Conclusion, $\mathbb{X}$ *est indépendante du couple* $(\mathbb{Y},\mathbb{Z})$.

Correction de l'exercice IV.12 : [Énoncé]

1. *Posons* $\mathbb{S}=\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2$. *Comme* $\mathbb{X}_1$ *et* $\mathbb{X}_2$ *sont à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$, *on a*

$$\mathbb{S}(\Omega)=[\![2,+\infty[\![.$$

Soit $n\geqslant 2$. *Par indépendance de* $\mathbb{X}_1$ *et* $\mathbb{X}_2$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{S}=n]) &= \sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{P}([\mathbb{X}_1=k]\cap[\mathbb{X}_2=n-k])\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{P}([\mathbb{X}_1=k])\mathbf{P}([\mathbb{X}_2=n-k])\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}p(1-p)^{k-1}\times p(1-p)^{n-k-1}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}p^2(1-p)^{n-2}\\ &= (n-1)p^2(1-p)^{n-2}.\end{aligned}$$

2. *Soit $n\geqslant 2$. Déterminons la loi conditionnelle de $\mathbb{X}_1$ sachant $[\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2=n]$.*
Pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$, d'après la loi des probabilités conditionnelles, on a :

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2=n]}([\mathbb{X}_1=k])=\frac{\mathbf{P}([\mathbb{X}_1=k]\cap[\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2=n])}{\mathbf{P}([\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2=n])}.$$

Or, $[\mathbb{X}_1=k]\cap[\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2=n]=[\mathbb{X}_1=k]\cap[\mathbb{X}_2=n-k]$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{[\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2=n]}([\mathbb{X}_1=k]) &= \frac{\mathbf{P}([\mathbb{X}_1=k]\cap[\mathbb{X}_2=n-k])}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}\\ &= \frac{\mathbf{P}([\mathbb{X}_1=k])\mathbf{P}([\mathbb{X}_2=n-k])}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}\\ &= \frac{p(1-p)^{k-1}\times p(1-p)^{n-k-1}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}\\ &= \frac{1}{n-1}.\end{aligned}$$

La loi conditionnelle de $\mathbb{X}_1$ sachant $[\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2=n]$ est donc la loi uniforme sur $[\![1,n-1]\!]$.

k	1	2	$\cdots$	$n-1$
$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2=n]}([\mathbb{X}_1=k])$	$\frac{1}{n-1}$	$\frac{1}{n-1}$	$\cdots$	$\frac{1}{n-1}$

Correction de l'exercice IV.13 : [Énoncé]

1. *Les deux numéros sont distincts et compris entre 1 et n, donc le plus grand est au moins égal à 2 et au plus égal à n. Toutes ces valeurs sont atteintes : pour $k\in[\![2\,;n]\!]$, le tirage des boules 1 et k donne $\mathbb{T}=k$.*
Ainsi $\mathbb{T}(\Omega)=[\![2\,;n]\!]$.

Attention
Ici, les deux numéros ne sont pas indépendants (tirage sans remise) : on ne peut pas écrire $\mathbf{P}(\mathbb{T}\leqslant k)$ comme un produit. On dénombre.

2. *Soit $k\in[\![1\,;n]\!]$. Les tirages simultanés de deux boules sont équiprobables, et il y en a $\binom{n}{2}$.*
Le plus grand numéro est inférieur ou égal à k si et seulement si les deux boules tirées portent un numéro de $[\![1\,;k]\!]$, ce qui laisse $\binom{k}{2}$ tirages possibles. Ainsi

$$\mathbf{P}(\mathbb{T}\leqslant k)=\frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}}=\frac{k(k-1)}{n(n-1)}.$$

3. *Pour $k \in [\![2\,;n]\!]$, on a*
$$\mathbf{P}(\mathbb{T}=k)=\mathbf{P}(\mathbb{T}\leqslant k)-\mathbf{P}(\mathbb{T}\leqslant k-1).$$
Ainsi,
$$\mathbf{P}(\mathbb{T}=k)=\frac{k(k-1)-(k-1)(k-2)}{n(n-1)}=\frac{2(k-1)}{n(n-1)}.$$

4. *On calcule :*
$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\mathbf{P}(\mathbb{T}=k)&=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=2}^{n}(k-1)=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n-1}j\\&=\frac{2}{n(n-1)}\times\frac{(n-1)n}{2}\\&=1.\end{aligned}$$

DM 5 Couple de variables aléatoires

Exercice 1 – (D'après ECRICOME 2023) :

Soit n un entier naturel non nul.

Une urne contient n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n.

On tire une boule au hasard dans l'urne. Si cette boule tirée porte le numéro k, on place alors dans une seconde urne toutes les boules suivantes : une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2 , et plus généralement pour tout $j \in [\![1\,;k]\!]$, j boules numérotées j, jusqu'à k boules numérotées k.

Les boules de cette deuxième urne sont aussi indiscernables au toucher. On effectue alors un tirage au hasard d'une boule dans cette seconde urne.

Et on note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée et on note $\mathbb{Y}$ la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule tirée.

1. Reconnaitre la loi de $\mathbb{X}$ et donner son espérance et sa variance.

2. Déterminer $\mathbb{Y}(\Omega)$.

3. Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$.

   a. On suppose que l'événement $[\mathbb{X}=k]$ est réalisé.
   Déterminer, en fonction de k, le nombre total de boules présentes dans la seconde urne.

   b. Pour tout entier j de $[\![1\,;n]\!]$, exprimer $\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}(\mathbb{Y}=j)$ en fonction de k et j.
   (On distinguera les cas $j \leqslant k$ ou $j \geqslant k+1$)

4. a. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel k non nul,
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$

   b. En déduire que, pour tout élément j de $\mathbb{Y}(\Omega)$,
$$\mathbf{P}(\mathbb{Y}=j) = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}.$$

5. Justifier que $\mathbb{Y}$ admet une espérance [1] et montrer que $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \dfrac{n+2}{3}$.

6. Les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles indépendantes ?

7. a. Montrer que $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \dfrac{(n+1)(4n+5)}{18}$.

   b. En déduire que $\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \dfrac{n^2-1}{18}$.
   Indication : $\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) - \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y})$.

[1]. Comme on ne l'a pas encore bien vu, il suffit juste de prouver que la série $\sum y\mathrm{P}(\mathbb{Y}=y)$ est finie ou convergente.

8. a. Écrire une fonction en langage Python, nommée `seconde_urne`, prenant en entrée un entier naturel k non nul, et renvoyant une liste contenant 1 élément valant 1, 2 éléments valant 2, …, j éléments valant j, …, jusqu'à k éléments valant k.

   Par exemple, l'appel de `seconde_urne(4)` renverra `[1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4]`.

   b. Recopier et compléter la fonction en langage Python suivante pour qu'elle prenne en entrée un entier naturel n non nul, et qu'elle renvoie une réalisation du couple de variables aléatoires $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

```
Éditeur
1 import numpy.random as rd
2 def simul_XY(n):
3     X = ____
4     urne2 = seconde_urne(_____)
5     nb = len(urne2)
6     i = rd.randint(0, nb)
7     Y = ____
8     return X, Y
```

   c. On considère la fonction en langage Python suivante, prenant en entrée un entier naturel n non nul.

```
Éditeur
1 def fonction(n):
2     liste = [0]*n
3     for i in range(10000):
4         j = simul_XY(n)[1]
5         liste[j-1] = liste[j-1] + 1/10000
6     return liste
```

   Quelles valeurs les éléments de la liste renvoyée permettent-ils d'estimer ?

Exercice 2 – (court extrait d'EM Lyon 2026) :

…

Partie B : Étude de la ligne de niveau zéro

On considère la fonction $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x}.$$

3. Donner le signe de g sur $\mathbb{R}^*$.

4. Montrer que la fonction g admet un prolongement continu en 0.

On note encore g le prolongement continu de g à $\mathbb{R}$.

5. **(khûbe)** Montrer que g est dérivable en 0, et préciser la valeur de $g'(0)$.

6. a. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

   b. Montrer que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

c. Déterminer soigneusement les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$, puis dresser son tableau de variation.

DM 5 — Couple de variables aléatoires

Exercice 2 – (court extrait d'EM Lyon 2026) :

…

Partie B : Étude de la ligne de niveau zéro

On considère la fonction $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x}.$$

3. Donner le signe de g sur $\mathbb{R}^*$.

   Comme $\forall\, u \in \mathbb{R}$, $e^u \geqslant 1 \iff u \geqslant 0$, on en déduit le tableau de signe de g sur $\mathbb{R}^*$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^{-x} - 1$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$	
$\dfrac{e^{-x} - 1}{x}$		$-$	‖	$-$	

   Conclusion : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) \leqslant 0$.

4. Montrer que la fonction g admet un prolongement continu en 0.

   En deux étapes :

   — Pour tout x non nul, g est le quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}^*$.

   — Comme $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x}{x} = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$ qui est fini.
   La fonction g admet donc un prolongement par continuité en 0 en posant $g(0) = -1$.

Commentaire
Le prolongement obtenu est alors continu sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On note encore g le prolongement continu de g à $\mathbb{R}$.

5. Montrer que g est dérivable en 0, et préciser la valeur de $g'(0)$.

   Pas d'autre méthode que de regarder la limite du taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{\frac{e^{-x}-1}{x} + 1}{x} = \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2}$$

Or, $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \underset{u\to 0}{o}(u^2)$.

Donc, $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ puis $e^{-x} + x - 1 = \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.

On en déduit, $\dfrac{e^{-x}+x-1}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \dfrac{1}{2}$.

La fonction g est donc dérivable en 0 et on a : $g'(0) = \dfrac{1}{2}$.

6. a. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, g est le quotient deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = \frac{-xe^{-x} - (e^{-x}-1)}{x^2} = -\frac{xe^{-x} + e^{-x} - 1}{x^2}.$$

b. Montrer que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

D'après la question précédente, le signe de $g'(x)$ dépend de celui de

$$\varphi(x) = xe^{-x} + e^{-x} - 1.$$

On étudie rapidement les variations de la fonction φ qui est clairement dérivable comme somme de fonctions qui le sont sur $\mathbb{R}^*$.

$$\forall\, x \in_{\mathrm{R}}^*,\ \varphi'(x) = e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x} = -xe^{-x},$$

dont le signe est celui de x. On en déduit le tableau de variation de φ :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ		↘	0	↗	

Conclusion, $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $\varphi(x) > 0$ donc $g'(x) = -\dfrac{\varphi(x)}{x^2} < 0$.

c. Déterminer soigneusement les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$, puis dresser son tableau de variation.

En $+\infty$: Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} - 1 = -1$, d'après les théorèmes sur les limites de quotients,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

En $-\infty$: On a $g(x) = \dfrac{e^{-x}-1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x}$.

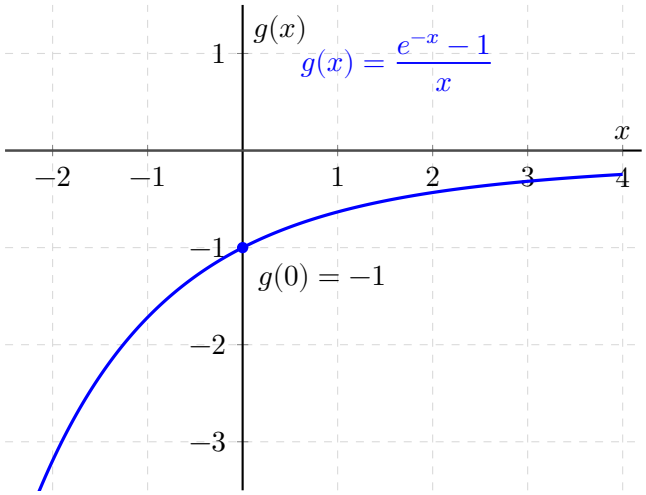
Avec x prenant des valeurs négatives, par croissances comparées, on en déduit,

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.$$

D'après les questions précédentes, on dresse le tableau de variation de g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
g	$-\infty$	0

Commentaire
On vérifiera au passage que g prend bien des valeurs négatives.



Khôlles 4

Variables aléatoires, Lois usuelles & Couples

1. Questions de Cours (Au choix de l'interrogateur)

Variables aléatoires réelles, Espérance & Variance

1. ***Support et loi de probabilité***
   a. *Définir le support $\mathbb{X}(\Omega)$ d'une variable aléatoire réelle discrète et donner la définition de sa loi de probabilité.*
   b. *Expliquer la méthode en deux étapes pour déterminer la loi d'une variable aléatoire.*

Lois usuelles (Finies et Infinies)

2. ***Lois usuelles finies***
   a. *Définir la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Donner leurs espérances et variances.*
   b. *Définir la loi uniforme discrète $\mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$ et énoncer ses formules d'espérance et de variance.*
3. ***Lois usuelles infinies***
   a. *Définir la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Démontrer la formule de son espérance ou de sa variance.*
   b. *Définir la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Rappeler la formule de sa loi ainsi que son espérance et sa variance.*
4. ***(khûbe) Propriété de la loi géométrique***
   a. *Énoncer et démontrer la propriété de perte de mémoire de la loi géométrique*

$$\mathrm{P}_{[\mathbb{X}>k]}(\mathbb{X} > k+l) = \mathbf{P}(\mathbb{X} > l).$$

Couples de variables aléatoires discrètes

5. ***Définition de la loi conjointe***
   a. *Définir le support $(\mathbb{X},\mathbb{Y})(\Omega)$ d'un couple de variables aléatoires discrètes.*
   b. *Définir la loi conjointe du couple $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.*
6. ***Obtention des lois marginales***
   a. *Énoncer le système complet d'événements associables à la variable $\mathbb{Y}$ (ou $\mathbb{X}$).*
   b. ***(khûbe)** Énoncer et démontrer la formule permettant d'obtenir la loi marginale de $\mathbb{X}$ à partir des probabilités conjointes.*
7. ***Loi de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X}=x]$***
   a. *Donner la condition d'existence de la loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X}=x]$.*
   b. *Rappeler la formule de $\mathrm{P}_{[\mathbb{X}=x]}(\mathbb{Y}=y)$ et vérifier que la somme des probabilités*
   c. *Donner démontrer la formule permettant d'obtenir la loi marginale de $\mathbb{Y}$ à partir de sa loi sachant $[\mathbb{X}=x]$.*

8. ***Indépendance de deux variables aléatoires***

   a. *Définir l'indépendance de deux variables aléatoires réelles discrètes $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.*

   b. *Énoncer les propriétés sur $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y})$ en cas d'indépendance.*

2. Exercices Types & Savoir-faire attendus

Exercice IV.1 – (Calcul de loi marginale à partir d'un tableau conjoint) [Correction p. 517]

Soit $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ un couple à valeurs dans $\{1,2,3\}\times\{1,2,3\}$ vérifiant $\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j])=a(i+j)$.

1. Déterminer la constante a.
2. Dresser le tableau à double entrée de la loi conjointe.
3. En déduire les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.

Exercice IV.2 – (Compléter un tableau à double entrée) [Correction p. 517]

On considère un couple $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ à valeurs dans $\{1,2\}\times\{1,2,3\}$ dont la loi conjointe est donnée par $\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j])=c\times i\times j$.

1. Déterminer la valeur de la constante c.
2. Dresser le tableau de la loi conjointe et calculer les sommes en marge.
3. En déduire les lois marginales de $\mathbb{X}$ et de $\mathbb{Y}$.

Exercice IV.3 – (Probabilités totales et conditionnement (Mélange Uniforme / Binomiale)) [Correction p. 518]

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire une boule au hasard et on note $\mathbb{X}$ son numéro. Puis, on lance $\mathbb{X}$ fois une pièce équilibrée et on note $\mathbb{Y}$ le nombre de "Pile" obtenus.

1. Donner la loi de $\mathbb{X}$, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X}=k]$.
3. Calculer $\mathbf{P}(\mathbb{Y}=0)$ à l'aide de la Formule des Probabilités Totales.

Exercice IV.4 – (Loi d'un couple relié par une relation déterministe) [Correction p. 518]

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire telle que $\mathbb{X}(\Omega)=\{-1,0,1\}$ dont la loi est donnée par :

$$\mathbf{P}(\mathbb{X}=-1)=\frac{1}{4},\quad \mathbf{P}(\mathbb{X}=0)=\frac{1}{2},\quad \mathbf{P}(\mathbb{X}=1)=\frac{1}{4}$$

On pose $\mathbb{Y}=\mathbb{X}^2$.

1. Déterminer le support $\mathbb{Y}(\Omega)$ et donner la loi marginale de $\mathbb{Y}$.
2. Dresser le tableau de la loi conjointe du couple $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.
3. Les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X})$, $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$.

Exercice IV.5 – (Loi conjointe produit et indépendance de lois usuelles) [Correction p. 518]

Soient $\mathbb{B} \sim \mathcal{B}(p)$ et $\mathbb{G} \sim \mathcal{G}(p)$ deux variables aléatoires indépendantes avec $p \in]0,1[$. On pose $\mathbb{Z} = \mathbb{B} \times \mathbb{G}$.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable $\mathbb{Z}$.
2. Calculer $\mathbf{P}(\mathbb{Z} = 0)$ en utilisant un système complet d'événements lié à $\mathbb{B}$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbf{P}(\mathbb{Z} = k)$.
4. **(khûbe)** Calculer l'espérance $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$ de deux manières différentes.

Exercice IV.6 – (Tirages sans remise et lois marginales identiques) [Correction p. 519]

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N (avec $N \geqslant 2$). On tire successivement et sans remise deux boules. On note $\mathbb{X}_1$ le numéro de la première boule et $\mathbb{X}_2$ celui de la deuxième.

1. Donner la loi de $\mathbb{X}_1$, son espérance et sa variance.
2. Pour tout $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$, déterminer la probabilité conjointe $\mathbf{P}([\mathbb{X}_1 = i] \cap [\mathbb{X}_2 = j])$.
3. En déduire la loi marginale de $\mathbb{X}_2$.
4. Les variables $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ sont-elles indépendantes ?

Exercice IV.7 – (Couple de variables aléatoires indépendantes à support infini) [Correction p. 519]

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi conjointe donnée par :

$$\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = \frac{a}{2^{i+1} \times 3^{j+1}} \quad (a \in \mathbb{R})$$

1. Montrer que $a = 2$.
2. Reconnaître les lois marginales de $\mathbb{X}$ et de $\mathbb{Y}$ (à un décalage près).
3. Calculer la probabilité $\mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y})$.

Exercice IV.8 – (Théorème de transfert (Loi géométrique)) [Correction p. 519]

Soit $\mathbb{X} \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$. Soit $\mathbb{Y} = (-1)^{\mathbb{X}}$.

1. Rappeler le support et l'espérance de $\mathbb{X}$.
2. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$ à l'aide du théorème de transfert et de la somme d'une série géométrique.

Exercice IV.9 – (Somme et indépendance de deux lois de Poisson) [Correction p. 520]

Soient $\mathbb{X} \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathbb{Y} \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ deux variables aléatoires indépendantes.

1. Rappeler $\mathbf{E}(\mathbb{X} + \mathbb{Y})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X} + \mathbb{Y})$.
2. Démontrer, en utilisant un système complet d'événements et le binôme de Newton, que $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y} \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Exercice IV.10 – (Maximum et Minimum de deux tirages avec remise) [Correction p. 520]

On tire avec remise deux boules dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On note $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ les numéros obtenus.

1. Justifier l'indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ et rappeler leurs lois.

2. Soit $\mathbb{M} = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Pour tout $k \in [\![1, \mathrm{N}]\!]$, exprimer $\mathbf{P}(\mathbb{M} \leqslant k)$ puis en déduire la loi de $\mathbb{M}$.
3. Soit $\mathbb{T} = \min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Exprimer $\mathbf{P}(\mathbb{T} > k)$ pour tout $k \in [\![0, \mathrm{N}]\!]$ puis donner la loi de $\mathbb{T}$.

Corrigés

Correction de l'exercice IV.1 : [Énoncé]

1. *La somme des probabilités conjointes sur tout le support doit être égale à 1 :*

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j])=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a(i+j)=1$$

Calculons la somme :

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(i+j)=(2+3+4)+(3+4+5)+(4+5+6)=9+12+15=36$$

D'où $36a=1$, *soit* $a=\dfrac{1}{36}$.

2. *En remplaçant* a *par* $\dfrac{1}{36}$, *on obtient le tableau de la loi conjointe :*

$\mathbb{X}\backslash\mathbb{Y}$	1	2	3	*Loi de* $\mathbb{X}$
1	2/36	3/36	4/36	9/36
2	3/36	4/36	5/36	12/36
3	4/36	5/36	6/36	15/36
Loi de $\mathbb{Y}$	9/36	12/36	15/36	1

3. *En faisant la somme par ligne et par colonne :*

— *Loi de* $\mathbb{X}$ *:* $\mathbf{P}(\mathbb{X}=1)=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$, $\mathbf{P}(\mathbb{X}=2)=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$, $\mathbf{P}(\mathbb{X}=3)=\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$.

— *Loi de* $\mathbb{Y}$ *: Par symétrie de la formule* $a(i+j)$, *la loi marginale de* $\mathbb{Y}$ *est identique à celle de* $\mathbb{X}$ *:*

$$\mathbf{P}(\mathbb{Y}=1)=\frac{1}{4},\ \mathbf{P}(\mathbb{Y}=2)=\frac{1}{3},\ \mathbf{P}(\mathbb{Y}=3)=\frac{5}{12}.$$

Correction de l'exercice IV.2 : [Énoncé]

1. *La somme totale des probabilités est égale à 1 :*

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}c\times i\times j=c\left(\sum_{i=1}^{2}i\right)\left(\sum_{j=1}^{3}j\right)=1$$

On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}i=1+2=3$ *et* $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}j=1+2+3=6$.

Donc $c\times 3\times 6=18c=1$, *d'où* $c=\dfrac{1}{18}$.

2. *Le tableau de la loi conjointe avec les marges :*

$\mathbb{X}\backslash\mathbb{Y}$	1	2	3	*Loi de* $\mathbb{X}$
1	1/18	2/18	3/18	6/18
2	2/18	4/18	6/18	12/18
Loi de $\mathbb{Y}$	3/18	6/18	9/18	1

3. *Lois marginales obtenues en simplifiant les fractions :*

— *Loi de* $\mathbb{X}$ *:* $\mathbf{P}(\mathbb{X}=1)=\dfrac{1}{3}$, $\mathbf{P}(\mathbb{X}=2)=\dfrac{2}{3}$.

— *Loi de* $\mathbb{Y}$ *:* $\mathbf{P}(\mathbb{Y}=1)=\dfrac{1}{6}$, $\mathbf{P}(\mathbb{Y}=2)=\dfrac{1}{3}$, $\mathbf{P}(\mathbb{Y}=3)=\dfrac{1}{2}$.

Correction de l'exercice IV.3 : [Énoncé]

1. *$\mathbb{X}$ suit la loi uniforme discrete $\mathcal{U}(\llbracket 1, \mathrm{N} \rrbracket)$.*

   — $\forall\, k \in \llbracket 1, \mathrm{N} \rrbracket, \quad \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \dfrac{1}{\mathrm{N}}$.

   — $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \dfrac{\mathrm{N}+1}{2}$ *et* $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \dfrac{\mathrm{N}^2 - 1}{12}$.

2. *Sachant $[\mathbb{X} = k]$, on effectue k tirages de Bernoulli indépendants de paramètre $p = \dfrac{1}{2}$.*

   La loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = k]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(k, \dfrac{1}{2}\right)$:

$$\forall\, j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \mathrm{P}_{[\mathbb{X}=k]}(\mathbb{Y} = j) = \binom{k}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-j} = \binom{k}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

3. *La famille $([\mathbb{X} = k])_{1 \leqslant k \leqslant \mathrm{N}}$ forme un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :*

$$\mathbf{P}(\mathbb{Y} = 0) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) \mathrm{P}_{[\mathbb{X}=k]}(\mathbb{Y} = 0) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\mathrm{N}} \binom{k}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

   Il s'agit d'une somme géométrique de raison $1/2$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{Y} = 0) = \frac{1}{\mathrm{N}} \times \frac{1}{2} \times \frac{1 - (1/2)^{\mathrm{N}}}{1 - 1/2} = \frac{1 - (1/2)^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}}$$

Correction de l'exercice IV.4 : [Énoncé]

1. *$\mathbb{Y} = \mathbb{X}^2$ prend ses valeurs dans $\mathbb{Y}(\Omega) = \{0, 1\}$.*

   — $\mathbf{P}(\mathbb{Y} = 0) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = 0) = \dfrac{1}{2}$.

   — $\mathbf{P}(\mathbb{Y} = 1) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = -1] \cup [\mathbb{X} = 1]) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = -1) + \mathbf{P}(\mathbb{X} = 1) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$.

2. *Tableau de la loi conjointe :*

$\mathbb{X} \backslash \mathbb{Y}$	0	1	*Loi de $\mathbb{X}$*
-1	0	$1/4$	$1/4$
0	$1/2$	0	$1/2$
1	0	$1/4$	$1/4$
Loi de $\mathbb{Y}$	$1/2$	$1/2$	1

3. *On a $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 1]) = 0$, mais $\mathbf{P}(\mathbb{X} = 0) \times \mathbf{P}(\mathbb{Y} = 1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} \neq 0$.*

   Donc $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes.

4. — $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = (-1) \times \dfrac{1}{4} + 0 \times \dfrac{1}{2} + 1 \times \dfrac{1}{4} = 0$.

   — $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = 0 \times \dfrac{1}{2} + 1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

   — $\mathbb{X}\mathbb{Y} = \mathbb{X}^3$, *d'où* $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = (-1)^3 \times \dfrac{1}{4} + 0^3 \times \dfrac{1}{2} + 1^3 \times \dfrac{1}{4} = 0$.

Correction de l'exercice IV.5 : [Énoncé]

1. *Comme $\mathbb{B}(\Omega) = \{0, 1\}$ et $\mathbb{G}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z} = \mathbb{B} \times \mathbb{G}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}(\Omega) = \mathbb{N}$.*

2. *Avec le système complet d'événements $([\mathbb{B} = 0], [\mathbb{B} = 1])$:*

$$\mathbf{P}(\mathbb{Z} = 0) = \mathbf{P}([\mathbb{B} = 0] \cap [0 \times \mathbb{G} = 0]) + \mathbf{P}([\mathbb{B} = 1] \cap [1 \times \mathbb{G} = 0])$$

Or $\mathbb{G} \geqslant 1$, *donc* $[1 \times \mathbb{G} = 0] = \varnothing$. *Ainsi* $\mathbf{P}(\mathbb{Z} = 0) = \mathbf{P}(\mathbb{B} = 0) = 1 - p$.

3. *Pour* $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathbf{P}(\mathbb{Z} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{B} = 1 \cap \mathbb{G} = k)$$
Par indépendance de $\mathbb{B}$ *et* $\mathbb{G}$:
$$\mathbf{P}(\mathbb{Z} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{B} = 1)\mathbf{P}(\mathbb{G} = k) = p \times (1-p)^{k-1}p = p^2(1-p)^{k-1}$$

4. — ***Méthode 1 (par indépendance) :*** $\mathbf{E}(\mathbb{Z}) = \mathbf{E}(\mathbb{B} \times \mathbb{G}) = \mathbf{E}(\mathbb{B})\mathbf{E}(\mathbb{G}) = p \times \dfrac{1}{p} = 1$.

— ***Méthode 2 (par définition) :***
$$\mathbf{E}(\mathbb{Z}) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbf{P}(\mathbb{Z} = k) = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = p^2 \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} = p^2 \times \frac{1}{p^2} = 1$$

Correction de l'exercice IV.6 : [Énoncé]

1. $\mathbb{X}_1 \sim \mathcal{U}([\![1, \mathrm{N}]\!])$. *Pour tout* $i \in [\![1, \mathrm{N}]\!]$, $\mathbf{P}(\mathbb{X}_1 = i) = \dfrac{1}{\mathrm{N}}$, $\mathbf{E}(\mathbb{X}_1) = \dfrac{\mathrm{N}+1}{2}$ *et* $\mathbf{V}(\mathbb{X}_1) = \dfrac{\mathrm{N}^2-1}{12}$.

2. *Pour* $(i, j) \in [\![1, \mathrm{N}]\!]^2$:
— *Si* $i = j$: $\mathbf{P}([\mathbb{X}_1 = i] \cap [\mathbb{X}_2 = j]) = 0$.
— *Si* $i \neq j$: $\mathbf{P}([\mathbb{X}_1 = i] \cap [\mathbb{X}_2 = j]) = \mathbf{P}(\mathbb{X}_1 = i)\mathrm{P}_{[\mathbb{X}_1 = i]}(\mathbb{X}_2 = j) = \dfrac{1}{\mathrm{N}} \times \dfrac{1}{\mathrm{N}-1} = \dfrac{1}{\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)}$.

3. *Par la formule des probabilités totales :*
$$\mathbf{P}(\mathbb{X}_2 = j) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathbf{P}([\mathbb{X}_1 = i] \cap [\mathbb{X}_2 = j]) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)} = (\mathrm{N}-1) \times \frac{1}{\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)} = \frac{1}{\mathrm{N}}$$
$\mathbb{X}_2$ *suit également la loi uniforme* $\mathcal{U}([\![1, \mathrm{N}]\!])$.

4. *Pour* $i = j$, $\mathbf{P}([\mathbb{X}_1 = i] \cap [\mathbb{X}_2 = i]) = 0 \neq \mathbf{P}(\mathbb{X}_1 = i)\mathbf{P}(\mathbb{X}_2 = i) = \dfrac{1}{\mathrm{N}^2}$.
$\mathbb{X}_1$ *et* $\mathbb{X}_2$ *ne sont pas indépendantes.*

Correction de l'exercice IV.7 : [Énoncé]

1. *Somme des probabilités sur* $\mathbb{N}^2$:
$$a\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+1}}\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{j+1}}\right) = a\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{1-1/2}\right)\left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{1-1/3}\right) = a \times 1 \times \frac{1}{2} = 1$$
D'où $a = 2$.

2. *Pour* $i \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\mathbb{X} = i) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2}{2^{i+1}3^{j+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$, *donc* $\mathbb{X} + 1 \sim \mathcal{G}(1/2)$.
De même, $\mathbf{P}(\mathbb{Y} = j) = \dfrac{2}{3^{j+1}} \times 1 = 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{j+1}$, *donc* $\mathbb{Y} + 1 \sim \mathcal{G}(2/3)$.

3.
$$\mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{X} = k] \cap [\mathbb{Y} = k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{6^{k+1}} = \frac{2}{6}\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^k = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-1/6} = \frac{2}{5}$$

Correction de l'exercice IV.8 : [Énoncé]

1. $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ *et* $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \dfrac{1}{p}$.

2. *Par le théorème de transfert :*

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \mathbf{E}((-1)^{\mathbb{X}}) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \mathbf{P}(\mathbb{X}=k) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k pq^{k-1}$$

En factorisant par $-p$:

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = -p\sum_{k=1}^{+\infty}(-q)^{k-1} = -p\sum_{j=0}^{+\infty}(-q)^j$$

Comme $|-q| = 1-p < 1$, la série géométrique converge et vaut :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = -p \times \frac{1}{1-(-q)} = -\frac{p}{1+q} = -\frac{p}{2-p}$$

Correction de l'exercice IV.9 : [Énoncé]

1. *Par linéarité de l'espérance,* $\mathbf{E}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}) + \mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \lambda_1 + \lambda_2$.
   Par indépendance, $\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \lambda_1 + \lambda_2$.

2. $\mathbb{Z}(\Omega) = \mathbb{N}$. *Pour $n \in \mathbb{N}$, le système complet d'événements* $([\mathbb{X}=k])_{k\in\mathbb{N}}$ *donne :*

$$\mathbf{P}(\mathbb{Z}=n) = \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]\cap[\mathbb{Y}=n-k])$$

Par indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{Z}=n) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}$$

On reconnaît le binôme de Newton $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} = (\lambda_1+\lambda_2)^n$. *Ainsi :*

$$\mathbf{P}(\mathbb{Z}=n) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}$$

D'où $\mathbb{Z} = \mathbb{X}+\mathbb{Y} \sim \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$.

Correction de l'exercice IV.10 : [Énoncé]

1. *Les tirages s'effectuent avec remise, donc $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variables indépendantes de même loi uniforme discrète* $\mathcal{U}(\llbracket 1,\mathrm{N}\rrbracket)$.

2. $[\mathbb{M}\leqslant k] = [\mathbb{X}\leqslant k \cap \mathbb{Y}\leqslant k]$. *Par indépendance :*

$$\mathbf{P}(\mathbb{M}\leqslant k) = \mathbf{P}(\mathbb{X}\leqslant k)\mathbf{P}(\mathbb{Y}\leqslant k) = \left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right)^2$$

Pour $k \in \llbracket 1,\mathrm{N}\rrbracket$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{M}=k) = \mathbf{P}(\mathbb{M}\leqslant k) - \mathbf{P}(\mathbb{M}\leqslant k-1) = \frac{k^2-(k-1)^2}{\mathrm{N}^2} = \frac{2k-1}{\mathrm{N}^2}$$

3. $[\mathbb{T}>k] = [\mathbb{X}>k \cap \mathbb{Y}>k]$. *Par indépendance :*

$$\mathbf{P}(\mathbb{T}>k) = \mathbf{P}(\mathbb{X}>k)\mathbf{P}(\mathbb{Y}>k) = \left(\frac{\mathrm{N}-k}{\mathrm{N}}\right)^2$$

Pour $k \in \llbracket 1,\mathrm{N}\rrbracket$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{T}=k) = \mathbf{P}(\mathbb{T}>k-1) - \mathbf{P}(\mathbb{T}>k) = \frac{(\mathrm{N}-k+1)^2-(\mathrm{N}-k)^2}{\mathrm{N}^2} = \frac{2(\mathrm{N}-k)+1}{\mathrm{N}^2}$$

DS 2 — Espaces vectoriels et Variables aléatoires

17/10/2026

*Durée : **4** heures*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

*Le sujet est composé de **3** exercices indépendants.*

Exercice 1 – (Espaces vectoriels)

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et les ensembles

$$\mathrm{F} = \{\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ \mathrm{AX} = \mathrm{X}\}, \qquad \mathrm{G} = \{\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ \mathrm{AX} = 4\mathrm{X}\}.$$

On note $\mathrm{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{U}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en donner une base ainsi que la dimension. (On admet que G en est aussi un.)
2. En déduire que $(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2)$ est une base de F.

3. Montrer que $G = \text{Vect}(U_3)$. Quelle est la dimension de G ?

4. a. Montrer que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   b. Déterminer les coordonnées de $E_1 = (1\,;0\,;0)$ dans la base (U_1, U_2, U_3).

5. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n U_1 = U_1$, $A^n U_2 = U_2$ et $A^n U_3 = 4^n U_3$.

   b. En déduire l'expression de $A^n E_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire la première colonne de A^n.

   c. Vérifier le résultat pour $n = 0$ et $n = 1$.

Problème 2 – (Une suite récurrente et une série)

On considère la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) = \ln(1+u_n).$$

Partie A – Étude de la fonction f

1. Donner l'ensemble de définition de f et dresser son tableau de variations.

2. On pose, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $g(x) = x - \ln(1+x)$.
   Étudier les variations de g et en déduire que

$$\forall\, x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x, \quad \text{avec égalité si, et seulement si, } x = 0.$$

3. Montrer que l'intervalle $]0, 1]$ est stable par f. (On rappelle que $\ln(2) \leqslant 1$.)

Partie B – Étude de la suite (u_n)

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0, 1]$.

5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

6. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis déterminer sa limite.

7. Compléter la fonction `Python` suivante afin qu'elle prenne en argument un réel `eps` strictement positif et renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant$ `eps`.

Éditeur

```
import numpy as np

def seuil(eps):
    u = 1
    n = 0
    while ......... :
        u = .........
        n = .........
    return n
```

8. Montrer que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

Partie C – Convergence de la série $\sum u_n^2$

9. On pose, pour tout $x \in [0,1]$, $k(x) = x - \ln(1+x) - \dfrac{x^2}{4}$.

   a. Calculer $k'(x)$ et montrer que $\forall\, x \in [0\,;1]$, $k'(x) = \dfrac{x(1-x)}{2(1+x)}$.

   b. En déduire que $\forall\, x \in [0,1],\ x - \ln(1+x) \geqslant \dfrac{x^2}{4}$.

10. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \leqslant 4\,(u_n - u_{n+1})$.

11. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(u_n - u_{n+1})$ converge et calculer sa somme.

12. Conclure que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \leqslant 4$.

Problème 3 – (Lois géométriques, lois de Poisson et couples)

Dans tout le problème, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est un espace probabilisé.

Les trois parties sont, dans une grande mesure, indépendantes.

Partie A – Somme de deux variables géométriques

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires **indépendantes** suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

On pose $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$.

1. Rappeler $\mathbb{X}(\Omega)$, $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X})$.
2. Déterminer $\mathbb{Z}(\Omega)$ puis montrer que $\forall\, n \geqslant 2,\ \mathbf{P}(\mathbb{Z} = n) = (n-1)\,p^2 q^{n-2}$.
3. Donner $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$.
4. Soit $n \geqslant 2$. Déterminer la loi conditionnelle de $\mathbb{X}$ sachant $[\mathbb{Z} = n]$.
   Reconnaître une loi usuelle. Cette loi dépend-elle de p ?
5. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Z}$ sont-elles indépendantes ? (On pourra calculer $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 2] \cap [\mathbb{Z} = 2])$.)

Partie B – Minimum et maximum de deux variables géométriques

On conserve les notations de la partie A et on pose $\mathbb{U} = \min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et $\mathbb{V} = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

6. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(\mathbb{X} > n) = q^n$. (On pensera à écrire $[\mathbb{X} > n] = \displaystyle\bigcup_{k\geqslant n+1} [\mathbb{X} = k]$)

7. a. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(\mathbb{U} > n) = q^{2n}$.

   b. En déduire que $\mathbb{U}$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre, puis donner $\mathbf{E}(\mathbb{U})$. (On pensera à écrire l'événement $[\mathbb{U} = n]$ en fonction des événements incompatibles $[\mathbb{U} > n]$ et $[\mathbb{U} > n-1]$)

8. a. Exprimer $\mathbb{U}+\mathbb{V}$ en fonction de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.

   b. En déduire que $\mathbb{V}$ admet une espérance et que $\mathbf{E}(\mathbb{V}) = \dfrac{3-2p}{p(2-p)}$.

9. a. Montrer que $\mathbf{P}(\mathbb{X}=\mathbb{Y}) = \dfrac{p}{2-p}$.

   b. Justifier que $\mathbf{P}(\mathbb{X}<\mathbb{Y}) = \mathbf{P}(\mathbb{X}>\mathbb{Y})$ puis en déduire $\mathbf{P}(\mathbb{X}<\mathbb{Y})$.

10. On donne la fonction Python suivante, où `rd.geometric(p)` simule une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$.

Éditeur

```
1  import numpy.random as rd
2
3  def estimation(p, N):
4      c = 0
5      for k in range(N):
6          x = rd.geometric(p)
7          y = rd.geometric(p)
8          if ......... :
9              c = c + 1
10     return c / N
```

   a. Compléter la condition de la ligne `if` pour que `estimation(p, N)` renvoie une estimation de $\mathbf{P}(\mathbb{X}=\mathbb{Y})$.

   b. **(khûbe)** Quelle valeur approchée renvoie `estimation(0.5, 100000)` ? Justifier.

Partie C – Un couple de variables de Poisson

Soient $\lambda>0$, $p\in\,]0,1[$ et $q=1-p$.

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, sachant $[\mathbb{X}=n]$, la variable $\mathbb{Y}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

On pose $\mathbb{T}=\mathbb{X}-\mathbb{Y}$.

11. Soit $(i,j)\in\mathbb{N}^2$.

   a. Montrer que $[\mathbb{Y}=i]\cap[\mathbb{T}=j] = [\mathbb{X}=i+j]\cap[\mathbb{Y}=i]$.

   b. En déduire que $\mathbf{P}([\mathbb{Y}=i]\cap[\mathbb{T}=j]) = \mathbf{P}(\mathbb{X}=i+j)\,\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=i+j]}(\mathbb{Y}=i)$.

12. Montrer que, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$,

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=i]\cap[\mathbb{T}=j]) = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^i}{i!}\times e^{-\lambda q}\frac{(\lambda q)^j}{j!}.$$

13. En déduire les lois de $\mathbb{Y}$ et de $\mathbb{T}$ (on les reconnaîtra).

14. Les variables $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{T}$ sont-elles indépendantes ? Justifier.

DS 2 Espaces vectoriels et Variables aléatoires

Exercice 1 – (Espaces vectoriels)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et les ensembles

$$F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = X\}, \qquad G = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 4X\}.$$

On note $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en donner une base ainsi que la dimension. (On admet que G en est aussi un.)

   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Commentaire
On traduit ce que veut dire $X \in F$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{X} \in \mathrm{F} &\iff \mathrm{AX} = \mathrm{X} && \text{(on traduit ce que veut dire } \mathrm{X} \in \mathrm{F}\text{)}\\
&\iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases} 2x + y + z = x \\ x + 2y + z = y \\ x + y + 2z = z \end{cases} && \text{(on transforme en système linéaire)}\\
&\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} && \text{(on met toutes les inconnues du même côté)}\\
&\iff \{x + y + z = 0
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'une équation pour trois inconnues. Le système admet donc 2 inconnues secondaires y et z par exemple.

$$\begin{aligned}
&\iff \begin{cases} x = -y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases} && \text{(on exprime l'inconnue principale } x \text{ en fonction des inconnues secondaires)}\\
&\iff \mathrm{X} = y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{(on revient à l'écriture matricielle)}\\
&\iff \mathrm{X} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). && \text{(on traduit les combinaisons linéaires en terme de Vect .)}
\end{aligned}$$

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (par définition d'un Vect).

Commentaire
Reste à trouve la dimension de F. Pour cela, on en cherche une base.

Génératrice : Par définition du Vect , la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est déjà génératrice de F. Reste à montrer qu'elle est libre.

Liberté : Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dont les coordonnées ne sont pas proportionnelles ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre de F.

Base : Libre et génératrice de F, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme donc une base de F.

Le sous-espace F admet une base de deux éléments donc F est de dimension 2.

2. En déduire que $(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2)$ est une base de F.

Comme $AU_1 = U_1$ et $AU_2 = U_2$, les deux vecteurs U_1 et U_2 appartiennent à F.
De plus, U_1 et U_2 ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre de F de même cardinal que sa dimension donc une base de F.

3. Montrer que $G = \text{Vect}(U_3)$. Quelle est la dimension de G ?

Comme $AU_3 = 4U_3$, alors $U_3 \in G$.
On résout, de la même manière que précédemment, l'équation $AX = 4X \iff (A - 4I_3)X = 0$ pour un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on obtient $\begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = x \end{cases} \iff X \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
Ainsi, $G = \text{Vect}(U_3)$ et $\dim(G) = 1$.

4. a. Montrer que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

La famille $\mathcal{B}' = (U_1, U_2, U_3)$ comporte 3 vecteurs dans un espace de dimension 3.
Il suffit de montrer qu'elle est libre.

Commentaire
On pourrait considérer une combinaison linéaire nulle mais je vous montre une autre méthode :

— On sait déjà que U_1 et U_2 sont libres.
— Il suffit alors de montrer , par la contradiction, que U_3 est linéairement indépendant de U_1 et U_2.
S'il l'était, U_3 appartiendrait à $\text{Vect}(U_1, U_2)$ donc à F et vérifierait $AU_3 = U_3$.
Or, $U_3 \in G \iff AU_3 = 4U_3$.
Comme $U_3 \neq 4U_3$, ce n'est pas possible et $U_3 \notin \text{Vect}(U_1, U_2)$.
Les trois vecteurs (U_1, U_2, U_3) sont donc linéairement indépendants *i.e.* libres dans un espace de dimension 3. Ils en forment une base.

b. Déterminer les coordonnées de $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base (U_1, U_2, U_3).

On cherche x, y, z tels que $E_1 = xU_1 + yU_2 + zU_3$.
En résolvant le système associé, on trouve $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$ et $z = \frac{1}{3}$.

Commentaire
D'après la question précédente, on sait que ce triplet existe et qu'il est unique.

Les coordonnées de E_1 dans la base (U_1, U_2, U_3) sont donc $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

5. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n U_1 = U_1$, $A^n U_2 = U_2$ et $A^n U_3 = 4^n U_3$.

Démonstration par récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}$ sachant que $AU_1 = U_1$, $AU_2 = U_2$ et $AU_3 = 4U_3$.

b. En déduire l'expression de $A^n E_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire la première colonne de A^n.

D'après la question précédente et la décomposition de E_1 :

$$\begin{aligned}\mathrm{A}^n\mathrm{E}_1 &= \mathrm{A}^n\left(\frac{2}{3}\mathrm{U}_1+\frac{1}{3}\mathrm{U}_2+\frac{1}{3}\mathrm{U}_3\right)\\ &= \frac{2}{3}\mathrm{A}^n\mathrm{U}_1+\frac{1}{3}\mathrm{A}^n\mathrm{U}_2+\frac{1}{3}\mathrm{A}^n\mathrm{U}_3 \qquad \text{(par linéarité du produit à droite)}\\ &= \frac{2}{3}\mathrm{U}_1+\frac{1}{3}\mathrm{U}_2+\frac{4^n}{3}\mathrm{U}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4^n+2\\4^n-1\\4^n-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

c. Vérifier le résultat pour $n=0$ et $n=1$.

— Pour $n=0$, on obtient $\mathrm{A}^0\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4^0+2\\4^0-1\\4^0-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

La relation est vérifiée

— Pour $n=1$, même chose :

$$\mathrm{A}^1\mathrm{E}_1 = \mathrm{AE}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4^1+2\\4^1-1\\4^1-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}6\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

La relation est encore vérifiée.

Problème 2 – (Une suite récurrente et une série)

On considère la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) = \ln(1+u_n).$$

Partie A – Étude de la fonction f

1. Donner l'ensemble de définition de f et dresser son tableau de variations.

— **Ensemble de définition :** $f(x) = \ln(1+x)$ est définie si et seulement si $1+x>0$, soit $x>-1$.
L'ensemble de définition est donc $\mathcal{D}_f =]-1,+\infty[$.

— **Variations :** f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour tout $x>-1$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

Puisque $1+x>0$, on a $f'(x)>0$.
La fonction f est donc **strictement croissante** sur $]-1,+\infty[$.

— **Limites :** Par composition, on a facilement,

— $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$. La courbe admet admet une asymptote d'équation $x=-1$.

— $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

On en déduit le tableau de variations de f sur $]-1\,;+\infty[$:

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2. On pose, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $g(x) = x - \ln(1+x)$.
Étudier les variations de g et en déduire que

$$\forall\, x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x, \quad \text{avec égalité si, et seulement si, } x = 0.$$

— **Variations de g :** Comme somme de fonctions qui le sont, g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour tout $x > -1$:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x)-1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

Le signe de $g'(x)$ est celui de x (car le dénominateur $1+x$ est strictement positif). On en déduit le tableau de variations de f sur $]-1\,;+\infty[$:

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖	↘	0	↗	

— **Minimum :** g admet un minimum absolu en 0 valant :

$$g(0) = 0 - \ln(1) = 0$$

— **Inégalité :** Pour tout $x > -1$, $g(x) \geqslant 0$, ce qui se réécrit $x - \ln(1+x) \geqslant 0$, soit

$$\forall\, x \in]-1\,;+\infty[\,,\ \ln(1+x) \leqslant x.$$

L'égalité est atteinte si et seulement si $g(x) = 0$, c'est-à-dire uniquement en $x = 0$.

3. Montrer que l'intervalle $]0,1]$ est stable par f. (On rappelle que $\ln(2) \leqslant 1$.)

D'après la question (1.) , sur l'intervalle $]0\,;1]$, f est croissante donc, on a :

$$f(]0\,;1]) =]f(0)\,;f(1)] =]0\,;\ln(2)] \subset]0\,;1]\,.$$

L'intervalle $]0,1]$ est donc bien **stable par** f.

Partie B – Étude de la suite (u_n)

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,1]$.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

— Pour $n = 0$, par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_0 = 1 \in]0\,;1]$.

— Supposons $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in]0\,;1]$.
Alors u_{n+1} est bien définie et on à $u_{n+1} = f(u_n) \in]0\,;1]$ d'après la question précédente et l'hérédité.

— Initialisée depuis $n = 0$ et héréditaire, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0, 1].$$

5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question (2.) ,

$$u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \leqslant u_n,$$

avec égalité si, et seulement si $u_n = 0$ ce qui n'est pas d'après la question précédente.
Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$ *i.e.* la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

6. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis déterminer sa limite.

D'après le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, décroissante et minorée converge vers un réel $\ell \in]0\,;1]$.
Comme f est continue, la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nécessairement un point fixe de f.
On résout l'équation

$$f(x) = y \iff x - \ln(1 + x) = 0 \iff g(x) = 0.$$

D'après la question (2.) ,l'unique solution de cette équation est $x = 0$.

$$\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge donc vers } 0.$$

7. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle prenne en argument un réel `eps` strictement positif et renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant$ `eps`.

Éditeur
```python
import numpy as np

def seuil(eps):
    u = 1
    n = 0
    while ......... :
        u = .........
        n = .........
    return n
```

Éditeur
```python
import numpy as np

def seuil(eps):
    u = 1
    n = 0
    while u>=eps:
        u = np.log(1+u)
        n = n+1
    return n
```

8. Montrer que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

   On sait que $u_n \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

   Or, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\ln(1+u_n)}{u_n} \underset{u_n\to 0}{\sim} \dfrac{u_n}{u_n} = 1$.

   Donc, $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

Partie C – Convergence de la série $\sum u_n^2$

9. On pose, pour tout $x \in [0,1]$, $k(x) = x - \ln(1+x) - \dfrac{x^2}{4}$.

   a. Calculer $k'(x)$ et montrer que $k'(x) = \dfrac{x(1-x)}{2(1+x)}$.

   Par somme, la fonction k est dérivable sur $[0\,;1]$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall\, x \in [0\,;1]\,,\ k'(x) &= 1 - \frac{1}{1+x} - \frac{x}{2}\\ &= \frac{2(x+1) - 2 - x(x+1)}{2(x+1)}\\ &= \frac{-x^2+x}{2(x+1)} = \frac{x(1-x)}{2(1+x)}.\end{aligned}$$

   b. En déduire que $\forall\, x \in [0,1],\ x - \ln(1+x) \geqslant \dfrac{x^2}{4}$.

   Sur $[0\,;1]$, $x \geqslant 0$, $1-x \geqslant 0$ et $1+x \geqslant 0$ donc $k'(x) \geqslant 0$. La fonction k est donc croissante sur $[0\,;1]$.

   Comme $k(0) = 0 - \ln(1) - 0 = 0$, $\forall\, x \in [0\,;1]$, $k(x) \geqslant k(0) \geqslant 0$ *i.e.* $x - \ln(1+x) - \dfrac{x^2}{4} \geqslant 0$.

   On en déduit que

$$\forall\, x \in [0\,;1]\ \ x - \ln(1+x) \geqslant \frac{x^2}{4}.$$

10. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \leqslant 4\,(u_n - u_{n+1})$.

    D'après la question (4.) , $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\,;1]$. On peut donc remplacer x par u_n dans la question précédente et on obtient :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n^2 \leqslant 4\,(u_n - u_{n+1}).$$

11. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_n - u_{n+1})$ converge et calculer sa somme.

    Soit $N \in \mathbb{N}$.

    En reconnaissant une somme télescopique, on a :

$$\sum_{n=0}^{N}(u_n - u_{n+1}) = u_0 - u_N = 1 - u_N.$$

    D'après la question (6.) , la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_n - u_{n+1})$ est convergente et sa somme est 1.

12. Conclure que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \leqslant 4$.

Toujours en trois temps :

a. D'après la question (10.) , $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \leqslant 4\,(u_n - u_{n+1})$ terme général d'une série convergente d'après la question (11.) .

b. Il est clair que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n^2$ (et $0 \leqslant 4\,(u_n - u_{n+1})$ par l'inégalité précédente).

c. D'après le théorème de comparaison des séries à terme positif, la série de terme u_n^2 est convergente.

Enfin, soit $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n^2 \leqslant 4 \sum_{n=0}^{N} (u_n - u_{n+1}).$$

Par passage à la limite sur N (autorisé car les séries convergent) et conservation des inégalités larges, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \leqslant 4 \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n - u_{n+1}) = 4 \times 1 = 4.$$

Problème 3 – (Lois géométriques, lois de Poisson et couples)

Dans tout le problème, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est un espace probabilisé.

Partie A – Somme de deux variables géométriques

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires **indépendantes** suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

On pose $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$.

1. Rappeler $\mathbb{X}(\Omega)$, $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X})$.

C'est du cours :

$$\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

2. Déterminer $\mathbb{Z}(\Omega)$ puis montrer que $\forall\, n \geqslant 2$, $\mathbf{P}(\mathbb{Z} = n) = (n-1)\,p^2 q^{n-2}$.

Comme $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{Z}(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$ (tous les entiers $n \geqslant 2$ sont atteints, par exemple avec $\mathbb{X} = 1$ et $\mathbb{Y} = n-1$).

Soit $n \geqslant 2$. La famille $([\mathbb{X} = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, et $[\mathbb{X} = k] \cap [\mathbb{Z} = n] = [\mathbb{X} = k] \cap [\mathbb{Y} = n-k]$, qui est impossible si $k \geqslant n$.

Par indépendance :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbb{Z}=n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathbb{X}=k)\,\mathbf{P}(\mathbb{Y}=n-k)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(\mathbb{X}=k)\,\mathbf{P}(\mathbb{Y}=n-k) \qquad \text{(d'après la première remarque)}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p\,q^{k-1} \times p\,q^{n-k-1}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p^2 q^{n-2}\\ &= (n-1)\,p^2 q^{n-2}.\end{aligned}$$

3. Donner $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$.

Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(\mathbb{Z}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}) + \mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \dfrac{2}{p}$.

4. Soit $n \geqslant 2$. Déterminer la loi conditionnelle de $\mathbb{X}$ sachant $[\mathbb{Z}=n]$.
Reconnaître une loi usuelle. Cette loi dépend-elle de p ?

Soit $n \geqslant 2$. On a $\mathbf{P}(\mathbb{Z}=n) > 0$, donc $\mathbf{P}_{[\mathbb{Z}=n]}$ est bien définie.
Sachant $[\mathbb{Z}=n]$, $\mathbb{X}$ prend ses valeurs dans $[\![1, n-1]\!]$, et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{Z}=n]}(\mathbb{X}=k) = \frac{\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]\cap[\mathbb{Y}=n-k])}{\mathbf{P}(\mathbb{Z}=n)} = \frac{p^2q^{n-2}}{(n-1)p^2q^{n-2}} = \frac{1}{n-1}.$$

Sachant $[\mathbb{Z}=n]$, $\mathbb{X}$ suit donc la loi uniforme sur $[\![1, n-1]\!]$. Cette loi *ne dépend pas de* p.

5. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Z}$ sont-elles indépendantes ? (On pourra calculer $\mathbf{P}([\mathbb{X}=2]\cap[\mathbb{Z}=2])$.)

$\mathbb{Z}=2$ ou encore $\mathbb{X}+\mathbb{Y}=2$ si, et seulement si $\mathbb{X}=\mathbb{Y}=1$ car $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \geqslant 1$, donc

$$[\mathbb{X}=2]\cap[\mathbb{Z}=2] = \varnothing \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=2]\cap[\mathbb{Z}=2]) = 0.$$

Or, $\mathbf{P}(\mathbb{X}=2) = pq > 0$ et $\mathbf{P}(\mathbb{Z}=2) = p^2 > 0$, donc $\mathbf{P}(\mathbb{X}=2)\,\mathbf{P}(\mathbb{Z}=2) > 0$.
Ainsi $\mathbf{P}([\mathbb{X}=2]\cap[\mathbb{Z}=2]) \neq \mathbf{P}(\mathbb{X}=2)\mathbf{P}(\mathbb{Z}=2)$ *i.e.* les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont **pas** indépendantes.

Partie B – Minimum et maximum de deux variables géométriques

On conserve les notations de la partie A et on pose $\mathbb{U} = \min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et $\mathbb{V} = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

6. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(\mathbb{X} > n) = q^n$. (On pensera à écrire $[\mathbb{X} > n] = \bigcup_{k \geqslant n+1} [\mathbb{X}=k]$)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, la famille $([\mathbb{X} = k])_{k \geqslant n+1}$ est un système complet d'événements de $[\mathbb{X} > n]$, donc

Remarque
Très très classique donc à savoir refaire.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathbb{X} > n) &= \mathrm{P}\left(\bigcup_{k \geqslant n+1} [\mathbb{X} = k]\right) \\
&= \sum_{k \geqslant n+1} \mathrm{P}([\mathbb{X} = k]) && \text{(par incompatibilité des événements)} \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p\, q^{k-1} \\
&= p\, q^n \sum_{j=0}^{+\infty} q^j && \text{(on factorise et réindice)} \\
&= p\, q^n \times \frac{1}{1-q} && \text{(on reconnaît une série géométrique avec } |q| < 1) \\
&= q^n.
\end{aligned}$$

Commentaire
$[\mathbb{X} > n]$ signifie que les n premiers essais sont des échecs.

7. a. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(\mathbb{U} > n) = q^{2n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout se joue sur la définition du minimum : le minimum de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ est strictement supérieur à n si, et seulement si, $\mathbb{X} > n$ et $\mathbb{Y} > n$:

$$[\mathbb{U} > n] = [\mathbb{X} > n] \cap [\mathbb{Y} > n].$$

Par indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{U} > n) = \mathbf{P}(\mathbb{X} > n)\, \mathbf{P}(\mathbb{Y} > n) = q^n \times q^n = q^{2n}.$$

b. En déduire que $\mathbb{U}$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre, puis donner $\mathbf{E}(\mathbb{U})$. (On pensera à écrire l'événement $[\mathbb{U} = n]$ en fonction des événements incompatibles $[\mathbb{U} > n]$ et $[\mathbb{U} > n-1]$)

On a $\mathbb{U}(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[\mathbb{U} > n-1] = [\mathbb{U} = n] \sqcup [\mathbb{U} > n]$, événements incompatibles donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathbb{U} > n-1) &= \mathbf{P}(\mathbb{U} = n) + \mathbf{P}(\mathbb{U} > n) && \text{(par incompatibilité)} \\
\text{D'où, } \mathbf{P}(\mathbb{U} = n) &= \mathbf{P}(\mathbb{U} > n-1) - \mathbf{P}(\mathbb{U} > n) \\
&= q^{2(n-1)} - q^{2n} && \text{(on remplace)} \\
&= (1-q^2)\left(q^2\right)^{n-1} && \text{(on factorise)} \\
&= (1-q^2)(1-(1-q^2))^{n-1} && \text{(on arrange un peu pour reconnaître).}
\end{aligned}$$

De plus, $1 - q^2 = (1-q)(1+q) = p(2-p) \in]0, 1[$.
Ainsi $\mathbb{U}$ suit la loi géométrique de paramètre $p(2-p) = 1-q^2$, et

$$\mathbf{E}(\mathbb{U}) = \frac{1}{p(2-p)}.$$

8. a. Exprimer $\mathbb{U} + \mathbb{V}$ en fonction de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, $\{\min(\mathbb{X}(\omega), \mathbb{Y}(\omega)), \max(\mathbb{X}(\omega), \mathbb{Y}(\omega))\} = \{\mathbb{X}(\omega), \mathbb{Y}(\omega)\}$, donc

$$\mathbb{U} + \mathbb{V} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}.$$

b. En déduire que $\mathbb{V}$ admet une espérance et que $\mathbf{E}(\mathbb{V}) = \dfrac{3-2p}{p(2-p)}$.

On a $\mathbb{V} = \mathbb{X} + \mathbb{Y} - \mathbb{U}$. Les variables $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{U}$ admettent une espérance, donc $\mathbb{V}$ aussi par linéarité, et

$$\mathbf{E}(\mathbb{V}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}) + \mathbf{E}(\mathbb{Y}) - \mathbf{E}(\mathbb{U}) = \frac{2}{p} - \frac{1}{p(2-p)} = \frac{2(2-p)-1}{p(2-p)} = \frac{3-2p}{p(2-p)}.$$

9. a. Montrer que $\mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y}) = \dfrac{p}{2-p}$.

La famille $([\mathbb{X} = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, donc

$$[\mathbb{X} = \mathbb{Y}] = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^*} ([\mathbb{X} = k] \cap [\mathbb{Y} = k]), \qquad \text{la réunion étant disjointe.}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y}) &= \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^*} ([\mathbb{X} = k] \cap [\mathbb{Y} = k])\right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}\left([\mathbb{X} = k] \cap [\mathbb{Y} = k]\right) && \text{(par incompatibilité)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathbb{X} = k)\mathbf{P}(\mathbb{Y} = k) && \text{(par indépendance)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2(k-1)} && \text{(on remplace)} \\
&= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k-1} && \text{(on factorise)} \\
&= p^2 \times \frac{1}{1-q^2} && \left(\begin{smallmatrix}\text{(on reconnaît une série}\\ \text{géométrique avec } |q|<1\end{smallmatrix}\right) \\
&= \frac{p^2}{p(2-p)} \\
&= \frac{p}{2-p}.
\end{aligned}$$

b. Justifier que $\mathbf{P}(\mathbb{X} < \mathbb{Y}) = \mathbf{P}(\mathbb{X} > \mathbb{Y})$ puis en déduire $\mathbf{P}(\mathbb{X} < \mathbb{Y})$.

Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes et de même loi : le couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ a donc même loi que le couple $(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$, car pour tout $(k, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = k] \cap [\mathbb{Y} = l]) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = k)\mathbf{P}(\mathbb{Y} = l) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = l)\mathbf{P}(\mathbb{Y} = k) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = l] \cap [\mathbb{Y} = k]).$$

D'où $\mathbf{P}(\mathbb{X} < \mathbb{Y}) = \mathbf{P}(\mathbb{Y} < \mathbb{X}) = \mathbf{P}(\mathbb{X} > \mathbb{Y})$.
Les événements $[\mathbb{X} < \mathbb{Y}]$, $[\mathbb{X} = \mathbb{Y}]$ et $[\mathbb{X} > \mathbb{Y}]$ forment un système complet d'événements, donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathbb{X} < \mathbb{Y}) + \mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y}) + \mathbf{P}(\mathbb{X} > \mathbb{Y}) &= 1 \\
\mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y}) + 2\,\mathbf{P}(\mathbb{X} < \mathbb{Y}) &= 1 \\
2\mathbf{P}(\mathbb{X} < \mathbb{Y}) &= 1 - \mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y}) \\
&= 1 - \frac{p}{2-p} = \frac{2(1-p)}{2-p}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbf{P}(\mathbb{X} < \mathbb{Y}) = \dfrac{1-p}{2-p} = \dfrac{q}{2-p}$.

10. On donne la fonction Python suivante, où `rd.geometric(p)` simule une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$.

Éditeur
```
import numpy.random as rd

def estimation(p, N):
    c = 0
    for k in range(N):
        x = rd.geometric(p)
        y = rd.geometric(p)
        if ......... :
            c = c + 1
    return c / N
```

a. Compléter la condition de la ligne `if` pour que `estimation(p, N)` renvoie une estimation de $\mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y})$.

Il faut compter le nombre de fois où les deux simulations donnent la même valeur :

Éditeur
```
if x == y :
```

La fonction renvoie alors la fréquence empirique $\frac{c}{N}$ des réalisations de l'événement $[\mathbb{X} = \mathbb{Y}]$.

b. **(khûbe)** Quelle valeur approchée renvoie `estimation(0.5, 100000)` ? Justifier.

Notons I_k l'indicatrice de l'événement $[\mathbb{X}_k = \mathbb{Y}_k]$ au k-ième tirage.
Les I_k sont indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y})$, donc $\frac{c}{N}$ est leur moyenne empirique.
D'après la loi faible des grands nombres, elle converge en probabilité vers $\mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y})$.
Pour $p = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y}) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$. Avec $N = 100000$, la fonction renvoie donc une valeur proche de $\frac{1}{3}$.

Partie C – Un couple de variables de Poisson

Soient $\lambda > 0$, $a \in]0, 1[$ et $b = 1 - a$.

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, sachant $[\mathbb{X} = n]$, la variable $\mathbb{Y}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, a)$.

On pose $\mathbb{T} = \mathbb{X} - \mathbb{Y}$.

11. Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

a. Montrer que $[\mathbb{Y} = i] \cap [\mathbb{T} = j] = [\mathbb{X} = i + j] \cap [\mathbb{Y} = i]$.

Procédons par double inclusion.

— Si $\mathbb{Y} = i$ et $\mathbb{T} = j$, alors $\mathbb{X} = \mathbb{Y} + \mathbb{T} = i + j$ et $\mathbb{Y} = i$.

— Si $\mathbb{X} = i + j$ et $\mathbb{Y} = i$, alors $\mathbb{T} = \mathbb{X} - \mathbb{Y} = i + j - i = j$ et $\mathbb{Y} = i$.

D'où l'égalité.

b. En déduire que $\mathbf{P}([\mathbb{Y}=i]\cap[\mathbb{T}=j]) = \mathbf{P}(\mathbb{X}=i+j)\,\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=i+j]}(\mathbb{Y}=i)$.

Comme $\lambda>0$, $\mathbf{P}(\mathbb{X}=i+j) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} > 0$.

D'après la question précédente et la formule des probabilités composées :

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=i]\cap[\mathbb{T}=j]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}=i+j]\cap[\mathbb{Y}=i]) = \mathbf{P}(\mathbb{X}=i+j)\,\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=i+j]}(\mathbb{Y}=i).$$

12. Montrer que, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$,

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=i]\cap[\mathbb{T}=j]) = e^{-\lambda a}\frac{(\lambda a)^i}{i!}\times e^{-\lambda b}\frac{(\lambda b)^j}{j!}.$$

Sachant $[\mathbb{X}=i+j]$, $\mathbb{Y}$ suit la loi $\mathcal{B}(i+j,a)$, donc $\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=i+j]}(\mathbb{Y}=i) = \binom{i+j}{i} a^i\,b^j$ (avec $1-a=b$).

Ainsi :

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=i]\cap[\mathbb{T}=j]) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}\times\frac{(i+j)!}{i!\,j!}a^ib^j = e^{-\lambda}\frac{(\lambda a)^i(\lambda b)^j}{i!\,j!}.$$

Comme $a+b=1$, $e^{-\lambda} = e^{-\lambda a}\,e^{-\lambda b}$, d'où

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=i]\cap[\mathbb{T}=j]) = e^{-\lambda a}\frac{(\lambda a)^i}{i!}\times e^{-\lambda b}\frac{(\lambda b)^j}{j!}.$$

13. En déduire les lois de $\mathbb{Y}$ et de $\mathbb{T}$ (on les reconnaîtra).

La famille $([\mathbb{T}=j])_{j\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
Pour tout $i\in\mathbb{N}$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{Y}=i) = \sum_{j=0}^{+\infty}\mathbf{P}([\mathbb{Y}=i]\cap[\mathbb{T}=j]) = e^{-\lambda a}\frac{(\lambda a)^i}{i!}\sum_{j=0}^{+\infty}e^{-\lambda b}\frac{(\lambda b)^j}{j!} = e^{-\lambda a}\frac{(\lambda a)^i}{i!}\times 1.$$

Ainsi $\mathbb{Y}\rightsquigarrow\mathcal{P}(\lambda a)$.

De même, pour tout $j\in\mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\mathbb{T}=j) = e^{-\lambda b}\dfrac{(\lambda b)^j}{j!}$, donc $\mathbb{T}\rightsquigarrow\mathcal{P}(\lambda b)$.

14. Les variables $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{T}$ sont-elles indépendantes ? Justifier.

On a déjà $\mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{T}(\Omega) = \mathbb{N}$.
De plus, d'après les questions précédentes, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$,

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=i]\cap[\mathbb{T}=j]) = \mathbf{P}(\mathbb{Y}=i)\,\mathbf{P}(\mathbb{T}=j).$$

Les variables $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{T}$ sont **indépendantes**.

Commentaire
C'est un résultat classique, fréquent donc à retenir : si le nombre total $\mathbb{X}$ suit une loi de Poisson et qu'on le répartit en deux catégories indépendamment (procédé appelé « éclaircissement de Poisson »), les deux effectifs sont indépendants et suivent des lois de Poisson.

V

Rappels d'ECG-1 Espérance, Variance et indépendance

Plan du chapitre

I Espérance et Variance ***539***

I.1 Espérance et la formule de transfert 539

I.2 Moments et variance 540

I.3 Cas des lois usuelles discrètes 541

II Indépendance ***543***

II.1 Cas général 543

II.2 Cas discret 544

II.3 Lien avec l'espérance 545

II.4 Lien avec la variance 545

TD 7 : Rappels d'ECG-1 – Espérance, Variance ***545***

Programme : Espérance, Variance & Co ***561***

If there is a 50-50 chance that something can go wrong, then nine times out of 10 it will.

Paul Harvey
Animateur radio américain (1918-2009)

I. Espérance et Variance

I.1 – Espérance et la formule de transfert

Définition 1 – Espérance :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire discrète infinie. On note $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$.

On dit que $\mathbb{X}$ admet une espérance, *notée $\mathbf{E}(\mathbb{X})$, si la série de terme général $x_k\mathbf{P}([\mathbb{X} = x_k])$ est absolument convergente.*

Alors on définit l'espérance de $\mathbb{X}$ par

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \mathbf{P}(\mathbb{X} = x_k).$$

Attention
Certaines variables aléatoires n'admettent pas d'espérance.
Elle est nécessaire pour justifier que l'espérance est bien définie et ne dépend pas du choix de l'indexation $\mathbb{X}(\Omega)$.

Contre-exemple 1 – Variable aléatoires sans espérance :

On considère une variable aléatoire discrète $\mathbb{X}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et telle que :

$$\forall\, k \geqslant 1,\ \mathbb{P}([\mathrm{X} = k]) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}([\mathrm{X} = k]) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$, série des harmonique divergente.

On en déduit que $\mathbb{X}$ n'admet pas d'espérance.

Proposition 1 – Propriétés de l'espérance :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variables aléatoires discrètes sur un même espace probabilisé.

Linéarité : *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,* $\mathbf{E}(a\mathbb{X} + b\mathbb{Y}) = a\mathbf{E}(\mathbb{X}) + b\mathbf{E}(\mathbb{Y})$.

Croissance : *Si $\mathbb{X} \leqslant \mathbb{Y}$ alors* $\mathbf{E}(\mathbb{X}) \leqslant \mathbf{E}(\mathrm{Y})$.

Proposition 2 – Existence par domination :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variables aléatoires discrètes sur un même espace probabilisé.

Si $\mathbb{Y}$ admet une espérance et $0 \leqslant |\mathbb{X}| \leqslant \mathbb{Y}$ alors $\mathbb{X}$ admet une espérance et $|\mathbf{E}(\mathbb{X})| \leqslant \mathbf{E}(\mathbb{Y})$.

Attention
Ne pas confondre avec la propriété de croissance de l'espérance.

Théorème 3 – Formule de transfert :

Soient $\mathbb{X}$ une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et g une application définie sur $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathrm{I}\}$.

Les énoncés suivants sont équivalents :

(i) *La variable aléatoire $g(\mathbb{X})$ possède une espérance.*

(ii) *La série de terme général $g(x_k)\,\mathbf{P}([\mathbb{X} = x_k])$ est absolument convergente.*

Dans ce cas,

$$\mathbf{E}(g(\mathbb{X})) = \sum_{k\in I} g(x_k)\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x_k])\,.$$

Exemple 2 :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ telle que $\mathbb{X}(\Omega) = [\![1\,;n]\!]$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ tel que

$$\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]\,, \quad \mathbf{P}(\mathbb{X}=k) = \lambda k.$$

Comme $\mathbb{X}$ ne peut pas prendre la valeur 0, on peut définir $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \dfrac{1}{\mathbb{X}}$. Quelle est la loi de $\mathbb{Z}$?

Précisons que la condition $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) = 1$, impose $\lambda = \dfrac{2}{n(n+1)}$.
Avec le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbb{Z}) &= \sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{k}\right)\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\mathbf{P}([\mathbb{X}=k])\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\lambda k^2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\lambda k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,\lambda + \lambda\, n\\ &= \frac{2n+1}{3} + \frac{2}{n+1} = \frac{2n^2+3n+7}{3(n+1)}.\end{aligned}$$

Remarque : *La formule de transfert permet de prouver une version faible de la linéarité de l'espérance. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{X}$, une variable aléatoire admettant une espérance $\mathbf{E}(a\mathbb{X}+b) = a\mathbf{E}(\mathbb{X}) + b$.*

Preuve : Si φ est une fonction affine, $\varphi : t \in \mathbb{R} \longmapsto at + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}(a\mathbb{X}+b) = \sum_{i=1}^{m}(ax_i+b)\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x_i]) = a\sum_{i=1}^{m} x_i\mathbf{P}([\mathbb{X}=x_i]) + \sum_{i=1}^{m}\mathbf{P}([\mathbb{X}=x_i]) = a\mathbf{E}(\mathbb{X}) + b.$$

I.2 – Moments et variance

Pour tout entier naturel s, le moment d'ordre s *d'une variable aléatoire $\mathbb{X}$ est le nombre $m_s(\mathbb{X})$ défini par :*

$$m_s(\mathbb{X}) = \mathbf{E}\left(\mathbb{X}^s\right).$$

En particulier pour $s = 1$, on retrouve l'espérance $m_1(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{X})$.

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, et sous réserve de convergence absolue, la formule de transfert donne :

$$m_s(\mathbb{X}) = \sum_{k\in I} x_k^s \mathbf{P}(\mathbb{X}=x_k)\,.$$

Remarque
On montre que si $\mathbb{X}$ a un moment d'ordre r alors, $\mathbb{X}$ admet un moment d'ordre s pour tout entier $s \leqslant r$.

Remarque
Une variable aléatoire finie admet des moments à tout ordre.

Définition 2 – Variance et écart-type :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

— *On appelle* variance *d'une variable aléatoire $\mathbb{X}$, notée $\mathbf{V}(\mathbb{X})$, la quantité*

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}\left((\mathbb{X} - \mathbf{E}(\mathbb{X}))^2\right).$$

— *On appelle* écart-type *de X, noté $\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{X})$, la quantité*

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{X}) = \sqrt{\mathbf{V}(\mathbb{X})}.$$

Rappel

L'écart-type permet de quantifier les écarts par rapport à la moyenne. Un écart-type fort traduit un « grand éloignement » des valeurs de $\mathbb{X}$ par rapport à sa moyenne.

Remarques :

— *C'est l'existence d'un moment d'ordre 2 qui permet de justifier que la variance est bien définie.*

— *La quantité $\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{X})$ est bien définie car $(\mathbb{X} - \mathbf{E}(\mathbb{X}))^2 \geqslant 0$. Donc, par croissance de l'espérance, $\mathbf{V}(\mathbb{X}) \geqslant 0$.*

Proposition 4 – Propriétés de la variance :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

— *$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = 0$ si et seulement si $\mathbb{X}$ est une application presque sûrement constante.*

— *Pour tous réels a, b,*

$$\mathbf{V}(a\mathbb{X} + b) = a^2\mathbf{V}(\mathbb{X}) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}(a\mathbb{X} + b) = |a|\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{X}).$$

Vocabulaire : *Une variable aléatoire $\mathbb{X}$ est dite* centrée *si $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 0$.*

Elle est dite réduite *si $\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{X}) = 1$.*

À retenir

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire.
La variable aléatoire

$$\frac{\mathbb{X} - \mathbf{E}(\mathbb{X})}{\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{X})}$$

est centrée, réduite.

En pratique, on calcule la variance avec :

Théorème 5 – Formule de König-Huygens :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}\left(\mathbb{X}^2\right) - \mathbf{E}(\mathbb{X})^2.$$

I.3 – Cas des lois usuelles discrètes

On dit que $\mathbb{X}$ est une variable aléatoire certaine, *ou* presque sûrement constante *s'il existe un réel c tel que $\mathbf{P}(\mathbb{X} = c) = 1$.*

Alors,

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = c \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = 0.$$

Proposition 6 – Espérance et variance, cas discret dénombrable :

Soient $\mathbb{X}$, une variable aléatoire, $p \in]0\,;1[$, $q = 1-p$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

— *Si* $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$,	*alors*	$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = p$	*et*	$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = p(1-p)$.
— *Si* $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$,	*alors*	$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = np$	*et*	$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = np(1-p)$.
— *Si* $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 1\,;n \rrbracket)$,	*alors*	$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \dfrac{n+1}{2}$	*et*	$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \dfrac{n^2-1}{12}$.
— *Si* $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$, *alors* $\mathbb{X}$ *admet une espérance et une variance*	*avec*	$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \dfrac{1}{p}$	*et*	$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \dfrac{q}{p^2}$.
— *Si* $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$, *alors* $\mathbb{X}$ *admet une espérance et une variance*	*avec*	$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \lambda$	*et*	$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \lambda$.

Preuve : Via les fonctions génératrices

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{X}$ une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\llbracket 1\,;n \rrbracket$.

On considère sa fonction génératrice $\mathrm{G}_{\mathbb{X}}$ définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{G}_{\mathbb{X}}(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) t^k.$$

Il s'agit d'un polynôme et l'on peut dériver terme à terme :

$$\mathrm{G}'_{\mathbb{X}}(t) = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbf{P}([\mathbb{X} = k])\, t^{k-1}.$$

En évaluant en $t = 1$, on obtient

$$\mathrm{G}'_{\mathbb{X}}(1) = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = \mathbf{E}(\mathbb{X}).$$

En dérivant une seconde fois,

$$\mathrm{G}''_{\mathbb{X}}(t) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,\mathbf{P}([\mathbb{X} = k])\, t^{k-2},$$

Puis,

$$\mathrm{G}''_{\mathbb{X}}(1) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\,\mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = \mathbf{E}(\mathbb{X}(\mathbb{X}-1)).$$

Or, $\mathbb{X}(\mathbb{X}-1) = \mathbb{X}^2 - \mathbb{X}$ entraîne $\mathbf{E}(\mathbb{X}(\mathbb{X}-1)) = \mathbf{E}\left(\mathbb{X}^2\right) - \mathbf{E}(\mathbb{X})$.

D'où,

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}^2) = \mathrm{G}''_{\mathbb{X}}(1) + \mathrm{G}'_{\mathbb{X}}(1).$$

Par conséquent,

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathrm{G}''_{\mathbb{X}}(1) + \mathrm{G}'_{\mathbb{X}}(1) - \left(\mathrm{G}'_{\mathbb{X}}(1)\right)^2.$$

Par exemple, si $\mathbb{X} \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors $\mathrm{G}_{\mathbb{X}}(t) = (1-p+pt)^n$,

$$\mathrm{G}'_{\mathbb{X}}(t) = np(1-p+pt)^{n-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{G}''_{\mathbb{X}}(t) = n(n-1)p^2(1-p+pt)^{n-2}.$$

D'où $\mathrm{G}'_{\mathbb{X}}(1) = np$ et $\mathrm{G}''_{\mathbb{X}}(1) = n(n-1)p^2$ qui donnent

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbb{X}) = np \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{X}) &= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 \\ &= np(1-p). \end{aligned}$$

II. Indépendance

II.1 – Cas général

Définition 3 – Indépendance :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires réelles sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

D1 • *On dit que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont* indépendantes *si pour tout intervalle I et J de $\mathbb{R}$,*

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} \in \mathrm{I}] \cap [\mathbb{Y} \in \mathrm{J}]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} \in \mathrm{I}]) \cdot \mathbf{P}([\mathbb{Y} \in \mathrm{J}]).$$

Soit $(\mathbb{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

D2 • *Les variables aléatoires $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ sont* mutuellement indépendantes *si pour tout intervalles $\mathrm{I}_1, \dots, \mathrm{I}_n$ de $\mathbb{R}$,*

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [\mathbb{X}_i \in \mathrm{I}_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left([\mathbb{X}_i = \mathrm{I}_i]\right).$$

D3 • *La suite $(\mathbb{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes si, pour tout $n \geqslant 2$, les variables aléatoires $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ sont indépendantes.*

Autrement dit, deux variables aléatoires réelles $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes si pour tout intervalles I et J de $\mathbb{R}$, les événements $[\mathbb{X} \in \mathrm{I}]$ et $[\mathbb{Y} \in \mathrm{J}]$ sont indépendants.

Remarque : *Dans ce cas, on constate que si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes alors*

$$\forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}_{\mathbb{X}}(t_1) \cdot \mathrm{F}_{\mathbb{Y}}(t_2) = \mathbf{P}\left([\mathbb{X} \leqslant t_1] \cap [\mathbb{Y} \leqslant t_2]\right).$$

Preuve : Soient $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. On a

$$[\mathbb{X} \leqslant t_1] \cap [\mathbb{Y} \leqslant t_2] = \bigcup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)\\ x\leqslant t_1, y\leqslant t_2}} [\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y].$$

L'union est disjointe, par la propriété d'additivité d'une probabilité, puis par la définition de l'indépendance, on a :

Remarque
La réciproque est vraie mais plus délicate à prouver.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left([\mathbb{X} \leqslant t_1] \cap [\mathbb{Y} \leqslant t_2]\right) &= \sum_{\substack{(x,y)\in\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)\\ x\leqslant t_1, y\leqslant t_2}} \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y]) \\
&= \sum_{\substack{(x,y)\in\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)\\ x\leqslant t_1, y\leqslant t_2}} \mathbf{P}(\mathbb{X} = x) \cdot \mathbf{P}(\mathbb{Y} = y) \\
&= \left(\sum_{\substack{x\in\mathbb{X}(\Omega)\\ x\leqslant t_1}} \mathbf{P}(\mathbb{X} = x)\right) \cdot \left(\sum_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)} \mathbf{P}(\mathbb{Y} = y)\right) \\
&= \mathrm{F}_{\mathbb{X}}(t_1) \cdot \mathrm{F}_{\mathbb{Y}}(t_2).
\end{aligned}$$

Théorème 7 – Lemme des coalitions :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires réelles et $f : \mathbb{X}(\Omega) \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{Y}(\Omega) \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes, alors $f(\mathbb{X})$ et $g(\mathbb{Y})$ sont aussi indépendantes.

Exemple : *Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes, alors $\mathbb{X}^2$ et $\mathbb{Y}^3$ sont également indépendantes.*

Ce théorème se généralise facilement à plus n variables aléatoires.

Théorème 8 – Lemme des coalitions :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.

Soient $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ des v.a.r. et $f_1 : \mathbb{X}_1(\Omega) \to \mathbb{R}, \dots, f_n : \mathbb{X}_n(\Omega) \to \mathbb{R}$ des fonctions.

T1 • *Si $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ sont mutuellement indépendantes, alors $f_1(\mathbb{X}_1), \dots, f_n(\mathbb{X}_n)$ sont mutuellement indépendantes.*

T2 • *Si $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ sont discrètes et mutuellement indépendantes, alors toute v.a.r. s'exprimant en fonction des v.a.r. $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_p$ est indépendante de toute v.a.r. s'exprimant en fonction des v.a.r. $\mathrm{X}_{p+1}, \dots, \mathrm{X}_n$ (pour $p \in [\![2\,;n-1]\!]$).*

Exemples 3 :

Soient $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_5$ des v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes. Alors :

- *les v.a.r. $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2^2$, $2\mathbb{X}_3$, $e^{\mathbb{X}_4} - 1$ et $|\mathbb{X}_5|$ sont mutuellement indépendantes.*
- *les v.a.r. $2\mathbb{X}_1\mathbb{X}_3 - \mathbb{X}_5$ et $\mathbb{X}_2^2$ sont indépendantes.*
- *les v.a.r. $\min(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ et $\max(\mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4, \mathbb{X}_5)$ sont indépendantes.*

II.2 – Cas discret

Dans le cas discret la définition (3) se simplifie aussi :

Définition 4 – Indépendance, cas discret :

D1 • *Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires discrètes sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.*
On dit que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes *si*

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega), \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=x] \cap [\mathbb{Y}=y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}=x]) \cdot \mathbf{P}([\mathbb{Y}=y]).$$

D2 • *Les variables aléatoires $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ sont* mutuellement indépendantes *si*

$$\forall\,(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{X}_1(\Omega) \times \cdots \times \mathbb{X}_n(\Omega), \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [\mathbb{X}_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left([\mathbb{X}_i = x_i]\right).$$

II.3 – Lien avec l'espérance

Théorème 9 – Espérance d'un produit :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires réelles.

On suppose que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont ***indépendantes*** *et admettent chacune une espérance.*

Alors la variable aléatoire $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ admet une espérance et $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}) \cdot \mathbf{E}(\mathbb{Y})$.

Attention
La réciproque est fausse.

Exemple *Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variable aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux la loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0\,;1[$ alors $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = p^2$.*

Remarque
Cela n'intéresse personne de savoir écrire $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$.

II.4 – Lien avec la variance

Théorème 10 – Variance d'une somme :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires réelles.

On suppose que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes et admettent chacune un moment d'ordre 2.

Alors la variable aléatoire $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$ admet une variance et $\mathbf{V}(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y})$.

Attention
La réciproque est fausse.

Exemple : *Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variable aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux la loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0\,;1[$ alors $\mathbf{V}(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = 2p(1-p)$.*

Remarque
Cela n'intéresse personne de savoir écrire $\mathbf{V}(\mathbb{X} + \mathbb{Y})$.

TD 7

Rappels d'ECG-1 -- Espérance, Variance

III. Classiques

Exercice V.1 – (Calcul d'espérance et de variance) [Correction p. 552]

Soit $\mathbb{X}$ définie par

x_i	0	1	2
$\mathbf{P}([\mathbb{X}=x_i])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ puis $\mathbf{V}(\mathbb{X})$.

Exercice V.2 – (Transformation affine) [Correction p. 552]

Soit $\mathbb{X}$ telle que

x_i	-1	1	3
$\mathbf{P}([\mathbb{X}=x_i])$	0,2	0,5	0,3

On pose $\mathbb{Y}=2\mathbb{X}-1$.

1. Donner la loi de $\mathbb{Y}$.
2. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{Y})$.

Exercice V.3 – (Espérance d'une fonction) [Correction p. 552]

Soit $\mathbb{X}$ définie par

x_i	0	1	2	3
$\mathbf{P}([\mathbb{X}=x_i])$	0,1	0,2	0,3	0,4

On pose $\mathbb{Y}=\mathbb{X}^2+1$.

Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$.

IV. Concours

Exercice V.4 – (Variance d'un produit) [Correction p. 552]

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes admettant un moment d'ordre 2.

1. Montrer que $\mathbf{V}(\mathbb{X}\mathbb{Y})=\mathbf{E}(\mathbb{X}^2)\mathbf{E}(\mathbb{Y}^2)-\mathbf{E}(\mathbb{X})^2\mathbf{E}(\mathbb{Y})^2$.
2. Retrouver la variance de $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ lorsque $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ suivent indépendamment la loi $\mathcal{B}(p)$.

Exercice V.5 – (Espérance d'une fonction de loi Binomiale) [Correction p. 552]

Soient $m\in\mathbb{N}^*$ et $p\in]0,1[$. On suppose que $\mathbb{X}\sim\mathcal{B}(m,p)$. On note $\mathbb{Y}=\dfrac{1}{\mathbb{X}+1}$. Calculer l'espérance de $\mathbb{Y}$.

Exercice V.6 – (Inégalité sur l'espérance de l'inverse) [Correction p. 553]

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ admettant une espérance.

1. Justifier que $1/\mathbb{X}$ admet une espérance et exprimer $\mathbf{E}(1/\mathbb{X})$ à l'aide des x_k et $p_k = \mathbf{P}(\mathbb{X} = x_k)$.
2. En déduire que $\mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(1/\mathbb{X}) \geqslant 1$.

Indication : On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice V.7 – (Inégalité de Jensen) [Correction p. 553]

oit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire finie et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Démontrer que $\varphi(\mathbf{E}(\mathbb{X})) \leqslant \mathbf{E}(\varphi(\mathbb{X}))$.

Exercice V.8 – (Minimum de tirages sans remise) [Correction p. 554]

On dispose d'une urne remplie de N boules numérotées de 1 à N. On effectue k tirages sans remise avec $k \leqslant \mathrm{N}$. Soit $\mathbb{X}$ le plus petit numéro obtenu.

1. Donner la loi de $\mathbb{X}$. En déduire l'égalité : $\displaystyle\sum_{j=0}^{m} \binom{n+j}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\mathrm{N}-k+1} \mathbf{P}(\mathbb{X} \geqslant i)$.
3. En déduire que $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \dfrac{\mathrm{N}+1}{k+1}$.

Exercice V.9 – (Nouvelle expression de l'espérance) [Correction p. 555]

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(\mathbb{X} > k)\right) - n\mathbf{P}(\mathbb{X} > n)$.
2. On suppose que $\mathbb{X}$ admet une espérance.
   a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n\mathbf{P}(\mathbb{X} > n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$.
   b. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\mathbb{X} > k)$ converge et que :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathbb{X} > k) \quad \text{(E)}$$

3. Réciproquement, si $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\mathbb{X} > k)$ converge, montrer que $\mathbb{X}$ admet une espérance et la relation (E).
4. Adapter le raisonnement pour montrer que si $\mathbb{X}$ admet un moment d'ordre 2 :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)\mathbf{P}(\mathbb{X} > k)$$

Exercice V.10 – (Majoration de la variance) [Correction p. 555]

Soient $\mathbb{X}$ une variable aléatoire réelle et $a, b \in \mathbb{R}$. On note $m = \mathbf{E}(\mathbb{X})$.

1. Montrer que $\mathbf{E}((\mathbb{X}-a)(b-\mathbb{X})) = (m-a)(b-m) - \mathbf{V}(\mathbb{X})$.
2. On suppose $a < b$ et $\mathbb{X}(\Omega) \subset [a, b]$.
   a. Montrer que $(m-a)(b-m) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$. En déduire $\mathbf{V}(\mathbb{X}) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$.
   b. Ce majorant peut-il être amélioré ?

Exercice V.11 – (Détermination de loi par les moments) [Correction p. 556]

1. Soit $\mathbb{Y}$ une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ avec les probabilités p_0, p_1, p_2. On suppose $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = 1$ et $\mathbf{E}(\mathbb{Y}^2) = 5/3$. Calculer p_0, p_1, p_2.
2. Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels distincts et $\varphi : \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}^{n+1}, \mathrm{Q} \longmapsto (\mathrm{Q}(x_0), \dots, \mathrm{Q}(x_n))$.
   a. Montrer que φ est un isomophisme d'espaces vectoriels.
   b. Déterminer la matrice de φ dans les bases canoniques.
   c. Soit $\mathbb{X}$ une variable finie à valeurs dans $\{x_0, \dots, x_n\}$. Connaissant $\mathbf{E}(\mathbb{X}), \dots, \mathbf{E}(\mathbb{X}^n)$, peut-on déterminer la loi de $\mathbb{X}$?

Exercice V.12 – (Propriétés des moments d'ordre 4) [Correction p. 556]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère une variable aléatoire $\mathbb{X}$ admettant des moments jusqu'à l'ordre 4 et vérifiant :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(\mathbb{X}^2) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^4) = 1$$

1. Montrer que $\alpha \in [-1, 1]$.
2. Trouver la loi de $\mathbb{X}$.

Exercice V.13 – (Kurtosis d'une variable aléatoire) [Correction p. 556]

Le kurtosis d'une variable $\mathbb{X}$ est défini par $\mathrm{K}(\mathbb{X}) = \dfrac{\mu_4(\mathbb{X})}{(\mu_2(\mathbb{X}))^2} - 3$, où $\mu_n(\mathbb{X}) = \mathbf{E}[(\mathbb{X} - \mathbf{E}(\mathbb{X}))^n]$.

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{K}(\alpha\mathbb{X} + \beta) = \mathrm{K}(\mathbb{X})$.
2. Montrer que $\mathrm{K}(\mathbb{X}) \geqslant -2$.
3. Soit $\mathbb{X} \sim \mathcal{G}(p)$. Montrer que $\mathbb{X}$ possède un kurtosis et le calculer.

Exercice V.14 – (Écran défectueux et simulation Python) [Correction p. 557]

Soit $\mathbb{X} \sim \mathcal{B}(n, p)$. Si $\mathbb{X} = 0$, l'écran affiche une valeur uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Sinon, il affiche $\mathbb{X}$. On note Y_n la valeur affichée.

1. a. Proposer un programme Python pour simuler Y_n.
   b. Approcher $\mathbf{E}(\mathrm{Y}_{10})$ pour $p = 1/2$.
2. Exprimer $\mathbf{E}(\mathrm{Y}_n)$ en fonction de n et p.

Exercice V.15 – (Inégalité de Hölder) [Correction p. 557]

1. Soient $p, q > 0$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
   a. Pour $a > 0$, étudier $f(x) = \dfrac{x^q}{q} + \dfrac{a^p}{p} - ax$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b. En déduire l'inégalité : $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ pour tous $a, b \geqslant 0$.
2. Soient $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ deux variables positives d'espérance de puissance p et q finies.
   a. Justifier que XY admet une espérance.
   b. Démontrer l'inégalité de Hölder : $\mathbf{E}(\mathrm{XY}) \leqslant \mathbf{E}(\mathbb{X}^p)^{1/p}\mathbf{E}(\mathbb{Y}^q)^{1/q}$.
3. Application : Montrer que pour $0 < r < s \leqslant n$, $\mathbf{E}(\mathrm{Z}^r)^{1/r} \leqslant \mathbf{E}(\mathrm{Z}^s)^{1/s}$.

Exercice V.16 – (Urne de Polya) [Correction p. 558]

On considère une urne avec a boules blanches et b boules noires. À chaque tirage, on remet la boule tirée et on ajoute une boule de la même couleur. On note $\mathbb{X}_n$ le nombre de boules blanches tirées en n tirages.

1. a. Proposer un programme `Python` simulant $\mathbb{X}_n$.
   b. Comment approcher $\mathbf{E}(\mathbb{X}_{20})$ pour $a = b = 5$?
2. Montrer que $\mathbf{P}(\mathbb{X}_n = k) = \dbinom{n}{k} \dfrac{a^{[k]}b^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$.
3. Montrer que $\mathbf{E}(\mathbb{X}_n) = n\dfrac{a}{a+b}$.

Exercice V.17 – (Espérance conditionnelle (Vrai ou Faux)) [Correction p. 558]

Soient A un événement tel que $\mathbf{P}(\mathrm{A}) \notin \{0, 1\}$ et $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ deux variables aléatoires.

1. $\mathbf{E}(\mathbb{X} \mid \Omega) = \mathbf{E}(\mathbb{X})$.
2. $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{X} \mid \mathrm{A}) + \mathbf{E}(\mathbb{X} \mid \overline{\mathrm{A}})$.
3. $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \mathbf{P}(\mathrm{A})\mathbf{E}(\mathbb{X} \mid \mathrm{A}) + \mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}})\mathbf{E}(\mathbb{X} \mid \overline{\mathrm{A}})$.
4. Si $[\mathbb{X} = x]$ est indépendant de A pour tout x, alors $\mathbf{E}(\mathbb{X} \mid \mathrm{A}) = \mathbf{E}(\mathbb{X})$.
5. Si $\mathbb{X} \leqslant \mathbb{Y}$ alors $\mathbf{E}(\mathbb{X} \mid \mathrm{A}) \leqslant \mathbf{E}(\mathbb{Y} \mid \mathrm{A})$.
6. Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes, alors $\mathbf{E}(\mathbb{Y} \mid [\mathbb{X} = x]) = \mathbf{E}(\mathbb{Y})$.

Exercice V.18 – (Partie de Tennis de Table) [Correction p. 558]

Alice et Bob font une partie. Alice réussit ses coups avec la probabilité p_{A}, Bob avec la probabilité p_{B}. Alice commence. Soit $\mathbb{X}$ le nombre de coups valides échangés.

1. Donner la loi de $\mathbb{X}$ et son espérance.
2. Préciser $\mathbf{E}(\mathbb{X} \mid [\mathbb{X} \geqslant 1])$.

Exercice V.19 – (Procédé de tirage sans remise progressive) [Correction p. 559]

Une urne contient N boules. Si la boule i est tirée au tirage k, on la remet et on retire toutes les boules $> i$. Soit $\mathbb{X}_k$ le numéro tiré au k-ième tirage.

1. Préciser $\mathbf{E}(\mathbb{X}_{k+1} \mid [\mathbb{X}_k = i])$.
2. Donner une relation entre $\mathbf{E}(\mathbb{X}_{k+1})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{X}_k)$.
3. En déduire $\mathbf{E}(\mathbb{X}_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice V.20 – (Formule de l'Espérance Conditionnelle) [Correction p. 559]

Soient $\mathbb{X}$ une variable discrète admettant une espérance et A un événement avec $\mathbf{P}(\mathrm{A}) > 0$.

1. Montrer que $\mathbf{E}(\mathbb{X} \mid \mathrm{A}) = \dfrac{\mathbf{E}(\mathbb{X} \cdot \mathbf{1}_{\mathrm{A}})}{\mathbf{P}(\mathrm{A})}$.
2. En déduire que $\mathbf{E}(\mathbb{X} \mid \mathrm{A}) \leqslant \dfrac{\mathbf{E}(|\mathbb{X}|)}{\mathbf{P}(\mathrm{A})}$.

Exercice V.21 – (Formule de la variance totale) [Correction p. 559]

Soit $(\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n)$ un système complet d'événements.

1. Démontrer la formule de la variance totale :
$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathbf{V}(\mathbb{X} \mid \mathrm{A}_k) + \mathbf{E}(\mathbb{X} \mid \mathrm{A}_k)^2\right) \mathbf{P}(\mathrm{A}_k) - \mathbf{E}(\mathbb{X})^2$$
2. Application : Une urne contient 2 boules blanches et 4 noires. On lance une pièce équilibrée. Si Pile, $\mathbb{X}$ est le nombre de blanches tirées sur 6 tirages avec remise ; si Face, $\mathbb{X}$ est le nombre de noires. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X})$.

Exercice V.22 – (Moments de la loi de Poisson) [Correction p. 559]

1. Pour $\mathbb{Y} \sim \mathcal{P}(\lambda)$, montrer qu'il existe un polynôme L_n tel que $\mathbf{E}(\mathbb{Y}^n) = \mathrm{L}_n(\lambda)$.
2. Montrer la relation de récurrence : $\mathrm{L}_{n+1}(\lambda) = \lambda \mathrm{L}_n'(\lambda) + \lambda \mathrm{L}_n(\lambda)$.
3. En déduire les moments de la loi $\mathcal{P}(1)$.

Exercice V.23 – (Non corrélation sans indépendance) [Correction p. 560]

Soient $\mathbb{X}$ la variable uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ et $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^2$.

1. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$, $\mathbf{E}(\mathbb{X})$, $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$ puis $\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.
2. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice V.24 – (Inégalité pour l'écart-type d'une somme) [Correction p. 560]

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2. Montrer que $\sigma(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) \leqslant \sigma(\mathbb{X}) + \sigma(\mathbb{Y})$.

Exercice V.25 – (Étude d'une loi sur $\mathbb{Z}^*$) [Correction p. 560]

Soit $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Nature et sommes de $\sum a_n$ et $\sum n a_n$.
2. Déterminer α tel que $\mathbf{P}(\mathbb{X} = n) = \alpha a_{|n|}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$.
3. a. Nature de $\mathrm{A}_n = [\mathbb{X} = n] \cup [\mathbb{X} = -n]$.
   b. Préciser $\mathbf{E}(\mathbb{X} \mid \mathrm{A}_n)$.
   c. Calculer la somme de $\mathbf{E}(\mathbb{X} \mid \mathrm{A}_n)\mathbf{P}(\mathrm{A}_n)$.
4. La variable $\mathbb{X}$ admet-elle une espérance ?

Corrigés

Correction de l'exercice V.1 : [Énoncé]

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1.$$

Puis

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}^2) = 0 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Donc

$$\boxed{\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.}$$

Correction de l'exercice V.2 : [Énoncé]

Les valeurs de $\mathbb{Y}$ *sont* $-3, 1, 5$.

y_i	-3	1	5
$\mathbf{P}([\mathbb{Y} = y_i])$	$0,2$	$0,5$	$0,3$

On calcule $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 1,2$.

Donc $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = 2 \times 1,2 - 1 = 1,4$.

Enfin, $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = 4\mathbf{V}(\mathbb{X})$.

Or, $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = 1,96$.

Ainsi, $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = 7,84$.

Correction de l'exercice V.3 : [Énoncé]

Par le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^2 + 1) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^2) + 1.$$

On calcule

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}^2) = 0 + 0,2 + 1,2 + 3,6 = 5.$$

Donc

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = 6.}$$

Correction de l'exercice V.4 : [Énoncé]

1. *D'après la formule de Kœnig-Huygens,* $\mathbf{V}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathbf{E}((\mathbb{X}\mathbb{Y})^2) - \mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})^2$. *Or* $\mathbb{X}^2$ *et* $\mathbb{Y}^2$ *sont indépendantes (lemme des coalitions), donc* $\mathbf{E}(\mathbb{X}^2\mathbb{Y}^2) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^2)\mathbf{E}(\mathbb{Y}^2)$, *et* $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y})$. *D'où le résultat.*
2. *On a* $\mathbf{E}(\mathbb{X}^2) = \mathbf{E}(\mathbb{X}) = p$ *donc* $\mathbf{V}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = p \cdot p - p^2 \cdot p^2 = p^2(1-p^2)$. *C'est bien la variance de la loi* $\mathcal{B}(p^2)$ *trouvée à l'exercice précédent.*

Méthode
Ne surtout pas écrire $\mathbf{V}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{X})\mathbf{V}(\mathbb{Y})$ *: la variance d'un produit n'est pas le produit des variances.*

Correction de l'exercice V.5 : [Énoncé]

$\mathbb{X}$ *est une variable finie, donc* $\mathbb{Y}$ *admet une espérance. D'après le théorème de transfert :*

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \mathbf{E}\left(\frac{1}{\mathbb{X}+1}\right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k+1}\binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$$

Or, pour tout $k \in [\![0, m]\!]$:

$$\frac{1}{k+1}\binom{m}{k} = \frac{1}{k+1}\frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{1}{m+1}\frac{(m+1)!}{(k+1)!(m-k)!} = \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{k+1}$$

En réinjectant cette identité :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k+1}p^k(1-p)^{m-k}$$

Effectuons le changement d'indice $j = k+1$:

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \frac{1}{(m+1)p}\sum_{j=1}^{m+1}\binom{m+1}{j}p^j(1-p)^{(m+1)-j}$$

Par la formule du binôme de Newton, la somme vaut $1-(1-p)^{m+1}$. Ainsi :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \frac{1-(1-p)^{m+1}}{(m+1)p}$$

Correction de l'exercice V.6 : [Énoncé]

1. *Comme $\mathbb{X}(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$, pour tout $x_k \in \mathbb{X}(\Omega)$, on a $x_k \geqslant 1$, d'où $0 < \frac{1}{x_k} \leqslant 1$. Ainsi, $\frac{1}{x_k}p_k \leqslant p_k$.*
   La série $\sum \frac{1}{x_k}p_k$ converge car $\sum p_k = 1$. Donc $1/\mathbb{X}$ admet une espérance et :

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{\mathbb{X}}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{x_k}p_k$$

2. *Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux familles $u_k = \sqrt{x_k p_k}$ et $v_k = \sqrt{\frac{p_k}{x_k}}$:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}u_k v_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}u_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}v_k^2\right)$$

   Remarquons que $u_k v_k = \sqrt{x_k p_k}\sqrt{\frac{p_k}{x_k}} = p_k$. Ainsi :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}p_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}x_k p_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{x_k}\right)$$

   En passant à la limite quand $n \to +\infty$, le membre de gauche tend vers $1^2 = 1$, et le membre de droite tend vers $\mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(1/\mathbb{X})$. D'où : $\mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(1/\mathbb{X}) \geqslant 1$.

Correction de l'exercice V.7 : [Énoncé]

Posons $m = \mathbf{E}(\mathbb{X})$. Comme φ est convexe sur $\mathbb{R}$, sa courbe représentative se situe au-dessus de toutes ses tangentes (ou droites d'appui). Il existe donc un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) \geqslant \varphi(m) + a(x-m)$$

Puisque $\mathbb{X}$ est une variable finie, on peut appliquer cette inégalité à la variable $\mathbb{X}$:

$$\varphi(\mathbb{X}) \geqslant \varphi(m) + a(\mathbb{X}-m)$$

En prenant l'espérance de chaque côté (par croissance de l'espérance) :

$$\mathbf{E}(\varphi(\mathbb{X})) \geqslant \mathbf{E}(\varphi(m) + a(\mathbb{X}-m)) = \varphi(m) + a(\mathbf{E}(\mathbb{X}) - m)$$

Comme $\mathbf{E}(\mathbb{X}) - m = 0$*, on obtient bien :*

$$\mathbf{E}(\varphi(\mathbb{X})) \geqslant \varphi(\mathbf{E}(\mathbb{X}))$$

Correction de l'exercice V.8 : [Énoncé]

1. *L'ensemble des valeurs prises par* $\mathbb{X}$ *est* $[\![1, \mathrm{N}-k+1]\!]$*. Pour* $x \in [\![1, \mathrm{N}-k+1]\!]$*, l'événement* $[\mathbb{X} = x]$ *signifie qu'on a tiré la boule numéro* x *et* $k-1$ *boules parmi les* $\mathrm{N}-x$ *boules portants un numéro strictement supérieur à* x*. Le nombre de tirages possibles est* $\binom{\mathrm{N}}{k}$*. Ainsi :*

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} = x) = \frac{\binom{\mathrm{N}-x}{k-1}}{\binom{\mathrm{N}}{k}}$$

Puisque la somme des probabilités vaut 1 : $\displaystyle\sum_{x=1}^{\mathrm{N}-k+1} \binom{\mathrm{N}-x}{k-1} = \binom{\mathrm{N}}{k}$*. En posant le changement d'indice* $j = \mathrm{N}-x-(k-1)$*,* $n = k-1$ *et* $m = \mathrm{N}-k$*, on retrouve la formule classique du crosse de hockey :*

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{n+j}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$$

2. $\mathbb{X}$ *est à valeurs positives dans* $[\![1, \mathrm{N}-k+1]\!]$*. Par la formule de la queue de distribution :*

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \sum_{x=1}^{\mathrm{N}-k+1} x\mathbf{P}(\mathbb{X} = x) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}-k+1} \mathbf{P}(\mathbb{X} \geqslant i)$$

3. *L'événement* $[\mathbb{X} \geqslant i]$ *signifie que toutes les* k *boules tirées ont un numéro supérieur ou égal à* i *(choisies parmi* $\mathrm{N}-i+1$ *boules). Ainsi :*

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} \geqslant i) = \frac{\binom{\mathrm{N}-i+1}{k}}{\binom{\mathrm{N}}{k}}$$

En utilisant l'identité précédente du crosse de hockey :

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{N}-k+1} \binom{\mathrm{N}-i+1}{k} = \binom{\mathrm{N}+1}{k+1}$$

D'où :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{\binom{\mathrm{N}+1}{k+1}}{\binom{\mathrm{N}}{k}} = \frac{\frac{(\mathrm{N}+1)!}{(k+1)!(\mathrm{N}-k)!}}{\frac{\mathrm{N}!}{k!(\mathrm{N}-k)!}} = \frac{\mathrm{N}+1}{k+1}$$

Correction de l'exercice V.9 : [Énoncé]

1. *Réécrivons* $k = \sum_{j=0}^{k-1} 1$ *:*

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(\mathbb{X}=k) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k-1}1\right)\mathbf{P}(\mathbb{X}=k) = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=j+1}^{n}\mathbf{P}(\mathbb{X}=k)\right)$$

Or $\sum_{k=j+1}^{n}\mathbf{P}(\mathbb{X}=k) = \mathbf{P}(j<\mathbb{X}\leqslant n) = \mathbf{P}(\mathbb{X}>j) - \mathbf{P}(\mathbb{X}>n)$*. D'où :*

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(\mathbb{X}=k) = \sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{P}(\mathbb{X}>j) - n\mathbf{P}(\mathbb{X}>n)$$

2. a. $\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbf{P}(\mathbb{X}=k) \geqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}(n+1)\mathbf{P}(\mathbb{X}=k) = (n+1)\mathbf{P}(\mathbb{X}>n) \geqslant n\mathbf{P}(\mathbb{X}>n).$

b. *La suite des restes d'une série convergente tend vers 0, donc* $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbf{P}(\mathbb{X}=k) = 0$*, ce qui implique par encadrement que* $\lim_{n\to+\infty} n\mathbf{P}(\mathbb{X}>n) = 0$*. En faisant tendre* $n\to+\infty$ *dans l'égalité de la question 1, on en déduit la convergence de la série et l'égalité* $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(\mathbb{X}>k)$*.*

3. *Si* $\sum_{k\geqslant 0}\mathbf{P}(\mathbb{X}>k)$ *converge, les sommes partielles* $\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}(\mathbb{X}>k)$ *sont majorées par* S*. D'après la question 1,* $\sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(\mathbb{X}=k) \leqslant \mathrm{S}$*. La série à termes positifs* $\sum k\mathbf{P}(\mathbb{X}=k)$ *a ses sommes partielles majorées, donc elle converge :* $\mathbb{X}$ *admet une espérance.*

4. *On remarque que* $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$*. Par une interversion de sommes similaire :*

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\mathbf{P}(\mathbb{X}=k) = \sum_{j=0}^{n-1}(2j+1)\mathbf{P}(\mathbb{X}>j) - n^2\mathbf{P}(\mathbb{X}>n)$$

Si $\mathbf{E}(\mathbb{X}^2)$ *existe,* $n^2\mathbf{P}(\mathbb{X}>n)\to 0$*, d'où la formule demandée.*

Correction de l'exercice V.10 : [Énoncé]

1. *Développons le produit* $(\mathbb{X}-a)(b-\mathbb{X})$ *:*

$$(\mathbb{X}-a)(b-\mathbb{X}) = -\mathbb{X}^2 + (a+b)\mathbb{X} - ab$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}((\mathbb{X}-a)(b-\mathbb{X})) = -\mathbf{E}(\mathbb{X}^2) + (a+b)m - ab$$

Utilisons $\mathbf{E}(\mathbb{X}^2) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) + m^2$ *:*

$$\mathbf{E}((\mathbb{X}-a)(b-\mathbb{X})) = -m^2 - \mathbf{V}(\mathbb{X}) + am + bm - ab = (m-a)(b-m) - \mathbf{V}(\mathbb{X})$$

2. a. *Posons* $x = m-a$ *et* $y = b-m$*. On a* $x+y = b-a$*. Par l'inégalité* $xy \leqslant \dfrac{(x+y)^2}{4}$*, on a :*

$$(m-a)(b-m) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$$

Puisque $\mathbb{X}(\Omega)\subset[a,b]$*, la variable* $(\mathbb{X}-a)(b-\mathbb{X})$ *est presque sûrement positive, donc son espérance est positive :* $\mathbf{E}((\mathbb{X}-a)(b-\mathbb{X})) \geqslant 0$*. On en déduit que* $\mathbf{V}(\mathbb{X}) \leqslant (m-a)(b-m) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$*.*

b. *Ce majorant est atteint pour une variable de Bernoulli prenant les valeurs a et b avec probabilité $1/2$ chacune. On ne peut donc pas l'améliorer.*

Correction de l'exercice V.11 : [Énoncé]

1. *Le système des probabilités s'écrit :*

$$\begin{cases} p_0 + p_1 + p_2 = 1 \\ p_1 + 2p_2 = 1 \\ p_1 + 4p_2 = 5/3 \end{cases}$$

Par soustraction des lignes 2 et 3 : $2p_2 = 2/3 \implies p_2 = 1/3$. *Puis* $p_1 = 1 - 2(1/3) = 1/3$, *et* $p_0 = 1 - 1/3 - 1/3 = 1/3$. *La loi est donc la loi uniforme sur* $\{0, 1, 2\}$.

2. a. φ *est clairement linéaire. De plus,* $\dim(\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]) = n+1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$. *Soit* $\mathrm{Q} \in \ker(\varphi)$. Q *est un polynôme de degré* $\leqslant n$ *possédant* $n+1$ *racines distinctes* $x_0, \dots, x_n$. *Donc* $\mathrm{Q} = 0$. φ *est injective entre deux espaces de même dimension finie, c'est donc un automorphisme.*

b. *La matrice de* φ *dans les bases canoniques est la matrice de Vandermonde* $\mathrm{V}(x_0, \dots, x_n)$ *de taille* $(n+1) \times (n+1)$ *dont le coefficient* (i, j) *est* x_j^i *(*$0 \leqslant i, j \leqslant n$*).*

c. *Oui. Les moments* $\mathbf{E}(\mathbb{X}^k) = \sum_{j=0}^{n} p_j x_j^k$ *forment un système linéaire d'inconnues* $(p_0, \dots, p_n)$ *dont la matrice est la transposée de la matrice de Vandermonde. Comme les* x_j *sont distincts, cette matrice est inversible, garantissant l'unicité de la loi* $(p_0, \dots, p_n)$.

Correction de l'exercice V.12 : [Énoncé]

1. *Par la propriété de la variance :* $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^2) - \mathbf{E}(\mathbb{X})^2 = 1 - \alpha^2 \geqslant 0$, *donc* $\alpha^2 \leqslant 1 \implies \alpha \in [-1, 1]$.

2. *Considérons la variable aléatoire* $(\mathbb{X}^2 - 1)^2 \geqslant 0$. *Son espérance est :*

$$\mathbf{E}((\mathbb{X}^2 - 1)^2) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^4 - 2\mathbb{X}^2 + 1) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^4) - 2\mathbf{E}(\mathbb{X}^2) + 1 = 1 - 2(1) + 1 = 0$$

Une variable aléatoire positive d'espérance nulle est presque sûrement nulle. Ainsi, $\mathbf{P}(\mathbb{X}^2 = 1) = 1$, *ce qui signifie que* $\mathbb{X}$ *ne prend ses valeurs que dans* $\{-1, 1\}$. *Posons* $p = \mathbf{P}(\mathbb{X} = 1)$ *et* $1 - p = \mathbf{P}(\mathbb{X} = -1)$.

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 1 \cdot p + (-1) \cdot (1 - p) = 2p - 1 = \alpha \implies p = \frac{1+\alpha}{2}$$

La loi de $\mathbb{X}$ *est donc :* $\mathbf{P}(\mathbb{X} = 1) = \dfrac{1+\alpha}{2}$ *et* $\mathbf{P}(\mathbb{X} = -1) = \dfrac{1-\alpha}{2}$.

Correction de l'exercice V.13 : [Énoncé]

1. *On a* $\mathbf{E}(\alpha\mathbb{X} + \beta) = \alpha\mathbf{E}(\mathbb{X}) + \beta$. *Donc* $(\alpha\mathbb{X} + \beta) - \mathbf{E}(\alpha\mathbb{X} + \beta) = \alpha(\mathbb{X} - \mathbf{E}(\mathbb{X}))$. *Ainsi* $\mu_n(\alpha\mathbb{X} + \beta) = \alpha^n \mu_n(\mathbb{X})$. *Le rapport devient :* $\dfrac{\alpha^4 \mu_4(\mathbb{X})}{(\alpha^2 \mu_2(\mathbb{X}))^2} - 3 = \dfrac{\mu_4(\mathbb{X})}{(\mu_2(\mathbb{X}))^2} - 3 = \mathrm{K}(\mathbb{X})$.

2. *Posons* $\mathrm{Y} = (\mathbb{X} - \mathbf{E}(\mathbb{X}))^2$. *On a* $\mathbf{V}(\mathrm{Y}) = \mathbf{E}(\mathrm{Y}^2) - \mathbf{E}(\mathrm{Y})^2 \geqslant 0$. *Or* $\mathbf{E}(\mathrm{Y}) = \mu_2(\mathbb{X})$ *et* $\mathbf{E}(\mathrm{Y}^2) = \mu_4(\mathbb{X})$. *D'où* $\mu_4(\mathbb{X}) - (\mu_2(\mathbb{X}))^2 \geqslant 0 \implies \dfrac{\mu_4(\mathbb{X})}{(\mu_2(\mathbb{X}))^2} \geqslant 1$. *Ainsi* $\mathrm{K}(\mathbb{X}) \geqslant 1 - 3 = -2$.

3. *Pour une loi géométrique* $\mathcal{G}(p)$, *en calculant la centration et les moments centrés (ou via la fonction génératrice des moments), on obtient* $\mu_2 = \dfrac{1-p}{p^2}$ *et* $\mu_4 = \dfrac{(1-p)(p^2 - 9p + 9)}{p^4}$.

Ainsi $\mathrm{K}(\mathbb{X}) = 6 + \dfrac{p^2}{1-p}$.

Correction de l'exercice V.14 : [Énoncé]

1. a. *Code Python :*

```python
import numpy.random as rd

def simu_Y(n, p):
    X = rd.binomial(n, p)
    if X == 0:
        return rd.randint(1, n + 1)
    else:
        return X
```

b. *Pour obtenir une approximation de l'espérance par la loi des grands nombres :*

```python
N = 100000
moyenne = sum(simu_Y(10, 0.5) for _ in range(N))
 ⇝  / N
```

2. *Utilisons la formule de l'espérance totale avec le SCE* $([\mathbb{X}=0],[\mathbb{X}\neq 0])$ *:*

$$\mathbf{E}(\mathrm{Y}_n)=\mathbf{E}(\mathrm{Y}_n\mid[\mathbb{X}=0])\mathbf{P}(\mathbb{X}=0)+\mathbf{E}(\mathrm{Y}_n\mid[\mathbb{X}\neq 0])\mathbf{P}(\mathbb{X}\neq 0)$$

— *Sachant* $[\mathbb{X}=0]$, $\mathrm{Y}_n\sim\mathcal{U}([\![1,n]\!])$, *donc* $\mathbf{E}(\mathrm{Y}_n\mid[\mathbb{X}=0])=\dfrac{n+1}{2}$.

— *Sachant* $[\mathbb{X}\neq 0]$, $\mathrm{Y}_n=\mathbb{X}$. *Remarquons que* $\mathbf{E}(\mathbb{X})=\mathbf{E}(\mathbb{X}\mid[\mathbb{X}=0])\mathbf{P}(\mathbb{X}=0)+\mathbf{E}(\mathbb{X}\mid[\mathbb{X}\neq 0])\mathbf{P}(\mathbb{X}\neq 0)$. *Puisque* $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mid[\mathbb{X}=0])=0$, *on a* $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mid[\mathbb{X}\neq 0])\mathbf{P}(\mathbb{X}\neq 0)=\mathbf{E}(\mathbb{X})=np$.

D'où :

$$\mathbf{E}(\mathrm{Y}_n)=\frac{n+1}{2}(1-p)^n+np$$

Correction de l'exercice V.15 : [Énoncé]

1. a. $f'(x)=x^{q-1}-a$. $f'(x)=0\iff x=a^{\frac{1}{q-1}}$. *La fonction admet un minimum absolu en ce point qui vaut* $f(a^{\frac{1}{q-1}})=0$ *(car* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$*).*

b. *Puisque le minimum de* f *est 0,* $f(x)\geqslant 0$ *pour tout* x. *En posant* $x=b$, *on obtient* $ab\leqslant\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$.

2. a. *En posant* $\tilde{\mathbb{X}}=\dfrac{\mathbb{X}}{\mathbf{E}(\mathbb{X}^p)^{1/p}}$ *et* $\tilde{\mathbb{Y}}=\dfrac{\mathbb{Y}}{\mathbf{E}(\mathbb{Y}^q)^{1/q}}$, *on applique l'inégalité point par point :*

$$\tilde{\mathbb{X}}\tilde{\mathbb{Y}}\leqslant\frac{\tilde{\mathbb{X}}^p}{p}+\frac{\tilde{\mathbb{Y}}^q}{q}$$

En prenant l'espérance :

$$\mathbf{E}(\tilde{\mathbb{X}}\tilde{\mathbb{Y}})\leqslant\frac{\mathbf{E}(\tilde{\mathbb{X}}^p)}{p}+\frac{\mathbf{E}(\tilde{\mathbb{Y}}^q)}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Ce qui donne l'inégalité de Hölder en multipliant par les dénominateurs.

3. *Appliquer Hölder à* $\mathbb{X}=\mathbb{Z}^r$ *et* $\mathbb{Y}=1$ *avec* $p'=s/r>1$.

Correction de l'exercice V.16 : [Énoncé]

1. *Code Python :*

```python
import numpy.random as rd

def polya(n, a, b):
    blanches = a
    noires = b
    count_blanches = 0
    for _ in range(n):
        if rd.rand() < blanches / (blanches + noires):
            count_blanches += 1
            blanches += 1
        else:
            noires += 1
    return count_blanches
```

2. *Chaque tirage individuel donnant k blanches et $n-k$ noires aura au dénominateur $(a+b)(a+b+1)\dots(a+b+n-1) = (a+b)^{[n]}$ et au numérateur $a^{[k]}b^{[n-k]}$, peu importe l'ordre. Comme il y a $\binom{n}{k}$ ordres possibles, la formule est vérifiée.*

3. *On montre par récurrence ou en utilisant les indicateurs I_j (variable indicatrice du tirage de la j-ième blanche) que $\mathbf{P}(\mathrm{I}_j = 1) = \dfrac{a}{a+b}$. Par linéarité, $\mathbf{E}(\mathbb{X}_n) = n\dfrac{a}{a+b}$.*

Correction de l'exercice V.17 : [Énoncé]

1. ***Vrai** : La conditionnement par l'univers entier ne modifie pas la loi de la variable.*
2. ***Faux** : Il manque les facteurs de probabilité $\mathbf{P}(\mathrm{A})$ et $\mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}})$.*
3. ***Vrai** : C'est la formule exacte de l'espérance totale.*
4. ***Vrai** : Si la variable est indépendante de l'événement conditionnant, sa loi conditionnelle est sa loi marginale.*
5. ***Vrai** : Propriété de monotonie de l'espérance conditionnelle (qui reste une espérance par rapport à une probabilité conditionnelle).*
6. ***Vrai** : Conséquence directe de l'indépendance des deux variables aléatoires.*

Correction de l'exercice V.18 : [Énoncé]

1. *La partie s'arrête dès le premier échec. $\mathbb{X}+1$ représente le rang du premier échec dans une suite d'épreuves à succès variables alternés (Alice aux coups impairs, Bob aux coups pairs). Pour $k \geqslant 0$, la probabilité que la partie atteigne au moins k coups valides fait intervenir une alternance de paramètres. Formellement, $\mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$ correspond à la probabilité de réussir les k premiers coups et de rater le $(k+1)$-ième.*

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{p_{\mathrm{A}}(1+p_{\mathrm{B}})}{1-p_{\mathrm{A}}p_{\mathrm{B}}}$$

2. *Sachant $[\mathbb{X} \geqslant 1]$, Alice a réussi son premier coup. On repart sur un échange où Bob joue en premier :*

$$\mathbf{E}(\mathbb{X} \mid [\mathbb{X} \geqslant 1]) = 1 + \frac{p_{\mathrm{B}}(1+p_{\mathrm{A}})}{1-p_{\mathrm{A}}p_{\mathrm{B}}}$$

Correction de l'exercice V.19 : [Énoncé]

1. *Sachant* $[\mathbb{X}_k = i]$, *au tirage* $(k+1)$, *les boules restantes sont* $1, \dots, i$. *Le tirage est uniforme sur* $[\![1, i]\!]$. *D'où :*
$$\mathbf{E}(\mathbb{X}_{k+1} \mid [\mathbb{X}_k = i]) = \frac{i+1}{2}$$

2. *Par la formule de l'espérance totale :*
$$\mathbf{E}(\mathbb{X}_{k+1}) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathbf{E}(\mathbb{X}_{k+1} \mid [\mathbb{X}_k = i])\mathbf{P}(\mathbb{X}_k = i) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \frac{i+1}{2}\mathbf{P}(\mathbb{X}_k = i) = \frac{\mathbf{E}(\mathbb{X}_k)+1}{2}$$

3. *La suite* $u_k = \mathbf{E}(\mathbb{X}_k)$ *est arithmético-géométrique :* $u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k + \frac{1}{2}$. *Le point fixe est* $\mathrm{L} = 1$. *La suite* $(u_k - 1)$ *est géométrique de raison* $1/2$. *Au premier tirage,* $\mathbb{X}_1 \sim \mathcal{U}([\![1, \mathrm{N}]\!])$, *donc* $\mathbf{E}(\mathbb{X}_1) = \frac{\mathrm{N}+1}{2}$. *Ainsi :*
$$\mathbf{E}(\mathbb{X}_k) = 1 + \left(\frac{\mathrm{N}-1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Correction de l'exercice V.20 : [Énoncé]

1. *La variable* $\mathbb{X} \cdot \mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ *vaut* $\mathbb{X}(\omega)$ *si* $\omega \in \mathrm{A}$ *et* 0 *sinon. Par le théorème de transfert :*
$$\mathbf{E}(\mathbb{X} \cdot \mathbf{1}_{\mathrm{A}}) = \sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} x\mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap \mathrm{A})$$
Or par définition de la probabilité conditionnelle, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap \mathrm{A}) = \mathbf{P}_{\mathrm{A}}(\mathbb{X} = x)\mathbf{P}(\mathrm{A})$. *D'où :*
$$\mathbf{E}(\mathbb{X} \cdot \mathbf{1}_{\mathrm{A}}) = \mathbf{P}(\mathrm{A}) \sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} x\mathbf{P}_{\mathrm{A}}(\mathbb{X} = x) = \mathbf{P}(\mathrm{A})\mathbf{E}(\mathbb{X} \mid \mathrm{A})$$

2. *Comme* $\mathbb{X} \leqslant |\mathbb{X}|$, *on a* $\mathbb{X} \cdot \mathbf{1}_{\mathrm{A}} \leqslant |\mathbb{X}| \cdot \mathbf{1}_{\mathrm{A}} \leqslant |\mathbb{X}|$. *Par croissance de l'espérance :*
$$\mathbf{E}(\mathbb{X} \cdot \mathbf{1}_{\mathrm{A}}) \leqslant \mathbf{E}(|\mathbb{X}|) \implies \mathbf{E}(\mathbb{X} \mid \mathrm{A}) \leqslant \frac{\mathbf{E}(|\mathbb{X}|)}{\mathbf{P}(\mathrm{A})}$$

Correction de l'exercice V.21 : [Énoncé]

1. *D'après la formule d'Koenig-Huygens,* $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^2) - \mathbf{E}(\mathbb{X})^2$. *Par la formule de l'espérance totale sur* $\mathbb{X}^2$ *:*
$$\mathbf{E}(\mathbb{X}^2) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(\mathbb{X}^2 \mid \mathrm{A}_k)\mathbf{P}(\mathrm{A}_k)$$
Or $\mathbf{E}(\mathbb{X}^2 \mid \mathrm{A}_k) = \mathbf{V}(\mathbb{X} \mid \mathrm{A}_k) + \mathbf{E}(\mathbb{X} \mid \mathrm{A}_k)^2$. *En réinjectant, on obtient le résultat.*

2. *Soient* $\mathrm{A}_1 =$ [*Pile*] *et* $\mathrm{A}_2 =$ [*Face*]. $\mathbf{P}(\mathrm{A}_1) = \mathbf{P}(\mathrm{A}_2) = 1/2$.
   - *Sachant* A_1, $\mathbb{X} \sim \mathcal{B}(6, 1/3)$, *donc* $\mathbf{E}(\mathbb{X} \mid \mathrm{A}_1) = 2$ *et* $\mathbf{V}(\mathbb{X} \mid \mathrm{A}_1) = 4/3$.
   - *Sachant* A_2, $\mathbb{X} \sim \mathcal{B}(6, 2/3)$, *donc* $\mathbf{E}(\mathbb{X} \mid \mathrm{A}_2) = 4$ *et* $\mathbf{V}(\mathbb{X} \mid \mathrm{A}_2) = 4/3$.

   Espérance totale : $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(4) = 3$. *Variance totale :*
$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} + 4\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} + 16\right) - 3^2 = \frac{4}{3} + 10 - 9 = \frac{7}{3}$$

Correction de l'exercice V.22 : [Énoncé]

1. *En utilisant la base des polynômes factoriels* $\mathrm{Q}_i(x) = x(x-1)\dots(x-i+1)$, *on a* $\mathbf{E}(\mathrm{Q}_i(\mathbb{Y})) = \lambda^i$. *Par changement de base,* $\mathbf{E}(\mathbb{Y}^n)$ *est une combinaison linéaire de* λ^i, *d'où l'existence de* L_n.

2. $\psi(\lambda) = e^{\lambda}\mathrm{L}_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{+\infty} i^n \frac{\lambda^i}{i!}$. *En dérivant terme à terme :*

$$\psi'(\lambda) = \sum_{i=1}^{+\infty} i^{n+1} \frac{\lambda^{i-1}}{i!} \implies \lambda\psi'(\lambda) = e^{\lambda}\mathrm{L}_{n+1}(\lambda)$$

Or $\lambda\psi'(\lambda) = \lambda(e^{\lambda}\mathrm{L}_n(\lambda) + e^{\lambda}\mathrm{L}'_n(\lambda)) = e^{\lambda}(\lambda\mathrm{L}_n(\lambda) + \lambda\mathrm{L}'_n(\lambda))$. *D'où la relation.*

3. *Pour* $\lambda = 1$, $\mathrm{L}_{n+1}(1) = \mathrm{L}_n(1) + \mathrm{L}'_n(1)$. *On retrouve les nombres de Bell.*

Correction de l'exercice V.23 : [Énoncé]

1. $\mathbb{X}\mathbb{Y} = \mathbb{X}^3 = \mathbb{X}$ *car* $\mathbb{X} \in \{-1, 0, 1\}$. *Donc* $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}) = \dfrac{-1+0+1}{3} = 0$. *Ensuite* $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \dfrac{1+0+1}{3} = \dfrac{2}{3}$. *Ainsi* $\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) - \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = 0$.

2. *Non :* $\mathbf{P}(\mathbb{X} = 1, \mathbb{Y} = 0) = 0$ *alors que* $\mathbf{P}(\mathbb{X} = 1)\mathbf{P}(\mathbb{Y} = 0) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9} \neq 0$.

Piège
Covariance nulle ⇏ indépendance.
La réciproque est vraie : indépendance ⇒ covariance nulle.

Correction de l'exercice V.24 : [Énoncé]

Considérons l'espace vectoriel des variables aléatoires d'ordre 2 muni du produit scalaire $\langle \mathrm{U}, \mathrm{V} \rangle = \mathbf{Cov}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$. *La norme associée est l'écart-type* $\sigma(\mathrm{U}) = \sqrt{\mathbf{V}(\mathrm{U})}$. *L'inégalité demandée n'est autre que l'« inégalité triangulaire » de Minkowski appliquée à ce produit scalaire :*

$$\sigma(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = \|\mathbb{X} + \mathbb{Y}\| \leqslant \|\mathbb{X}\| + \|\mathbb{Y}\| = \sigma(\mathbb{X}) + \sigma(\mathbb{Y})$$

Par récurrence, cette propriété se généralise à une somme de n *variables aléatoires :*

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sigma(\mathbb{X}_i)$$

Correction de l'exercice V.25 : [Énoncé]

1. $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ *(série télescopique), donc* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$. $na_n = \dfrac{1}{n+1}$, *dont la série diverge (série harmonique).*

2. $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \mathbf{P}(\mathbb{X} = n) = 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2\alpha = 1 \implies \alpha = \dfrac{1}{2}$.

3. a. *Les* $(\mathrm{A}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *forment un système complet d'événements.*

   b. *Par symétrie,* $\mathbf{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathbb{X} = n) = \mathbf{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathbb{X} = -n) = 1/2$. *Donc* $\mathbf{E}(\mathbb{X} \mid \mathrm{A}_n) = n(1/2) + (-n)(1/2) = 0$.

   c. *La somme vaut* $\sum 0 \cdot \mathbf{P}(\mathrm{A}_n) = 0$.

4. *La série des valeurs absolues* $\sum |n|\mathbf{P}(\mathbb{X} = n) = \sum na_n$ *diverge.* $\mathbb{X}$ *n'admet donc pas d'espérance, ce qui explique pourquoi la formule de l'espérance totale ne s'applique pas directement.*

Programme

Espérance, Variance & Co

Ce que dit le programme en ECG2 :

1 – Couples de variables aléatoires discrètes

On ne soulèvera aucune difficulté sur les séries indexées par des ensembles dénombrables, que l'on traitera comme des séries classiques. On admettra que toutes les manipulations (interversions de sommes, regroupements de termes, etc.) sont licites (sans exiger la vérification de la convergence absolue des séries envisagées). On admettra aussi que les théorèmes ou les techniques classiques concernant les séries s'étendent dans ce cadre.

Théorème de transfert : espérance d'une variable aléatoire $\mathrm{Z} = g(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ *où* g *est une fonction réelle définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple* (X,Y) *de variables aléatoires.*	$\mathrm{E}(g(\mathrm{X},\mathrm{Y})) = \sum_{(x,y)\in \mathrm{X}(\Omega)\times\mathrm{Y}(\Omega)} g(x,y)\mathrm{P}([\mathrm{X}=x]\cap[\mathrm{Y}=y])$ *(sous réserve de convergence absolue).* *Résultat admis.* *En particulier : espérance de la somme, du produit de deux variables aléatoires discrètes.*
Linéarité de l'espérance.	*Résultat admis.*
Indépendance de deux variables aléatoires réelles discrètes.	*Deux variables aléatoires* X *et* Y *sont indépendantes si et seulement si pour tout* $(x,y)\in \mathrm{X}(\Omega)\times\mathrm{Y}(\Omega)$, $\mathrm{P}([\mathrm{X}=x]\cap[\mathrm{Y}=y]) = \mathrm{P}([\mathrm{X}=x])\mathrm{P}([\mathrm{Y}=y])$.
Espérance du produit de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.	*Si* X *et* Y *sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant une espérance, alors* XY *admet également une espérance et* $\mathrm{E}(\mathrm{XY}) = \mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})$. *Résultat admis.*
Stabilité des lois binomiales et de Poisson.	*Si* X_1 *et* X_2 *sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois* $\mathcal{B}(n_1,p)$ *et* $\mathcal{B}(n_2,p)$, *alors* $\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2 \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_1+n_2,p)$. *Si* X_1 *et* X_2 *sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois* $\mathcal{P}(\lambda_1)$ *et* $\mathcal{P}(\lambda_2)$, *alors* $\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$.
Covariance de deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Propriétés.	*Notation* $\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$. *Linéarité à droite, à gauche. Symétrie.* *Si* $a\in\mathbb{R}$, $\mathrm{Cov}(\mathrm{X},a)=0$.
Formule de Koenig-Huygens. Conséquence.	$\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{E}(\mathrm{XY}) - \mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})$. *Si* X *et* Y *sont indépendantes et possèdent un moment d'ordre 2 , leur covariance est nulle. Réciproque fausse.*
Coefficient de corrélation linéaire. Propriétés.	*Notation* $\rho(\mathrm{X},\mathrm{Y})$. $\lvert\rho(\mathrm{X},\mathrm{Y})\rvert \leqslant 1$. *Cas où* $\rho(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \pm 1$.

Variance de la somme de deux variables aléatoires discrètes. *Cas de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.*	*On pourra admettre ce résultat.*

2 – Suites de variables aléatoires discrètes

Espérance de la somme de n variables aléatoires réelles discrètes.

Variance de la somme de n variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.

Ce que disait le programme en ECG1 :

1 – Moments d'une variable aléatoire discrète

Définition de l'espérance.	*Quand $\mathrm{X}(\Omega)$ est infini, une variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)} x\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)$ est absolument convergente. Notation $\mathrm{E}(\mathrm{X})$.*
Linéarité de l'espérance. Positivité.	*Résultats admis.*
Variables aléatoires centrées.	
Théorème de transfert : espérance d'une variable aléatoire $\mathrm{Y}=g(\mathrm{X})$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.	*Quand $\mathrm{X}(\Omega)$ est infini, $\mathrm{E}(g(\mathrm{X}))$ existe si et seulement si la série $\sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)} g(x)\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)$ converge absolument, et dans ce cas $\mathrm{E}(g(\mathrm{X}))=\sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)} g(x)\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)$.* *Théorème admis.*
$\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b)=a\mathrm{E}(\mathrm{X})+b$.	
Variance, écart-type d'une variable aléatoire discrète	*Notations $\mathrm{V}(\mathrm{X}), \sigma(\mathrm{X})$. discrète.*
Formule de Kœnig-Huygens.	$\mathrm{V}(\mathrm{X})=\mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right)-(\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2$.
$\mathrm{V}(a\mathrm{X}+b)=a^2\,\mathrm{V}(\mathrm{X})$.	
Variables aléatoires centrées réduites.	*On notera X^* la variable aléatoire centrée réduite associée à X.*

2 – Lois usuelles

a) Lois discrètes finies

Espérance, variance.

b) Lois discrètes infinies

Espérance, variance

V

Espérance, Variance & Co

Plan du chapitre

I Calculs d'espérances *564*
I.1 Cas général : espérance de $\mathbb{Z} = g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 564
I.2 Espérance d'une somme 568
I.3 Espérance d'un produit 569
II Covariance d'un couple *573*
II.1 Variance d'une somme 575
II.2 Coefficient de corrélation linéaire 578
III Bilan et compétences attendues *581*
Fiche 30 : Espérance d'un produit, covariance, corrélation *582*
TD 8 : Espérance, Variance et Indépendance *586*
DM 6 : Espérance et corrélation *599*

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilisé.

I. Calculs d'espérances

I.1 – Cas général : espérance de $\mathbb{Z} = g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$

Pour commencer, on retrouve le fameux :

Théorème 11 – Théorème de transfert :

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega)$.

La variable aléatoire $g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ admet une espérance *si, et seulement si la série double*

$$\sum_{(x,y)\in\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)} g(x,y)\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])$$

À retenir

Sous réserve de convergence absolue, on a :

$$\mathbf{E}(g(\mathbb{X},\mathbb{Y})) = \sum_{\substack{x\in\mathbb{X}(\Omega)\\ y\in\mathbb{Y}(\Omega)}} g(x,y)\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y]).$$

est absolument convergente et dans ce cas, $\mathbf{E}(g(\mathbb{X},\mathbb{Y}))$ *est la somme de cette série :*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(g(\mathbb{X},\mathbb{Y})) &= \sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)}\left(\sum_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)} g(x,y)\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])\right)\\ &= \sum_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}\left(\sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)} g(x,y)\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])\right).\end{aligned}$$

Précisons l'expression « sous réserve de convergence absolue ».

1. ***Si*** $\mathbb{X}$ ***et*** $\mathbb{Y}$ ***sont finies :***
   Dans ce cas, $\mathbb{X}(\Omega)=\{x_1,\dots,x_m\}$ *et* $\mathbb{Y}(\Omega)=\{y_1,\dots,y_n\}$.
   La variable aléatoire $g(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *admet alors une espérance donnée par :*
   $$\mathbf{E}(g(\mathbb{X},\mathbb{Y}))=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g\left(x_i,y_j\right)\,\mathbf{P}\left([\mathbb{X}=x_i]\cap\left[\mathbb{Y}=y_j\right]\right).$$

2. ***Si*** $\mathbb{X}$ ***est finie et*** $\mathbb{Y}$ ***infinie :***
   Dans ce cas, $\mathbb{X}(\Omega)=\{x_1,\dots,x_m\}$ *et* $\mathbb{Y}(\Omega)=\left\{y_j\mid j\in\mathbb{N}\right\}$.
   Si pour tout $i\in[\![1,m]\!]$, *la série* $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} g\left(x_i,y_j\right)\mathbf{P}\left([\mathbb{X}=x_i]\cap\left[\mathbb{Y}=y_j\right]\right)$ *est absolument convergente alors* $g(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *admet une espérance et :*
   $$\mathbf{E}(g(\mathbb{X},\mathbb{Y}))=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{+\infty} g\left(x_i,y_j\right)\,\mathbf{P}\left([\mathbb{X}=x_i]\cap\left[\mathbb{Y}=y_j\right]\right).$$
   Le cas $\mathbb{X}$ *infinie et* $\mathbb{Y}$ *finie est similaire :*
   $$\mathbb{X}(\Omega)=\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\}\ \text{ et }\ \mathbb{Y}(\Omega)=\{y_1,\dots,y_n\}.$$
   Si pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, *la série* $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} g\left(x_i,y_j\right)\mathbf{P}\left([\mathbb{X}=x_i]\cap\left[\mathbb{Y}=y_j\right]\right)$ *est absolument convergente alors* $g(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *admet une espérance et :*
   $$\mathbf{E}(g(\mathbb{X},\mathbb{Y}))=\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=1}^{n} g\left(x_i,y_j\right)\,\mathbf{P}\left([\mathbb{X}=x_i]\cap\left[\mathbb{Y}=y_j\right]\right).$$

3. ***Si*** $\mathbb{X}$ ***est infinie et*** $\mathbb{Y}$ ***infinie :***
   Dans ce cas, $\mathbb{X}(\Omega)=\left\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\right\}$ *et* $\mathbb{Y}(\Omega)=\left\{y_j\mid j\in\mathbb{N}\right\}$.
   Il faut alors démontrer :
   a. $\forall i\in\mathbb{N}$, *la série* $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} g\left(x_i,y_j\right)\mathbf{P}\left([\mathbb{X}=x_i]\cap\left[\mathbb{Y}=y_j\right]\right)$ *est absolument convergente.*
   b. *la série* $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} g\left(x_i,y_j\right)\mathbf{P}\left([\mathbb{X}=x_i]\cap\left[\mathbb{Y}=y_j\right]\right)\right)$ *est absolument convergente.*
   Alors $g(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *admet une espérance donnée par :*
   $$\mathbf{E}(g(\mathbb{X},\mathbb{Y}))=\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} g\left(x_i,y_j\right)\,\mathbf{P}\left([\mathbb{X}=x_i]\cap\left[\mathbb{Y}=y_j\right]\right).$$

Exemple 4 – Espérance d'un maximum :

On reprend les notations d'un exemple du chapitre précédent où :

- $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p_1)$ *et* $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p_2)$ *avec* $p_1, p_2 \in]0\,;1[$ *et* $q_1 = 1 - p_1, q_2 = 1 - p_2$,
- $\mathbb{V} = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$,
- *avec* $\mathbf{P}([\mathbb{V} \leqslant n]) = 1 - q_1^n - q_2^n + (q_1 q_2)^n$.

Montrons que $\mathbb{V}$ *admet une espérance et déterminons-la.*

$\mathbb{V}$ *admet une espérance si, et seulement si la série* $\sum_{n\geqslant 1} n\mathbf{P}([\mathbb{V} = n])$ *est absolument convergente i.e. convergente puisque cette série est à termes positifs.*
Soit $m \in \mathbb{N}$.
Montrons tout d'abord que $\sum_{n=1}^{m} n\mathbf{P}([\mathbb{V} = n]) = \sum_{n=0}^{m-1} \mathbf{P}([\mathbb{V} > n]) - m\mathbf{P}([\mathbb{V} > m])$.
En effet,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} n\mathbf{P}([\mathbb{V} = n]) &= \sum_{n=1}^{m} n\Big(\mathbf{P}([\mathbb{V} > n-1]) - \mathbf{P}([\mathbb{V} > n])\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{m} n\mathbf{P}([\mathbb{V} > n-1]) - \sum_{n=1}^{m} n\mathbf{P}([\mathbb{V} > n]) \quad \textit{(par linéarité de } \Sigma\textit{)} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} (n+1)\mathbf{P}([\mathbb{V} > n]) - \sum_{n=1}^{m} n\mathbf{P}([\mathbb{V} > n]) \quad \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} n\mathbf{P}([\mathbb{V} > n]) + \sum_{n=0}^{m-1} \mathbf{P}([\mathbb{V} > n]) - \sum_{n=1}^{m} n\mathbf{P}([\mathbb{V} > n]) \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \mathbf{P}([\mathbb{V} > n]) - m\mathbf{P}([\mathbb{V} > m]).
\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{P}([\mathbb{V} \leqslant n]) = 1 - q_1^n - q_2^n + (q_1 q_2)^n$, *on en déduit,*

$$\mathbf{P}([\mathbb{V} > n]) = 1 - \mathbf{P}([\mathbb{V} \leqslant n]) = q_1^n + q_2^n - (q_1 q_2)^n.$$

D'où, $\sum_{n=1}^{m} n\mathbf{P}([\mathbb{V} = n]) = \sum_{n=0}^{m-1} q_1^n + \sum_{n=0}^{m-1} q_2^n - \sum_{n=0}^{m-1} (q_1 q_2)^n - m\mathbf{P}([\mathbb{V} > m])$.
Or,

- $q_1, q_2 \in]0\,;1[$ *entraîne la convergence des séries* $\sum_{n\in\mathbb{N}} q_1^n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} q_2^n$.
  De plus, $\sum_{n=0}^{m-1} q_1^n \xrightarrow[m\to+\infty]{} \frac{1}{1-q_1} = \frac{1}{p_1}$ *et* $\sum_{n=0}^{m-1} q_2^n \xrightarrow[m\to+\infty]{} \frac{1}{1-q_2} = \frac{1}{p_2}$.
- *De même,* $q_1 q_2 \in]0\,;1[$, *entraîne la convergence de la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} (q_1 q_2)^n$ *et*
  $$\sum_{n=0}^{m-1} (q_1 q_2)^n \xrightarrow[m\to+\infty]{} \frac{1}{1-q_1 q_2} = \frac{1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}.$$
- *Enfin,* $m\mathbf{P}([\mathbb{V} > m]) = m\left(q_1^m + q_2^m - (q_1 q_2)^m\right) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$ *par croissances comparées.*

En conclusion, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbf{P}([\mathbb{V}=n])$ *est convergente* i.e. $\mathbb{V}$ *admet une espérance et*

$$\mathbf{E}(\mathbb{V}) = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1+p_2-p_1p_2}.$$

Exemple 5 :

Considérons deux variables aléatoires $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *dont la loi jointe est définie par :*

$$\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \textit{et} \qquad \forall (j,k)\in\mathbb{N}^2,\ \mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k]) = \frac{j+k}{e2^{j+k}j!k!}.$$

Idée

$\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ont des rôles symétriques dans la loi jointe donc les deux lois marginales sont identiques.

Justifions que la variable aléatoire $2^{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}$ *admet une espérance et déterminons-la.*

— *D'après le théorème de transfert :*

$2^{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}$ *admet une espérance* $\iff$ *la série double* $\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} 2^{j+k}\mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k])$ *est absolument convergente*

$\iff$ *la série double* $\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} 2^{j+k}\mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k])$ *est convergente, car il s'agit d'une série à termes positifs.*

— *Soit* $j\in\mathbb{N}$. *Soit* $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$, *on a :*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} 2^{j+k}\mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k]) &= \frac{1}{ej!}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{j+k}{k!} = \frac{1}{ej!}\left(j\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{1}{k!}+\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{k}{k!}\right)\\ &= \frac{1}{ej!}\left(j\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{1}{k!}+\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{(k-1)!}\right)\\ &= \frac{1}{ej!}\left(j\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{1}{k!}+\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}\frac{1}{k!}\right)\end{aligned}$$

Or, $\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}$ *est une série exponentielle convergente de somme* e.

Par conséquent, la série $\sum_{k\geqslant 0} 2^{j+k}\mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k])$ *est convergente et :*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{j+k}\mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k]) &= \frac{1}{ej!}\left(j\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\right)\\ &= \frac{1}{ej!}(je+e)\\ &= \frac{j+1}{j!}.\end{aligned}$$

— *Ensuite, de la même façon que ci-dessus, la série* $\sum_{j\geqslant 0}\frac{j+1}{j!}$ *est convergente, de somme égale à* $2e$.

— *Par conséquent, la série double* $\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} 2^{j+k}\mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k])$ *est convergente.*

On en déduit que $2^{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}$ *admet une espérance et :*

$$\mathbf{E}\left(2^{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}\right)=\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}2^{j+k}\mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k])=\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{j}{j!}+\frac{1}{j!}\right)=2e.$$

I.2 – Espérance d'une somme

Proposition 12 – Linéarité de l'espérance :

Soit $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$. *Si les variables aléatoires* $\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2,\dots,\mathbb{X}_n$ *admettent toutes une espérance, alors, pour tous* $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, *la variable aléatoire* $\lambda_1\mathbb{X}_1+\lambda_2\mathbb{X}_2+\dots+\lambda_n\mathbb{X}_n$ *admet une espérance et :*

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\mathbb{X}_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\mathbf{E}\left(\mathbb{X}_k\right).$$

En particulier, lorsque pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\lambda_k=1$, *on obtient :*

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbb{X}_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left(\mathbb{X}_k\right).$$

Preuve : Commençons par le montrer pour deux variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ et posons, pour cela, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,y)=\lambda x+\mu y$ où $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

D'après le théorème (11) de transfert, $\mathbb{Z}=g(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ admet une espérance si, et seulement si, la famille des

$$g(x,y)\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])=\lambda x\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])+\mu y\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])$$

est absolument sommable.

Considérons la famille $\left(x\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])\right)_{(x,y)\in\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)}$:

— Pour tout $x\in\mathbb{X}(\Omega)$, la série $\sum_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}|x|\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])$ converge d'après la formule des probabilités totales, et on a :

$$\sum_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}|x|\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])=|x|\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]).$$

— La série $\sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)}|x|\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x])$ est convergente car $\mathbb{X}$ admet une espérance.

Remarque
On dit indifféremment absolument convergente ou sommable.

La famille $\left(x\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])\right)_{(x,y)\in\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)}$ est donc absolument convergente (sommable) et :

$$\sum_{(x,y)\in\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)}x\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])=\mathbf{E}(\mathbb{X}).$$

Le même raisonnement s'applique à la famille $\left(y\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])\right)_{(x,y)\in\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)}$.

On peut donc conclure que la famille $\Big(g(x,y)\ \mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])\Big)_{(x,y)\in\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)}$ est sommable comme combinaison linéaire de familles sommables, donc $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$ existe et vaut :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbb{Z}) &= \sum_{(x,y)\in\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)} g(x,y)\ \mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])\\ &= \lambda\sum_{(x,y)\in\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)} x\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y]) \quad+\quad \mu\sum_{(x,y)\in\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)} y\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])\\ &= \lambda\,\mathbf{E}(\mathbb{X}) \quad+\quad \mu\,\mathbf{E}(\mathbb{Y}).\end{aligned}$$

Le résultat général s'obtient ensuite par récurrence sur $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

Proposition 13 – Croissance de l'espérance :

P1 • $\left.\begin{array}{l}\forall\omega\in\Omega,\ \mathbb{X}(\omega)\geqslant 0 \quad ou \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}\geqslant 0])=1\\ \mathbb{X}\text{ admet une espérance}\end{array}\right\}\Longrightarrow \mathbf{E}(\mathbb{X})\geqslant 0.$

P2 • $\left.\begin{array}{l}\forall\omega\in\Omega,\ \mathbb{X}(\omega)\leqslant\mathbb{Y}(\omega) \quad ou \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}\leqslant\mathbb{Y}])=1\\ \mathbb{X}\text{ et }\mathbb{Y}\text{ admettent une espérance}\end{array}\right\}\Longrightarrow \mathbf{E}(\mathbb{X})\leqslant\mathbf{E}(\mathbb{Y}).$

Preuve :

P1 • Supposons que $\mathbf{P}([\mathbb{X}\geqslant 0])=1$ et que $\mathbb{X}$ admet une espérance.
Puisque $\mathbb{X}$ admet une espérance, la série $\sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)} x\mathbf{P}([\mathbb{X}=x])$ est absolument convergente et :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X})=\sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)} x\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x])=\sum_{\substack{x\in\mathbb{X}(\Omega)\\ x\geqslant 0}} x\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x])\geqslant 0$$

car $\mathbf{P}([\mathbb{X}\geqslant 0])=1$ entraîne $\mathbf{P}([\mathbb{X}=x])=0$ pour tout $x<0$.

P2 • On applique le point précédent à la variable aléatoire $\mathbb{Z}=\mathbb{Y}-\mathbb{X}$, par linéarité de l'espérance.

I.3 – Espérance d'un produit

Théorème 14 – Cas général :

Soit $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires réelles discrètes admettant chacune un moment d'ordre 2.

Alors :

— *$\mathbb{X}\mathbb{Y}$ admet une espérance.*

— *Et :*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) &= \sum_{(x,y)\in\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)} xy\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y]) \\ &= \sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)}\sum_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)} xy\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y]) \\ &= \sum_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}\sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)} xy\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y]).\end{aligned}$$

Preuve :

Lemme 15 :

$\forall a,b\in\mathbb{R},\quad |ab|\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}.$

Preuve : Pour tous $a,b\in\mathbb{R}$, $0\leqslant(a+b)^2 \implies -ab\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$ et $0\leqslant(a-b)^2 \implies ab\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$.
D'où $|ab|\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$. ☑

D'après le théorème de transfert, $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ admet une espérance ssi la série double $\displaystyle\sum_{(x,y)\in\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)} xy\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])$ est absolument convergente.

Par le lemme : $\forall(x,y)\in\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)$,

$$0\leqslant|xy|\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])\leqslant\frac{1}{2}\left(x^2\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])+y^2\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])\right)$$

Soit $x\in\mathbb{X}(\Omega)$. Par la formule des probabilités totales, $\displaystyle\sum_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])=\mathbf{P}([\mathbb{X}=x])$, d'où $x^2\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x])=\displaystyle\sum_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}x^2\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])$.

Comme $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ admettent un moment d'ordre 2, les séries $\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)}x^2\mathbf{P}([\mathbb{X}=x])$ et $\displaystyle\sum_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}y^2\mathbf{P}([\mathbb{Y}=y])$ convergent.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série double $\displaystyle\sum_{(x,y)\in\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)}|xy|\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])$ converge, ce qui prouve l'existence de $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$. ☑

Exemple 6 :

On considère le jet de deux dés à 3 faces et on note :

— *$\mathbb{X}$ le minimum des deux nombres obtenus,*

— *$\mathbb{Y}$ le maximum des deux nombres obtenus.*

Déterminons $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$.

La loi conjointe de $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ est résumée ci-dessous ($\mathbb{X}(\Omega)=\mathbb{Y}(\Omega)=[\![1,3]\!]$) :

$\mathbb{X}$ \ $\mathbb{Y}$	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$

$\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ étant à support fini, elles admettent un moment d'ordre 2. Par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) &= \sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)\times\mathbb{Y}(\Omega)} xy\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=x]\cap[\mathbb{Y}=y])\\ &= \frac{1}{9}(1\cdot 1)+\frac{2}{9}(1\cdot 2)+\frac{2}{9}(1\cdot 3)+\frac{1}{9}(2\cdot 2)+\frac{2}{9}(2\cdot 3)+\frac{1}{9}(3\cdot 3)\\ &= \frac{1+4+6+4+12+9}{9}=\frac{36}{9}=4.\end{aligned}$$

Exercice V.1 – (Calcul d'espérance par transfert)

Soit $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j])=\frac{4ij}{n^2(n+1)^2}$$

1. Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
2. En utilisant le théorème de transfert, calculer l'espérance $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$ de la variable $\mathbb{Z}=\mathbb{X}\mathbb{Y}$.

1. On calcule la somme double des probabilités :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{4ij}{n^2(n+1)^2}=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}j\right)$$

Comme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$*, on a :*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j])=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}=1$$

2. Par le théorème de transfert :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(ij)\cdot\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j])=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}j^2\right)$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *:*

$$\mathbf{E}(\mathbb{Z})=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^2=\frac{(2n+1)^2}{9}$$

Attention
La réciproque est fausse ! confer le contre-exemple (9)

Rappel
Si $\mathbb{X}$ admet une espérance, alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a\mathbb{X}+b$ admet une espérance et $\mathbf{E}(a\mathbb{X}+b) = a\mathbf{E}(\mathbb{X}) + b$.

Proposition 16 – Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes :

P1 • *Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variables aléatoires **indépendantes** admettant une espérance, alors la variable aléatoire $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ admet une espérance et*

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y}).$$

P2 • *Si $(\mathbb{X}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires **indépendantes** admettant une espérance, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\prod_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k$ admet une espérance et*

$$\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left(\mathbb{X}_k\right).$$

Preuve : Le théorème (11) de transfert s'applique directement avec

$$\mathbf{P}([\mathbb{X}=x] \cap [\mathbb{Y}=y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}=x])\mathbf{P}([\mathbb{Y}=y]),$$

ce qui permet de séparer les sommes et de prouver **P1**.

Le point **P2** s'en déduit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. ☑

Exemple 7 :

Soit $p \in]0\,;1[$. On considère une variable aléatoire $\mathbb{X}$ dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{X}(\Omega) = \{-1;1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=1]) = p,\ \mathbf{P}([\mathbb{X}=-1]) = 1-p.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que $\mathbb{X}$ et on pose $\mathbb{Y}_n = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k$.

Déterminons l'espérance de $\mathbb{Y}_n$ puis déduisons-en la loi de $\mathbb{Y}_n$.

— *Puisque $\mathbb{X}(\Omega)$ est fini, la variable aléatoire $\mathbb{X}$ admet une espérance et :*

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = -1\cdot(1-p) + 1\cdot p = 2p-1.$$

— *Les variables $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ admettent une espérance et sont indépendantes, donc $\mathbb{Y}_n$ admet une espérance et :*

$$\mathbf{E}\left(\mathbb{Y}_n\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left(\mathbb{X}_k\right) = (2p-1)^n.$$

— *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{X}_k(\Omega) = \{-1;1\}$ d'où $\mathbb{Y}_n(\Omega) = \{-1;1\}$ et :*

$$\mathbf{P}\left([\mathbb{Y}_n=-1]\right) + \mathbf{P}\left([\mathbb{Y}_n=1]\right) = 1. \tag{V.1}$$

Or $\mathbf{E}\left(\mathbb{Y}_n\right) = -\mathbf{P}\left([\mathbb{Y}_n=-1]\right) + \mathbf{P}\left([\mathbb{Y}_n=1]\right)$, d'où :

$$-\mathbf{P}\left([\mathbb{Y}_n=-1]\right) + \mathbf{P}\left([\mathbb{Y}_n=1]\right) = (2p-1)^n. \tag{V.2}$$

En résolvant le système formé par (V.1) et (V.2), on obtient :

$$\mathbf{P}\left([\mathbb{Y}_n=1]\right) = \frac{1+(2p-1)^n}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\left([\mathbb{Y}_n=-1]\right) = \frac{1-(2p-1)^n}{2}.$$

Remarque
Comme $\mathbb{Y}_n(\Omega) = \{-1;1\}$ est fini, l'existence de l'espérance était immédiate.

Exemple 8 :

Soient $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2$, $\mathbb{X}_3$ trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0\,;1[$.

On pose $\mathbb{Y} = \mathbb{X}_1\mathbb{X}_2$ et $\mathbb{Z} = \mathbb{X}_2\mathbb{X}_3$.

Montrons que $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas indépendantes.

— *Par indépendance de $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$: $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}_1)\mathbf{E}(\mathbb{X}_2) = p^2$. De même, $\mathbf{E}(\mathbb{Z}) = p^2$.*

— *On a $\mathbb{Y}\mathbb{Z} = \mathbb{X}_1\mathbb{X}_2^2\mathbb{X}_3$. Comme $\mathbb{X}_2 \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$, on a $\mathbb{X}_2^2 = \mathbb{X}_2$.*
D'où $\mathbb{Y}\mathbb{Z} = \mathbb{X}_1\mathbb{X}_2\mathbb{X}_3$. Par indépendance de $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3$:

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}\mathbb{Z}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}_1)\mathbf{E}(\mathbb{X}_2)\mathbf{E}(\mathbb{X}_3) = p^3.$$

Comme $p \in]0\,;1[$, $p^3 \neq p^4 = \mathbf{E}(\mathbb{Y})\mathbf{E}(\mathbb{Z})$, $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas indépendantes.

À retenir
$\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(p) \implies \mathbb{X}^2 = \mathbb{X}$.

Contre-exemple 9 – $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y})$ mais $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ non indépendantes :

On choisit au hasard et de façon équiprobable un point dans le plan parmi les points de coordonnées $(0;1)$, $(1;0)$, $(-1;0)$ et $(0;-1)$.

On note $\mathbb{X}$ l'abscisse du point et $\mathbb{Y}$ son ordonnée.

Par équiprobabilité, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = -1]) = \frac{1}{4}, \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0]) = \frac{1}{2}, \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1]) = \frac{1}{4}$, d'où $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 0$.
De même $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = 0$.
Pour tout point possible, le produit de l'abscisse et de l'ordonnée est nul, donc $\mathbb{X}\mathbb{Y} = 0$ presque sûrement et $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = 0$.
Cependant, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 0]) = 0 \neq \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0])\mathbf{P}([\mathbb{Y} = 0]) = \frac{1}{4}$.
Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont donc pas indépendantes, bien que $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y})$.

II. Covariance d'un couple

Définition 5 – Covariance :

La covariance *du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est le réel, noté $\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, défini par (si existence) :*

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \mathbf{E}\Big((\mathbb{X} - \mathbf{E}(\mathbb{X}))(\mathbb{Y} - \mathbf{E}(\mathbb{Y}))\Big).$$

À retenir
$\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{X}) = \mathbf{V}(\mathbb{X})$.

Théorème 17 – Condition suffisante d'existence de la covariance :

Si les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ admettent un moment d'ordre 2, alors $\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ existe.

Preuve : Supposons que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ admettent un moment d'ordre 2.

En développant :

$$(\mathbb{X} - \mathbf{E}(\mathbb{X}))(\mathbb{Y} - \mathbf{E}(\mathbb{Y})) = \mathbb{X}\mathbb{Y} - \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbb{Y} - \mathbf{E}(\mathbb{Y})\mathbb{X} + \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y}).$$

Comme $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ont un moment d'ordre 2, $\mathbb{X}\mathbb{Y}$, $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ admettent une espérance.

Par linéarité, le produit $(\mathbb{X} - \mathbf{E}(\mathbb{X}))(\mathbb{Y} - \mathbf{E}(\mathbb{Y}))$ admet une espérance, donc $\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ existe.

En pratique, on utilisera assez peu la définition (5) , mais plutôt la formule qui suit :

Proposition 18 – Formule de Koenig-Huygens :

Si les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ admettent un moment d'ordre 2, alors :

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) - \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y}).$$

Preuve : Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y} - \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbb{Y} - \mathbf{E}(\mathbb{Y})\mathbb{X} + \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y})) = \mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) - \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y}).$$

Proposition 19 :

Soient $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2$, $\mathbb{Y}_1$, $\mathbb{Y}_2$ des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2.

- **P1** • $\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{X}) = \mathbf{V}(\mathbb{X})$.
- **P2** • $\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \mathbf{Cov}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$. *(symétrie)*
- **P3** • $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \mathbf{Cov}(\lambda_1\mathbb{X}_1 + \lambda_2\mathbb{X}_2, \mathbb{Y}) = \lambda_1 \mathbf{Cov}(\mathbb{X}_1, \mathbb{Y}) + \lambda_2 \mathbf{Cov}(\mathbb{X}_2, \mathbb{Y})$ *(linéarité à gauche)*
- **P4** • $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \lambda_1\mathbb{Y}_1 + \lambda_2\mathbb{Y}_2) = \lambda_1 \mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}_1) + \lambda_2 \mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}_2)$ *(linéarité à droite)*
- **P5** • $\forall a \in \mathbb{R},\ \mathbf{Cov}(\mathbb{X}, a) = 0$.
- **P6** • *Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes, alors* $\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 0$.

Attention

La réciproque de P6 est fausse mais la contraposée peut servir pour montrer que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes !

Preuve :

P1 • Immédiat par définition de $\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X})$.

P2 • Immédiat par définition de $\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et $\mathbf{Cov}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$.

P3 • Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
On sait que $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ admettent un moment d'ordre 2 , donc $\lambda_1\mathbb{X}_1 + \lambda_2\mathbb{X}_2$ également.
Et on sait que $\mathbb{Y}$ admet un moment d'ordre 2.
Par conséquent, $\mathbf{Cov}(\lambda_1\mathbb{X}_1 + \lambda_2\mathbb{X}_2, \mathbb{Y})$ existe et d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(\lambda_1\mathbb{X}_1 + \lambda_2\mathbb{X}_1\mathbb{Y}) &= \mathbf{E}\Big((\lambda_1\mathbb{X}_1 + \lambda_2\mathbb{X}_2)\mathbb{Y}\Big) - \mathbf{E}\Big(\lambda_1\mathbb{X}_1 + \lambda_2\mathbb{X}_2\Big)\mathbf{E}(\mathbb{Y}) \\ &= \mathbf{E}(\lambda_1\mathbb{X}_1\mathbb{Y} + \lambda_2\mathbb{X}_2\mathbb{Y}) - (\lambda_1\mathbf{E}(\mathbb{X}_1) + \lambda_2\mathbf{E}(\mathbb{X}_2))\,\mathbf{E}(\mathbb{Y}) \\ &= \lambda_1\mathbf{E}(\mathbb{X}_1\mathbb{Y}) + \lambda_2\mathbf{E}(\mathbb{X}_2\mathbb{Y}) - \lambda_1\mathbf{E}(\mathbb{X}_1)\,\mathbf{E}(\mathbb{Y}) - \lambda_2\mathbf{E}(\mathbb{X}_2)\,\mathbf{E}(\mathbb{Y}) \\ &= \lambda_1\,\mathbf{Cov}(\mathbb{X}_1, \mathbb{Y}) + \lambda_2\,\mathbf{Cov}(\mathbb{X}_2, \mathbb{Y})\end{aligned}$$

Rappel

La somme de variables aléatoires admettant un moment d'ordre r admet également un moment d'ordre r. Immédiat en utilisant : $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$,

$$|(a+b)^r| \leqslant |a^r| + |b^r|\,.$$

(avec formule du binôme)

P4 • Immédiat, par symétrie et linéarité à gauche de la covariance.

P5 • Soit $a \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, a) = \mathbf{E}((\mathbb{X} - \mathbf{E}(\mathbb{X})(a - a))) = 0.$$

P6 • D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) &= \mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) - \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y}) \\ &= \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y}) - \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y}) \quad \text{(indépendance de } \mathbb{X} \text{ et } \mathbb{Y}\text{)} \\ &= 0\end{aligned}$$

II.1 – Variance d'une somme

Proposition 20 – Variance d'une somme :

P1 • *Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ admettent une variance, alors $\mathbb{X}+\mathbb{Y}$ admet une variance et :*

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y}) + 2\,\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}).$$

P2 • *Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ admettent une variance et sont indépendantes, alors $\mathbb{X}+\mathbb{Y}$ admet une variance et :*

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y}).$$

P3 • *Si $(\mathbb{X}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes admettant une variance, alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}\mathbb{X}_k$ admet une variance et :*

$$\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbb{X}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{V}\left(\mathbb{X}_k\right).$$

Remarque : *On retiendra en particulier que :*

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) - \mathbf{V}(\mathbb{X}) - \mathbf{V}(\mathbb{Y})\Big),$$

qui permet de calculer la covariance à partir des variances.

Preuve :

P1 • Supposons que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ admettent une variance. Ainsi, $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ admettent un moment d'ordre 2 , et donc $\mathbb{X}+\mathbb{Y}$ également.
Par conséquent, $\mathbb{X}+\mathbb{Y}$ admet une variance et

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) &= \mathbf{Cov}(\mathbb{X}+\mathbb{Y},\mathbb{X}+\mathbb{Y}) \\ &= \mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathrm{X}+\mathbb{Y}) + \mathbf{Cov}(\mathbb{Y},\mathbb{X}+\mathbb{Y}) \\ &= \mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{X}) + \mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) + \mathbf{Cov}(\mathbb{Y},\mathbb{X}) + \mathbf{Cov}(\mathbb{Y},\mathbb{Y})\end{aligned}$$

Par linéarité à gauche et à droite et par symétrie.

$$= \mathbf{V}(\mathbb{X}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y}) + 2\,\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}).$$

P2 • Immédiat d'après **P1** et la proposition (19) .

P3 • Supposons que $(\mathbb{X}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une variance.
On raisonne par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.

— Initialisation. Pour $n=1$: rien à faire.

Remarque
Si on initialise à $n=2$, c'est alors **P2**

— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons « $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k$ admet une variance et $\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(\mathbb{X}_k)$ » et montrons le résultat pour $n+1$ variables indépendantes.

Il suffit d'écrire $\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{X}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k + \mathbb{X}_{n+1}$.

Alors,

- par hypothèse de récurrence, $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k$ admet une variance,
- $\mathbb{X}_{n+1}$ admet une variance,
- les variables aléatoires $\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n, \mathbb{X}_{n+1}$ sont indépendantes, donc par lemme des coalitions, les variables aléatoires $\mathbb{X}_1 + \ldots + \mathbb{X}_n$ et $\mathbb{X}_{n+1}$ sont également indépendantes.

D'après **P2**, la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k + \mathbb{X}_{n+1}$ admet une variance et on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{X}_k\right) &= \mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k + \mathbb{X}_{n+1}\right) \\
&= \mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k\right) + \mathbf{V}(\mathbb{X}_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(\mathbb{X}_k) + \mathbf{V}(\mathbb{X}_{n+1}) \qquad \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbf{V}(\mathbb{X}_k).
\end{aligned}$$

L'hérédité est ainsi établie.

— Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k$ admet une variance et

$$\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(\mathbb{X}_k).$$

Rappel

Si $\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ alors

$\mathbf{V}(\mathbb{Z}) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Exemple 10 :

Dans l'exemple du jet de deux dés à 3 faces, déterminons $\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y})$ *avec* $\mathbb{X} = \min(\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2)$ *et* $\mathbb{Y} = \max(\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2)$ *où* $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2 \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1,3]\!])$ *et sont indépendantes.*

Afin de s'épargner tout calcul, on remarque :

$$\mathbb{X} + \mathbb{Y} = \min(\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2) + \max(\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_2.$$

Comme $\mathbb{Z}_1$ *et* $\mathbb{Z}_2$ *sont indépendantes et admettent une variance :*

$$\mathbf{V}(\mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_2) = \mathbf{V}(\mathbb{Z}_1) + \mathbf{V}(\mathbb{Z}_2) = \frac{3^2-1}{12} + \frac{3^2-1}{12} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Ainsi, $\mathbb{X}+\mathbb{Y}$ *admet une variance qui vaut :*

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_2) = \frac{4}{3}.$$

On peut calculer facilement la variance d'une $\mathcal{B}(n,p)$ *à partir de la proposition (20).*

En effet, une variable aléatoire réelle de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ peut s'écrire comme la somme de n variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre p :

Corollaire 21 – Variance d'une loi binomiale :

Soit $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$. Alors :

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = np(1-p).$$

Preuve : On redécompose $\mathbb{X}$ sous la forme d'une somme de n variables aléatoires indépendantes $\mathbb{X}_i$ de variance $p(1-p)$. On a alors :

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}_1) + \mathbf{V}(\mathbb{X}_2) + ... + \mathbf{V}(\mathbb{X}_n) = p(1-p) + p(1-p) + ... + p(1-p) = np(1-p).$$

Théorème 22 – Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Soit $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ admettant un moment d'ordre 2.

Alors :

$$\left(\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})\right)^2 \leqslant \mathbf{V}(\mathbb{X})\mathbf{V}(\mathbb{Y}).$$

Remarque

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit aussi :

$$\left|\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})\right| \leqslant \sigma(\mathbb{X})\sigma(\mathbb{Y}).$$

Rappel

Si $\mathbb{X}$ admet une variance, alors pour tous $a,b \in \mathbb{R}$, $a\mathbb{X}+b$ admet une variance et $\mathbf{V}(a\mathbb{X}+b) = a^2\mathbf{V}(\mathbb{X})$.

Preuve : Supposons que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ admettent une variance.

Soit $t \in \mathbb{R}$. La variable aléatoire $t\mathbb{X}+\mathbb{Y}$ est une combinaison linéaire de deux variables aléatoires admettant une variance, par conséquent, elle admet également une variance et

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(t\mathbb{X}+\mathbb{Y}) &= \mathbf{V}(t\mathbb{X}) + 2\,\mathbf{Cov}(t\mathbb{X},\mathbb{Y}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y})\\ &= t^2\mathbf{V}(\mathbb{X}) + 2t\,\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y}). \quad \text{(linéarité à gauche)}\end{aligned}$$

Distinguons deux cas :

1. Si $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = 0$.
   Dans ce cas, d'après ce qui précède :
   $$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \mathbf{V}(t\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = 2t\,\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y}).$$
   Fonction affine en t qui doit être toujours positive. C'est le cas si, et seulement si son coefficient directeur est nul *i.e.* $\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = 0$.
   L'inégalité de Cauchy-Schwarz est alors vérifiée.
2. Si $\mathbf{V}(\mathbb{X}) \neq 0$.
   Dans ce cas, la fonction $t \longmapsto t^2\mathbf{V}(\mathrm{X}) + 2t\,\mathbf{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) + \mathbf{V}(\mathrm{Y})$ est une fonction polynomiale de degré 2 positive sur $\mathbb{R}$, car égale à la fonction $t \longmapsto \mathbf{V}(t\mathbb{X}+\mathbb{Y})$ et qu'une variance est toujours positive.
   Par conséquent, son discriminant est négatif ou nul :
   $$\begin{aligned}4(\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}))^2 - 4\mathbf{V}(\mathbb{X})\mathbf{V}(\mathbb{Y}) &\leqslant 0\\ \left((\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})\right)^2 &\leqslant \mathbf{V}(\mathbb{X})\mathbf{V}(\mathbb{Y}).\end{aligned}$$

Remarque importante : *Dans le cas d'égalité* i.e. $\left(\boldsymbol{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})\right)^2 = \mathbf{V}(\mathbb{X})\mathbf{V}(\mathbb{Y})$, *la fonction* $t \longmapsto \mathbf{V}(t\mathbb{X}+\mathbb{Y})$ *admet alors une unique racine* $\alpha \in \mathbb{R}$ *telle que* $\mathbf{V}(\alpha\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = 0$ i.e. *la variable aléatoire* $\alpha\mathbb{X}+\mathbb{Y}$ *est presque surement constante.*

On reviendra sur ce point à la *proposition (23)* .

Pour terminer, le coefficient de corrélation linéaire et son interprétation :

II.2 – Coefficient de corrélation linéaire

Définition 6 – Coefficient de corrélation linéaire :

Soient $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *deux variables aléatoires d'écarts-types non nuls. Le coefficient de corrélation linéaire de* $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *est le réel, noté* $\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, *défini par :*

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \frac{\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})}{\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{X})\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{Y})},$$

où $\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{X})$ *et* $\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{Y})$ *désignent les écarts-types respectifs de* $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$.

Rappel

$\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{X}) = \sqrt{\mathbf{V}(\mathbb{X})}$.

Remarque

$\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \boldsymbol{\rho}(\mathbb{Y},\mathbb{X})$.

Proposition 23 – Interprétation du coefficient de corrélation linéaire :

Soient $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *deux variables aléatoires de variance non nulle.*

P1 • $-1 \leqslant \boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \leqslant 1$.

P2 • *(1)* $\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = 1$ *si, et seulement si, l'une des variables aléatoires est presque-sûrement fonction affine strictly croissante de l'autre.*

(2) $\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = -1$ *si, et seulement si, l'une des variables aléatoires est presque-sûrement fonction affine strictement décroissante de l'autre.*

Remarques :

— *Le coefficient de corrélation linéaire permet donc de mesurer la dépendance linéaire qui peut exister entre un couple de variables aléatoires* $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

  — *Si* $\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *est proche de* 1 *ou de* -1, *la dépendance linéaire entre* $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *est importante.*
  Exemple : $\mathbb{X}$ = *nombre de remises promotionnelles,* $\mathbb{Y}$ = *volume des ventes.*

  — *Si* $\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *est proche de 0 les deux variables sont linéairement indépendantes.*
  Exemple : $\mathbb{X}$ = *nombre de décès sur les routes de Franche Comté,* $\mathbb{Y}$ = *production de comté.*

— *Le signe de* $\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *(et de* $\boldsymbol{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *) indique le sens d'évolution d'une variable par rapport à l'autre :*

  — *Si* $\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) > 0$, *alors les deux variables évoluent en moyenne dans le même sens.*
  Exemple : $\mathbb{X}$ = *température extérieure,* $\mathbb{Y}$ = *consommation de crèmes glacées.*

  — *Si* $\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) < 0$, *les deux variables évoluent en moyenne en sens inverse.*
  Exemple : $\mathbb{X}$ = *température extérieure,* $\mathbb{Y}$ = *facture de chauffage.*

Vocabulaire : *Si* $\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = 0$ i.e. $\boldsymbol{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = 0$, *on dit que* $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *sont non corrélés.*

Attention

indépendantes $\Longrightarrow$ *non corrélées mais la réciproque est fausse !* confer *le contre-exemple* (12) .

Preuve :

P1 • Découle immédiatement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

P2 • Supposons que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ admettent une variance non nulle.
Remarquons déjà que $\mathbb{Y}$ est presque-sûrement fonction affine de $\mathbb{X}$ si, et seulement si, $\mathbb{X}$ est presque-sûrement fonction affine de $\mathbb{Y}$.
Dans la suite, on considère donc, par exemple, que $\mathbb{Y}$ est fonction affine de $\mathbb{X}$.

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y})| = 1 &\iff \boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y})^2 = 1\\
&\iff \left(\frac{\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})}{\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{X})\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{Y})}\right)^2 = 1\\
&\iff \frac{(\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}))^2}{\mathbf{V}(\mathbb{X})\mathbf{V}(\mathbb{Y})} = 1\\
&\iff (\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}))^2 = \mathbf{V}(\mathbb{X})\mathbf{V}(\mathbb{Y})\\
&\iff \text{il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz}\\
&\iff \text{le discriminant de } t \longmapsto \mathbf{V}(t\mathbb{X}+\mathbb{Y}) \text{ est nul}\\
&\iff t \longmapsto \mathbf{V}(t\mathbb{X}+\mathbb{Y}) \text{ possède une unique racine } \alpha \in \mathbb{R}.\\
&\iff \text{il existe un unique réel } \alpha \text{ tel que } \mathbf{V}(\alpha\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = 0\\
&\iff \text{il existe un unique réel } \alpha \text{ tel que la variable aléatoire } \alpha\mathbb{X}+\mathbb{Y} \text{ est presque-sûrement constante}\\
&\iff \exists\,!\alpha, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } \mathbf{P}([\alpha\mathbb{X}+\mathbb{Y} = b]) = 1\\
&\iff \exists\,!a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } \mathbf{P}([\mathbb{Y} = a\mathbb{X}+b]) = 1.
\end{aligned}
$$

Considérons ensuite ces réels a et b. On a ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) &= \mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) - \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y})\\
&= \mathbf{E}(\mathbb{X}(a\mathbb{X}+b)) - \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(a\mathbb{X}+b)\\
&= a\mathbf{E}\left(\mathbb{X}^2\right) + b\mathbf{E}(\mathbb{X}) - a\mathbf{E}(\mathbb{X})^2 - b\mathbf{E}(\mathbb{X})\\
&= a\left(\mathbf{E}\left(\mathbb{X}^2\right) - \mathbf{E}(\mathbb{X})^2\right)\\
&= a\mathbf{V}(\mathbb{X}) \qquad \text{(formule de Koenig-Huygens)}
\end{aligned}
$$

À retenir
$\mathbf{P}([\mathbb{X} = \mathbb{Y}]) = 1$
$\Downarrow$
$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{Y})$.

Et ainsi :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) &= \frac{a\mathbf{V}(\mathbb{X})}{\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{X})\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{Y})} = \frac{a\mathbf{V}(\mathbb{X})}{\sqrt{\mathbf{V}(\mathbb{X})}\sqrt{\mathbf{V}(a\mathbb{X}+b)}} = \frac{a\mathbf{V}(\mathbb{X})}{|a|\sqrt{\mathbf{V}(\mathbb{X})}\sqrt{\mathbf{V}(\mathbb{X})}} = \frac{a}{|a|}.\\
&= \text{signe de } a.
\end{aligned}
$$

Exemple 11 :

Reprenons une dernière fois les données de l' exemple (6) *et déterminons* $\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

$\mathbb{X}$ \ $\mathbb{Y}$	*1*	*2*	*3*
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	*0*	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
3	*0*	*0*	$\frac{1}{9}$

Rapidement, on a :

— $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{14}{9}$ *et* $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \frac{22}{9}$.

— $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = 4$.

— $\boldsymbol{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) - \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = 4 - \frac{14}{9}\frac{22}{9} = \frac{16}{81}$.

— $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}\left(\mathbb{X}^2\right) - \mathbf{E}(\mathbb{X})^2$

$$= \frac{1^2\times 5 + 2^2\times 3 + 3^2\times 1}{9} - \left(\frac{14}{9}\right)^2 = \frac{26}{9} - \left(\frac{14}{9}\right)^2$$
$$= \frac{9\times 26}{81} - \frac{14^2}{81} = \frac{234-196}{81} = \frac{38}{81}$$

— *De même,* $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \frac{9\times 58 - 22^2}{81} = \frac{38}{81}$.

Finalement,

$$\rho(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \frac{\boldsymbol{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})}{\sqrt{\mathbf{V}(\mathbb{X})}\sqrt{\mathbf{V}(\mathbb{Y})}} = \frac{\frac{16}{81}}{\sqrt{\frac{38}{81}}\sqrt{\frac{38}{81}}} = \frac{16}{81}\times\frac{81}{38} = \frac{16}{38} = \frac{8}{19}.$$

Contre-exemple 12 – Suite de l' exemple (8) :

On a trouvé :

— $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = 0$ *et* $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{Y}) = 0$.
D'après la formule de Koenig-Huygens, on a alors $\boldsymbol{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = 0$.

— *les variables* $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *ne sont pas indépendantes.*

Les variables aléatoires $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *sont non corrélées, mais ne sont pas indépendantes !*

Dernière remarque : *Par la formule des racines des polynômes de second degré, on obtient que l'unique racine* α *de*

$$\mathbf{V}(t\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = t^2\mathbf{V}(\mathbb{X}) + 2t\,\boldsymbol{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y})$$

Rappel

Dans le cas où « $\Delta = 0$ », l'unique racine α de

$$at^2 + bt + c$$

est

$$\alpha = -\frac{b}{2a}.$$

s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{\cancel{\mathbb{V}}\boldsymbol{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})}{\cancel{\mathbb{V}}(\mathbb{X})} = -\frac{\boldsymbol{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})}{\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{X})\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{Y})} \times \frac{\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{X})\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{Y})}{\mathbb{V}(\mathbb{X})} \\ &= -\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \times \frac{\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{X})\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{Y})}{\boldsymbol{\sigma}^2(\mathbb{X})} \\ &= -\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y})\frac{\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{Y})}{\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{X})}\end{aligned}$$

On en déduit finalement, d'après ce qui précède :

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = 1 \iff \exists \beta \in \mathbb{R},\ \mathbb{Y} = \frac{\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{Y})}{\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{X})}\mathbb{X} + \beta \text{ presque sûrement}$$

et

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = -1 \iff \exists \beta \in \mathbb{R},\ \mathbb{Y} = -\frac{\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{Y})}{\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{X})}\mathbb{X} + \beta \text{ presque sûrement.}$$

Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont liées par une relation affine.

Attention

Attention encore une fois de ne pas confondre « indépendance linéaire » et « indépendance » : si $\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = 0$ (ou $\boldsymbol{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = 0$), alors $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont linéairement indépendantes.
Mais elles ne sont pas forcément indépendantes : il peut exister une dépendance non linéaire entre les variables, par exemple $\mathbb{Y} = e^{\mathbb{X}}$, $\ln(\mathbb{X})$, ...

***Un peu d'histoire :* Corrélation *vs* Indépendance**

L'indépendance et la corrélation ou plus exactement la dépendance et la corrélation sont deux notions en statistique qui sont souvent confondues. Formellement, l'indépendance entre deux variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ indique que la connaissance de la réalisation de l'une des variables n'a aucune incidence sur la probabilité de réalisation de l'autre variable. La corrélation quant à elle renvoie à l'existence d'une liaison linéaire entre les deux variables.

Donc l'indépendance est une notion liée à la « chance » de réalisation des évènements des variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ tandis que la corrélation est une notion liée à la fonction linéaire qui existerait entre les valeurs des deux variables.

Il est théoriquement démontré que si deux variables sont indépendantes alors elles ne sont pas corrélées. Autrement dit, si les probabilités de réalisation des événements liés aux variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ vérifient la condition d'indépendance alors les valeurs de ces variables n'ont pas de liaison linéaire entre elles. Par conséquent, si deux variables sont corrélées alors elles sont nécessairement dépendantes (c'est-à-dire elles ne sont pas indépendantes).

Ce résultat laisse alors la possibilité aux situations ou des variables seraient dépendantes sans être corrélées.

III. Bilan et compétences attendues

Les compétences attendues sur le chapitre couple de variables aléatoires réelles sont les suivantes :

- *savoir déterminer l'espérance d'une somme (linéarité !), d'un produit (théorème de transfert).*
- *connaître la définition de la covariance et savoir calculer $\boldsymbol{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. Il faut connaître les propriétés (linéarité à droite et à gauche) de l'opérateur $\boldsymbol{Cov}$.*
- *savoir déterminer la variance d'une somme (formule dans le cas général et formule dans le cas de l'indépendance).*
- *savoir calculer un coefficient de corrélation linéaire et savoir commenter sa valeur (proximité de 1, -1 et signe).*

— *savoir démontrer que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes via le calcul de l'espérance du produit / de la covariance / du coefficient de corrélation linéaire (3 formulations différentes de la même propriété).*

Remédiation 30

Espérance d'un produit, covariance, corrélation

Exercice V.1 – (Du tableau au coefficient de corrélation) [Correction p. 584]

Soit $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$\mathbb{X}\backslash\mathbb{Y}$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
2	0	$\frac{1}{8}$	0

1. Déterminer les lois de $\mathbb{X}$ et de $\mathbb{Y}$, puis calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X})$, $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$, $\mathbf{V}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{Y})$.
2. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$ par le théorème de transfert.
3. En déduire $\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, puis le coefficient de corrélation linéaire $\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.
4. Les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice V.2 – (Covariance nulle sans indépendance) [Correction p. 584]

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ et $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^2$.

1. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$.
2. En déduire $\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.
3. Les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice V.3 – (Bilinéarité de la covariance avec des valeurs numériques) [Correction p. 585]

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2, avec $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = 2$, $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = 3$ et $\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 1$.

1. Calculer $\mathbf{Cov}(\mathbb{X} + \mathbb{Y}, \mathbb{X} - \mathbb{Y})$.
2. Calculer $\mathbf{Cov}(2\mathbb{X} + \mathbb{Y}, \mathbb{X} - 3\mathbb{Y})$.
3. Calculer $\mathbf{V}(2\mathbb{X} - \mathbb{Y} + 1)$.
4. Calculer $\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Exercice V.4 – (Covariance à partir des variances) [Correction p. 585]

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires admettant une variance, avec $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = 1$, $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = 2$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = 5$.

Calculer $\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ et $\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

Exercice V.5 – (Cas d'une relation affine) [Correction p. 585]

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire de variance 4 et $\mathbb{Y} = -2\mathbb{X}+5$.

Calculer $\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ et $\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. Que peut-on en conclure ?

Correction de l'exercice V.1 : [Énoncé]

1. *On somme lignes et colonnes : $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ont la même loi, donnée par*

$$\mathbf{P}([\mathbb{X}=0]) = \frac{3}{8}, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=1]) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=2]) = \frac{1}{8}.$$

Alors $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$ *et* $\mathbf{E}(\mathbb{X}^2) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{4}{8} = 1$.

Par Koenig-Huygens, $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$. *De même,* $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \frac{3}{4}$ *et* $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \frac{7}{16}$.

2. *Les cases où $xy = 0$ ne contribuent pas. Il reste :*

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = 1\times 1\times\frac{1}{4} + 1\times 2\times\frac{1}{8} + 2\times 1\times\frac{1}{8} + 2\times 2\times 0 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Méthode
On barre d'abord toutes les cases où $x = 0$ ou $y = 0$: elles valent 0.

3. *Par la formule de Koenig-Huygens :*

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) - \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \frac{3}{4} - \frac{9}{16} = \frac{3}{16}.$$

Puis

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \frac{\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})}{\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{X})\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{Y})} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{7}.$$

Le coefficient est positif et assez éloigné de 1 : dépendance linéaire modérée, dans le même sens.

4. *Comme $\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \neq 0$, les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes (contraposée de : indépendantes $\Longrightarrow$ covariance nulle).*

Correction de l'exercice V.2 : [Énoncé]

1. $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \dfrac{-1+0+1}{3} = 0$. *Comme* $\mathbb{X}\mathbb{Y} = \mathbb{X}^3 = \mathbb{X}$ *(car* $\mathbb{X}(\Omega) = \{-1,0,1\}$*), on a* $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}) = 0$.

2. $\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) - \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = 0 - 0 = 0$.

3. *Non :* $\mathbb{Y}(\Omega) = \{0,1\}$, $\mathbf{P}([\mathbb{Y}=1]) = \frac{2}{3}$ *et*

$$\mathbf{P}([\mathbb{X}=0]\cap[\mathbb{Y}=1]) = 0 \neq \mathbf{P}([\mathbb{X}=0])\,\mathbf{P}([\mathbb{Y}=1]) = \frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Piège
Covariance nulle $\not\Longrightarrow$ indépendance. Ici, $\mathbb{Y}$ est même une fonction de $\mathbb{X}$!

Correction de l'exercice V.3 : [Énoncé]

1. *Par bilinéarité et symétrie :*

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{X}+\mathbb{Y},\mathbb{X}-\mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) - \mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) + \mathbf{Cov}(\mathbb{Y},\mathbb{X}) - \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = 2-3 = -1.$$

2. *On développe comme un produit :*

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(2\mathbb{X}+\mathbb{Y},\mathbb{X}-3\mathbb{Y}) &= 2\mathbf{V}(\mathbb{X}) - 6\,\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) + \mathbf{Cov}(\mathbb{Y},\mathbb{X}) - 3\mathbf{V}(\mathbb{Y})\\ &= 4-6+1-9 = -10.\end{aligned}$$

3. *Une constante n'influe pas sur la variance :*

$$\mathbf{V}(2\mathbb{X}-\mathbb{Y}+1) = \mathbf{V}(2\mathbb{X}-\mathbb{Y}) = 4\mathbf{V}(\mathbb{X}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y}) - 4\,\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = 8+3-4 = 7.$$

Piège
Le coefficient devant $\mathbb{Y}$ est -1 : le double produit vaut $2\times2\times(-1)\times\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = -4\,\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

4. $\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Correction de l'exercice V.4 : [Énoncé]

On a $\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y}) + 2\,\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, *d'où*

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) - \mathbf{V}(\mathbb{X}) - \mathbf{V}(\mathbb{Y})\Big) = \frac{5-1-2}{2} = 1.$$

Puis $\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \dfrac{1}{1\times\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction de l'exercice V.5 : [Énoncé]

Par linéarité à droite et $\mathbf{Cov}(\mathbb{X},5) = 0$ *:*

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = -2\,\mathbf{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{X}) = -2\mathbf{V}(\mathbb{X}) = -8.$$

De plus $\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{X}) = 2$ *et* $\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{Y}) = |-2|\,\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{X}) = 4$, *donc*

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \frac{-8}{2\times4} = -1.$$

On retrouve que $\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = -1$ *lorsque* $\mathbb{Y}$ *est fonction affine strictement décroissante de* $\mathbb{X}$. *Plus généralement, si* $\mathbb{Y} = a\mathbb{X}+b$ *avec* $a\neq0$, *alors* $\boldsymbol{\rho}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *est le signe de* a.

TD 8

Espérance, Variance et Indépendance

IV. Classiques

Exercice V.1 – (Loi avec un paramètre) [Correction p. 590]

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire telle que $\mathbb{X}(\Omega) = \{-1, 0, 1, 2\}$ et

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = -1]) = a, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0]) = 2a, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1]) = 3a, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = 2]) = 4a, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer a.
2. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X})$, $\mathbf{E}(\mathbb{X}^2)$ puis $\mathbf{V}(\mathbb{X})$.
3. On pose $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^2 - \mathbb{X}$. Donner la loi de $\mathbb{Y}$ et en déduire $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$. Retrouver ce résultat sans passer par la loi de $\mathbb{Y}$.

Exercice V.2 – (Lois usuelles et transformations affines) [Correction p. 590]

1. Un lot contient 20 pièces, chacune étant défectueuse avec la probabilité $\dfrac{1}{10}$, indépendamment des autres. On note $\mathbb{X}$ le nombre de pièces défectueuses. Chaque pièce défectueuse coûte 5 euros de retouche et le lot entraîne 30 euros de frais fixes : le coût total est $\mathrm{C} = 5\mathbb{X} + 30$.
   Donner la loi de $\mathbb{X}$, puis calculer $\mathbf{E}(\mathrm{C})$, $\mathbf{V}(\mathrm{C})$ et $\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{C})$.
2. Un opérateur rappelle un client jusqu'à ce que celui-ci décroche. Chaque appel aboutit avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$, indépendamment des autres. On note $\mathbb{Y}$ le nombre d'appels. Un appel qui n'aboutit pas dure 3 minutes, l'appel qui aboutit dure 1 minute : la durée totale est $\mathrm{T} = 3\mathbb{Y} - 2$.
   Donner la loi de $\mathbb{Y}$, puis calculer $\mathbf{E}(\mathrm{T})$ et $\mathbf{V}(\mathrm{T})$.
3. On lance un dé équilibré à six faces et on note $\mathbb{U}$ le numéro obtenu. Le gain est $\mathrm{W} = 2\mathbb{U} + 1$. Calculer $\mathbf{E}(\mathrm{W})$ et $\mathbf{V}(\mathrm{W})$.

Exercice V.3 – (Espérance sans variance) [Correction p. 591]

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire discrète telle que $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = \frac{a}{k(k+1)(k+2)}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

1. Vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$. En déduire la valeur de a.
2. Montrer que $\mathbb{X}$ admet une espérance et la calculer.
3. La variable aléatoire $\mathbb{X}$ admet-elle une variance ?

Exercice V.4 – (Test d'indépendance sur un tableau) [Correction p. 591]

On donne la loi du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$: le tableau contient les probabilités $\mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j])$.

	$\mathbb{Y}=1$	$\mathbb{Y}=2$	$\mathbb{Y}=3$
$\mathbb{X}=1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\mathbb{X}=2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

1. Déterminer les lois de $\mathbb{X}$ et de $\mathbb{Y}$.
2. Les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X})$, $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$. Que constate-t-on ?

Exercice V.5 – (Non corrélées mais pas indépendantes) [Correction p. 592]

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ et $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^2$.

1. Donner la loi de $\mathbb{Y}$.
2. Montrer que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes.
3. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{X})\,\mathbf{E}(\mathbb{Y})$. Que peut-on en conclure ?
4. Calculer $\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y})$. Que peut-on en conclure ?

V. Concours

Exercice V.6 – (Loi de Poisson et formule de transfert) [Correction p. 592]

Soit $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

1. Montrer que $\dfrac{1}{\mathbb{X}+1}$ admet une espérance et que $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{\mathbb{X}+1}\right) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}$.
2. Calculer $\mathbf{E}\left(\mathbb{X}(\mathbb{X}-1)\right)$. En déduire $\mathbf{E}(\mathbb{X}^2)$ puis $\mathbf{V}(\mathbb{X})$.
3. Montrer que $(-1)^{\mathbb{X}}$ admet une espérance et la calculer. En déduire la probabilité que $\mathbb{X}$ soit pair.
4. Montrer que $2^{\mathbb{X}}$ admet une espérance et la calculer. La comparer à $2^{\mathbf{E}(\mathbb{X})}$.

Exercice V.7 – (Le jeu de Saint-Pétersbourg) [Correction p. 593]

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir « Pile » pour la première fois. On note $\mathbb{X}$ le rang du premier « Pile » et le joueur gagne $\mathrm{G} = 2^{\mathbb{X}}$ euros.

1. Donner la loi de $\mathbb{X}$. Montrer que G n'admet pas d'espérance.
2. Le casino plafonne les gains : le joueur gagne $\mathrm{G}_m = \min\left(2^{\mathbb{X}}, 2^m\right)$ euros, où $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbf{E}(\mathrm{G}_m) = m + 1$.
3. On appelle mise équitable l'espérance du gain. Quelle est la mise équitable pour $m = 10$? pour $m = 20$? Commenter.

Exercice V.8 – (Loi géométrique : sans mémoire et moments) [Correction p. 593]

Soient $p \in]0\,;1[$, $q = 1-p$ et $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$ *i.e.* $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = q^{k-1}p$.

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}([\mathbb{X} > n]) = q^n$.
2. Montrer que $\forall\, (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}_{[\mathbb{X}>n]}([\mathbb{X} > n+m]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} > m])$. Interpréter.
3. On admet que si $\mathbb{X}$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admet une espérance, alors $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{X} > n])$. Retrouver la valeur de $\mathbf{E}(\mathbb{X})$.
4. On rappelle que $\forall\, x \in]-1\,;1[$, $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \dfrac{2}{(1-x)^3}$. Montrer que $\mathbb{X}(\mathbb{X}-1)$ admet une espérance égale à $\dfrac{2q}{p^2}$. En déduire que $\mathbb{X}$ admet une variance et que $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \dfrac{q}{p^2}$.
5. Proposer une fonction Python `simu_G(p)` qui simule $\mathbb{X}$ en reproduisant l'expérience, puis une instruction qui approche $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X})$ pour $p = 0{,}2$. Quelles valeurs approchées attend-on ?

Exercice V.9 – (Poisson et sélection) [Correction p. 594]

Le nombre N de clients qui entrent dans un magasin en une heure suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Chaque client, indépendamment des autres et de N, effectue un achat avec la probabilité $p \in]0\,;1[$. On pose $q = 1-p$, on note $\mathbb{X}$ le nombre de clients qui achètent et $\mathbb{Y} = \mathrm{N} - \mathbb{X}$ le nombre de clients qui n'achètent pas.

1. Pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, déterminer $\mathbf{P}_{[\mathrm{N}=n]}([\mathbb{X} = k])$.
2. Montrer que $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda p)$.
3. Justifier, sans calcul, que $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda q)$.
4. Montrer que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes.
5. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$. Retrouver $\mathbf{V}(\mathrm{N})$ à l'aide de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.

Exercice V.10 – (Minimum de deux temps d'attente et simulation) [Correction p. 595]

Deux appareils fonctionnent indépendamment. Le temps d'attente (en jours) avant la première panne de chacun est modélisé par $\mathbb{X}_1 \rightsquigarrow \mathcal{G}(p_1)$ et $\mathbb{X}_2 \rightsquigarrow \mathcal{G}(p_2)$, indépendantes, avec $p_1, p_2 \in]0\,;1[$. On note $q_i = 1-p_i$ et $\mathbb{U} = \min(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$: c'est le temps d'attente avant la première panne de l'un des deux appareils.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbf{P}([\mathbb{X}_i > n])$.
2. Exprimer $[\mathbb{U} > n]$ à l'aide de $[\mathbb{X}_1 > n]$ et $[\mathbb{X}_2 > n]$. En déduire $\mathbf{P}([\mathbb{U} > n])$.
3. Montrer que $\mathbb{U}$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire $\mathbf{E}(\mathbb{U})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{U})$.
4. Écrire une fonction Python `simul(p1, p2)` qui renvoie une réalisation de $\mathbb{U}$, puis une instruction qui approche $\mathbf{E}(\mathbb{U})$ pour $p_1 = \dfrac{1}{2}$ et $p_2 = \dfrac{1}{3}$. Quelle valeur attend-on ?

Exercice V.11 – (Maximum et minimum de deux dés) [Correction p. 595]

On lance deux dés équilibrés à six faces, indépendants. On note $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ les numéros obtenus, $\mathbb{V} = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et $\mathbb{U} = \min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

1. Pour $k \in [\![1\,;6]\!]$, calculer $\mathbf{P}([\mathbb{V} \leqslant k])$. En déduire la loi de $\mathbb{V}$.
2. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{V})$.

3. Justifier que $\mathbb{U}+\mathbb{V}=\mathbb{X}+\mathbb{Y}$. En déduire $\mathbf{E}(\mathbb{U})$ sans déterminer la loi de $\mathbb{U}$.
4. Calculer $\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y})$.

Exercice V.12 – (Espérance et variance totales) [Correction p. 596]

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{X}\rightsquigarrow\mathcal{U}(\llbracket 1\,;n\rrbracket)$. On lance $\mathbb{X}$ fois une pièce équilibrée et on note $\mathbb{Y}$ le nombre de « Pile » obtenus : sachant $[\mathbb{X}=k]$, la variable $\mathbb{Y}$ suit la loi $\mathcal{B}\left(k\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

On rappelle que $\mathbf{E}(\mathbb{Y})=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}([\mathbb{X}=k])\,\mathbf{E}(\mathbb{Y}\mid[\mathbb{X}=k])$ et que la même formule vaut pour $\mathbb{Y}^2$.

1. Pour $k\in\llbracket 1\,;n\rrbracket$, calculer $\mathbf{E}(\mathbb{Y}\mid[\mathbb{X}=k])$ et $\mathbf{E}(\mathbb{Y}^2\mid[\mathbb{X}=k])$.
2. En déduire $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$.
3. Montrer que $\mathbf{E}(\mathbb{Y}^2)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{12}$ puis que $\mathbf{V}(\mathbb{Y})=\dfrac{(n+1)(n+5)}{48}$.
4. Applications numériques pour $n=6$.

Exercice V.13 – (Nombre de records) [Correction p. 596]

On range n personnes de tailles deux à deux distinctes dans un ordre aléatoire (les $n!$ ordres sont équiprobables) et on les regarde passer l'une après l'autre. La k-ième personne est un *record* si elle est plus grande que les $k-1$ précédentes (la première est donc toujours un record). On note R_k la variable indicatrice de cet événement et $\mathrm{S}_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{R}_k$ le nombre de records.

On admet que $\mathrm{R}_1,\dots,\mathrm{R}_n$ sont mutuellement indépendantes et que $\mathrm{R}_k\rightsquigarrow\mathcal{B}\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

1. Calculer $\mathbf{E}(\mathrm{R}_k)$ et $\mathbf{V}(\mathrm{R}_k)$.
2. En déduire $\mathbf{E}(\mathrm{S}_n)$ et $\mathbf{V}(\mathrm{S}_n)$.
3. Montrer que $\forall\,k\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k}\geqslant\ln(k+1)-\ln(k)$. En déduire que $\mathbf{E}(\mathrm{S}_n)\geqslant\ln(n+1)$.
4. Écrire une fonction Python `nb_records(n)` qui simule S_n, puis une instruction qui approche $\mathbf{E}(\mathrm{S}_{10})$. Quelle valeur attend-on ?

Exercice V.14 – (Linéarité sans indépendance : les rencontres) [Correction p. 597]

Lors d'une soirée, $n\geqslant 2$ personnes déposent chacune leur chapeau au vestiaire. On redistribue ensuite les n chapeaux au hasard (les $n!$ répartitions sont équiprobables). On note $\mathbb{X}$ le nombre de personnes qui récupèrent leur propre chapeau et, pour $i\in\llbracket 1\,;n\rrbracket$, $\mathbb{X}_i$ la variable indicatrice de l'événement A_i : « la personne i récupère son chapeau ».

1. Donner la loi de $\mathbb{X}_i$ et calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X}_i)$.
2. Exprimer $\mathbb{X}$ à l'aide des $\mathbb{X}_i$ et en déduire $\mathbf{E}(\mathbb{X})$.
3. Calculer $\mathbf{P}([\mathbb{X}_1=1]\cap[\mathbb{X}_2=1])$. Les variables $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ sont-elles indépendantes ? Commenter le calcul de la question 2.
4. Écrire une fonction Python `rencontres(n)` qui simule $\mathbb{X}$, puis une instruction qui approche $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ pour $n=10$.

Corrigés

Correction de l'exercice V.1 : [Énoncé]

1. *Comme* $\sum_{x\in\mathbb{X}(\Omega)} \mathbf{P}([\mathbb{X}=x]) = 1$, *on a* $a+2a+3a+4a = 10a = 1$, *donc* $\boxed{a = \frac{1}{10}}$.

2. *On calcule*
$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{-1\times 1 + 0\times 2 + 1\times 3 + 2\times 4}{10} = 1,$$
$$\mathbf{E}(\mathbb{X}^2) = \frac{1\times 1 + 0\times 2 + 1\times 3 + 4\times 4}{10} = 2.$$
D'après la formule de König-Huygens,
$$\boxed{\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^2) - \mathbf{E}(\mathbb{X})^2 = 2-1 = 1.}$$

3. *Si* $\mathbb{X}=-1$ *alors* $\mathbb{Y}=2$ *; si* $\mathbb{X}=0$ *alors* $\mathbb{Y}=0$ *; si* $\mathbb{X}=1$ *alors* $\mathbb{Y}=0$ *; si* $\mathbb{X}=2$ *alors* $\mathbb{Y}=2$. *Donc* $\mathbb{Y}(\Omega)=\{0,2\}$ *et*
$$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=0]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}=0]) + \mathbf{P}([\mathbb{X}=1]) = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2},$$
$$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=2]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}=-1]) + \mathbf{P}([\mathbb{X}=2]) = \frac{1}{10} + \frac{4}{10} = \frac{1}{2}.$$
Ainsi $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = 0\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{2} = 1$.
Sans la loi de $\mathbb{Y}$, *par linéarité de l'espérance :* $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^2) - \mathbf{E}(\mathbb{X}) = 2-1 = 1$.

Remarque
On retrouve le même résultat avec la formule de transfert : $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \sum_x (x^2-x)\mathbf{P}([\mathbb{X}=x])$

Correction de l'exercice V.2 : [Énoncé]

1. $\mathbb{X}$ *compte les succès (pièces défectueuses) dans* 20 *épreuves indépendantes de même probabilité* $\frac{1}{10}$ *:* $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(20\,;\,\frac{1}{10}\right)$. *Donc*
$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 20\times\frac{1}{10} = 2 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = 20\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10} = \frac{9}{5}.$$
Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(\mathrm{C}) = 5\times 2 + 30 = \boxed{40}$ *euros.*
De plus $\mathbf{V}(\mathrm{C}) = 5^2\,\mathbf{V}(\mathbb{X}) = 25\times\frac{9}{5} = \boxed{45}$ *et* $\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{C}) = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}7$ *euros.*

2. $\mathbb{Y}$ *est le rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre* $\frac{1}{4}$ *:* $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{4}\right)$. *Donc*
$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \frac{1}{1/4} = 4 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \frac{3/4}{(1/4)^2} = 12.$$
Alors $\mathbf{E}(\mathrm{T}) = 3\times 4 - 2 = \boxed{10}$ *minutes et* $\mathbf{V}(\mathrm{T}) = 3^2\times 12 = \boxed{108}$.

3. $\mathbb{U} \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 1\,;6\rrbracket)$ *donc* $\mathbf{E}(\mathbb{U}) = \frac{7}{2}$ *et* $\mathbf{V}(\mathbb{U}) = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12}$. *Ainsi*
$$\mathbf{E}(\mathrm{W}) = 2\times\frac{7}{2} + 1 = \boxed{8} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}(\mathrm{W}) = 2^2\times\frac{35}{12} = \boxed{\frac{35}{3}}.$$

Correction de l'exercice V.3 : [Énoncé]

1. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k(k+1)(k+2)}.$$

La somme est télescopique : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}.$$

La condition $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) = 1$ donne $\dfrac{a}{4} = 1$, donc $\boxed{a = 4.}$

2. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) = \dfrac{4}{(k+1)(k+2)} = 4\left(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+2}\right) \geqslant 0$. Cette fois encore la somme est télescopique :*

$$\sum_{k=1}^{n} k\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2.$$

La série à termes positifs $\sum k\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=k])$ converge, donc $\mathbb{X}$ admet une espérance et $\boxed{\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 2.}$

3. *$\mathbb{X}$ admet une variance si, et seulement si $\mathbb{X}$ admet un moment d'ordre 2, c'est-à-dire si, et seulement si la série $\sum k^2\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=k])$ converge. Or*

$$k^2\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) = \frac{4k}{(k+1)(k+2)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{4}{k} > 0,$$

et la série harmonique $\sum \dfrac{1}{k}$ diverge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum k^2\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=k])$ diverge : $\mathbb{X}$ n'admet pas de moment d'ordre 2, donc ***pas de variance****.*

Correction de l'exercice V.4 : [Énoncé]

1. *On somme les lignes, puis les colonnes :*

$$\mathbf{P}([\mathbb{X}=1]) = \frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12} = \frac{1}{3}, \qquad \mathbf{P}([\mathbb{X}=2]) = \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y}=1]) = \frac{1}{6}+\frac{1}{3} = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{P}([\mathbb{Y}=2]) = \frac{1}{12}+\frac{1}{6} = \frac{1}{4}, \qquad \mathbf{P}([\mathbb{Y}=3]) = \frac{1}{12}+\frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$

2. *On compare chaque case au produit des marginales :*

	$\mathbb{Y}=1$	$\mathbb{Y}=2$	$\mathbb{Y}=3$
$\mathbb{X}=1$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
$\mathbb{X}=2$	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{6}$

On retrouve exactement le tableau de l'énoncé : pour tout (i,j), $\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}=i])\,\mathbf{P}([\mathbb{Y}=j])$. Donc $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes.

3. *$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 1\times\dfrac{1}{3} + 2\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$ et $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = 1\times\dfrac{1}{2} + 2\times\dfrac{1}{4} + 3\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4}$. D'après le théorème de transfert pour le couple,*

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \sum_{i,j} ij\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j]) = \frac{1}{6}+\frac{2}{12}+\frac{3}{12}+\frac{2}{3}+\frac{4}{6}+\frac{6}{6} = \frac{35}{12}.$$

Or $\mathbf{E}(\mathbb{X})\,\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \dfrac{5}{3}\times\dfrac{7}{4} = \dfrac{35}{12}$: on retrouve $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X})\,\mathbf{E}(\mathbb{Y})$, ce qui est conforme au théorème sur l'espérance d'un produit de variables indépendantes.

Correction de l'exercice V.5 : [Énoncé]

1. $\mathbb{Y}(\Omega) = \{0,1\}$ *avec* $\mathbf{P}([\mathbb{Y}=0]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}=0]) = \dfrac{1}{3}$ *et* $\mathbf{P}([\mathbb{Y}=1]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}=-1]) + \mathbf{P}([\mathbb{X}=1]) = \dfrac{2}{3}$. *Ainsi* $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

2. $\mathbf{P}([\mathbb{X}=0] \cap [\mathbb{Y}=1]) = 0$ *car* $\mathbb{X}=0$ *entraîne* $\mathbb{Y}=0$. *Or* $\mathbf{P}([\mathbb{X}=0])\,\mathbf{P}([\mathbb{Y}=1]) = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9} \neq 0$. *Donc* $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *ne sont pas indépendantes.*

3. *Comme* $\mathbb{X}\mathbb{Y} = \mathbb{X}^3 = \mathbb{X}$ *(car* $\mathbb{X} \in \{-1,0,1\}$*), on a* $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}) = 0$. *D'autre part* $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 0$ *donc* $\mathbf{E}(\mathbb{X})\,\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = 0$. *Ainsi* $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X})\,\mathbf{E}(\mathbb{Y})$ bien que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne soient pas indépendantes *: la réciproque du théorème sur l'espérance d'un produit est fausse.*

4. $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}^2) - 0 = \dfrac{2}{3}$ *et* $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}$, *donc* $\mathbf{V}(\mathbb{X}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \dfrac{8}{9}$.

   Par ailleurs, $\mathbb{X}+\mathbb{Y}$ *vaut* 0 *si* $\mathbb{X} \in \{-1,0\}$ *et* 2 *si* $\mathbb{X}=1$ *:* $\mathbb{X}+\mathbb{Y} = 2\mathbb{1}$ *où* $\mathbb{1} \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{3}\right)$. *Donc* $\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = 4\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{9}$.

   On a $\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y})$ *sans indépendance : la réciproque du théorème sur la variance d'une somme est elle aussi fausse.*

Correction de l'exercice V.6 : [Énoncé]

1. *D'après le théorème de transfert, il suffit d'étudier la série de terme général*

$$\frac{1}{k+1}\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) = \frac{1}{k+1}\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\,\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \geqslant 0.$$

   La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$ *converge (série exponentielle) avec* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = e^{\lambda}-1$. *Donc* $\dfrac{1}{\mathbb{X}+1}$ *admet une espérance et*

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{\mathbb{X}+1}\right) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\,(e^{\lambda}-1) = \boxed{\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.}$$

2. *Pour* $k \geqslant 2$, $k(k-1)\dfrac{\lambda^k}{k!} = \dfrac{\lambda^k}{(k-2)!}$ *et le terme est nul pour* $k \in \{0,1\}$. *Donc*

$$\mathbf{E}\left(\mathbb{X}(\mathbb{X}-1)\right) = e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-2)!} = e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!} = \boxed{\lambda^2.}$$

   Par linéarité, $\mathbf{E}(\mathbb{X}^2) = \mathbf{E}\left(\mathbb{X}(\mathbb{X}-1)\right) + \mathbf{E}(\mathbb{X}) = \lambda^2+\lambda$ *puis* $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \lambda^2+\lambda-\lambda^2 = \boxed{\lambda.}$

3. *La série* $\sum(-1)^k\mathbf{P}([\mathbb{X}=k])$ *est absolument convergente car* $\sum\mathbf{P}([\mathbb{X}=k])$ *converge. D'où*

$$\mathbf{E}\left((-1)^{\mathbb{X}}\right) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda}\,e^{-\lambda} = \boxed{e^{-2\lambda}.}$$

   Or $(-1)^{\mathbb{X}}$ *vaut* 1 *sur* $[\mathbb{X}$ *pair*$]$ *et* -1 *sur* $[\mathbb{X}$ *impair*$]$. *Donc*

$$\mathbf{E}\left((-1)^{\mathbb{X}}\right) = \mathbf{P}([\mathbb{X}\text{ pair}]) - \mathbf{P}([\mathbb{X}\text{ impair}]) = 2\,\mathbf{P}([\mathbb{X}\text{ pair}]) - 1,$$

   et $\boxed{\mathbf{P}([\mathbb{X}\text{ pair}]) = \dfrac{1+e^{-2\lambda}}{2}.}$

4. *Le terme* $2^k\,\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) = e^{-\lambda}\dfrac{(2\lambda)^k}{k!}$ *est positif et la série converge (série exponentielle). Donc* $2^{\mathbb{X}}$ *admet une espérance et*

$$\mathbf{E}\left(2^{\mathbb{X}}\right) = e^{-\lambda}\,e^{2\lambda} = \boxed{e^{\lambda}.}$$

   Comme $e > 2$ *et* $\lambda > 0$, *on a* $\mathbf{E}(2^{\mathbb{X}}) = e^{\lambda} > 2^{\lambda} = 2^{\mathbf{E}(\mathbb{X})}$ *: en général,* $\mathbf{E}(g(\mathbb{X})) \neq g(\mathbf{E}(\mathbb{X}))$.

Correction de l'exercice V.7 : [Énoncé]

1. *$\mathbb{X}$ est le rang du premier succès dans une suite d'épreuves indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$:* $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$, *donc* $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = \dfrac{1}{2^k}$.

   D'après le théorème de transfert, $\mathrm{G} = 2^{\mathbb{X}}$ *admet une espérance si, et seulement si la série de terme général* $2^k\,\mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = 1$ *converge absolument. Cette série diverge grossièrement :* G ***n'admet pas d'espérance***.

2. G_m *vaut* $2^{\mathbb{X}}$ *si* $\mathbb{X} \leqslant m$ *et* 2^m *si* $\mathbb{X} > m$. *Elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs* $(2, 4, \dots, 2^m)$, *donc admet une espérance, et*

$$\mathbf{E}(\mathrm{G}_m) = \sum_{k=1}^{m} 2^k\,\mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) + 2^m\,\mathbf{P}([\mathbb{X} > m]) = \sum_{k=1}^{m} 1 + 2^m \times \frac{1}{2^m} = \boxed{m+1.}$$

   On a utilisé $\mathbf{P}([\mathbb{X} > m]) = \left(\frac{1}{2}\right)^m$ *(il faut* m *« Face » d'affilée).*

3. *Pour* $m = 10$ *la mise équitable est* 11 *euros, et pour* $m = 20$ *elle n'est que de* 21 *euros, alors que le gain maximal est* $2^{20} = 1\,048\,576$ *euros. Doubler le plafond d'une façon « exponentielle » n'augmente l'espérance que de façon linéaire en* m *: c'est le paradoxe de Saint-Pétersbourg.*

Correction de l'exercice V.8 : [Énoncé]

1. *L'événement* $[\mathbb{X} > n]$ *signifie que les* n *premiers lancers sont des échecs. Par somme d'une série géométrique,*

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} > n]) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^{k-1}p = p\,q^n \sum_{j=0}^{+\infty} q^j = p\,q^n \times \frac{1}{1-q} = \boxed{q^n.}$$

2. *Comme* $[\mathbb{X} > n+m] \subset [\mathbb{X} > n]$ *et* $\mathbf{P}([\mathbb{X} > n]) = q^n \neq 0$,

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}>n]}([\mathbb{X} > n+m]) = \frac{\mathbf{P}([\mathbb{X} > n+m])}{\mathbf{P}([\mathbb{X} > n])} = \frac{q^{n+m}}{q^n} = q^m = \mathbf{P}([\mathbb{X} > m]).$$

   Sachant que les n *premiers lancers ont échoué, le temps d'attente restant a la même loi que le temps d'attente initial : la loi géométrique est* sans mémoire.

3. *Avec la formule admise,*

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \boxed{\frac{1}{p}.}$$

> **Remarque**
> *Cette formule suppose l'existence de l'espérance, que l'on connaît ici car la loi* $\mathcal{G}(p)$ *admet une espérance.*

4. *Pour tout* $k \geqslant 2$ *:* $k(k-1)\mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = p\,q\,k(k-1)q^{k-2} \geqslant 0$. *Comme* $q \in\,]0\,;1[$, *la série converge et*

$$\mathbf{E}\left(\mathbb{X}(\mathbb{X}-1)\right) = p\,q \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = p\,q \times \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2pq}{p^3} = \boxed{\frac{2q}{p^2}.}$$

   Comme $\mathbb{X}^2 = \mathbb{X}(\mathbb{X}-1) + \mathbb{X}$ *et que* $\mathbb{X}(\mathbb{X}-1)$ *et* $\mathbb{X}$ *admettent une espérance,* $\mathbb{X}$ *admet un moment d'ordre* 2, *donc une variance, et* $\mathbf{E}(\mathbb{X}^2) = \dfrac{2q}{p^2} + \dfrac{1}{p}$. *Ainsi*

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q+p-1}{p^2} = \boxed{\frac{q}{p^2}} \qquad (\text{car } p - 1 = -q).$$

5. *On répète des lancers de Bernoulli de paramètre* p *jusqu'au premier succès :*

Éditeur
```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simu_G(p):
    n = 1
    while rd.random() > p:
        n = n + 1
    return n
```

À chaque tour de boucle, `rd.random() > p` se produit avec la probabilité $q = 1 - p$: c'est un échec, et on continue. Pour approcher l'espérance et la variance (loi des grands nombres) :

Éditeur
```python
N = 100000
echantillon = np.array([simu_G(0.2) for _ in
 ⇝  range(N)])
print(np.mean(echantillon), np.var(echantillon))
```

On attend $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \dfrac{1}{p} = 5$ *et* $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \dfrac{q}{p^2} = \dfrac{0{,}8}{0{,}04} = 20$.

Correction de l'exercice V.9 : [Énoncé]

1. *Sachant* $[\mathrm{N} = n]$, *il y a* n *clients qui achètent chacun avec la probabilité* p, *indépendamment :* $\mathbb{X}$ *suit la loi* $\mathcal{B}(n\,;p)$. *Donc*
$$\mathbf{P}_{[\mathrm{N}=n]}([\mathbb{X}=k]) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

2. $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}$ *et* $([\mathrm{N}=n])_{n\in\mathbb{N}}$ *est un système complet d'événements. Pour* $k \in \mathbb{N}$, *par la formule des probabilités totales,*
$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathrm{N}=n])\,\mathbf{P}_{[\mathrm{N}=n]}([\mathbb{X}=k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,p^k q^{n-k} \\ &= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\,e^{\lambda q} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!},\end{aligned}$$
car $-\lambda + \lambda q = -\lambda p$. *Donc* $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda p)$.

3. $\mathbb{Y}$ *compte les clients qui n'achètent pas : c'est la même situation en échangeant les rôles de « achète » et « n'achète pas », c'est-à-dire en remplaçant* p *par* q. *Donc* $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda q)$.

4. *Soit* $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. *Comme* $[\mathbb{X}=i] \cap [\mathbb{Y}=j] = [\mathrm{N}=i+j] \cap [\mathbb{X}=i]$,
$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j]) &= \mathbf{P}([\mathrm{N}=i+j])\,\mathbf{P}_{[\mathrm{N}=i+j]}([\mathbb{X}=i]) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}\,\frac{(i+j)!}{i!\,j!}\,p^i q^j \\ &= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^i}{i!} \times e^{-\lambda q}\frac{(\lambda q)^j}{j!} = \mathbf{P}([\mathbb{X}=i])\,\mathbf{P}([\mathbb{Y}=j]).\end{aligned}$$
Donc $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *sont indépendantes.*

5. *Par indépendance,* $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X})\,\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \lambda p \times \lambda q = \boxed{\lambda^2 pq.}$ *Comme* $\mathrm{N} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$ *avec* $\mathbb{X}$ *et* $\mathbb{Y}$ *indépendantes,*
$$\mathbf{V}(\mathrm{N}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \lambda p + \lambda q = \boxed{\lambda},$$
ce qui est cohérent avec $\mathrm{N} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Correction de l'exercice V.10 : [Énoncé]

1. *Comme* $\mathbb{X}_i \rightsquigarrow \mathcal{G}(p_i)$, *on a* $\mathbf{P}([\mathbb{X}_i > n]) = q_i^n$ *(voir l'exercice précédent).*

2. *Le minimum est strictement supérieur à* n *si, et seulement si les deux variables le sont :* $[\mathbb{U} > n] = [\mathbb{X}_1 > n] \cap [\mathbb{X}_2 > n]$. *Par indépendance,*

$$\mathbf{P}([\mathbb{U} > n]) = \mathbf{P}([\mathbb{X}_1 > n])\,\mathbf{P}([\mathbb{X}_2 > n]) = (q_1 q_2)^n.$$

3. $\mathbb{U}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ *et, pour* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}([\mathbb{U} = n]) = \mathbf{P}([\mathbb{U} > n-1]) - \mathbf{P}([\mathbb{U} > n]) = (q_1q_2)^{n-1} - (q_1q_2)^n = (q_1q_2)^{n-1}(1 - q_1q_2).$$

Comme $q_1q_2 \in]0\,;1[$, *on reconnaît* $\boxed{\mathbb{U} \rightsquigarrow \mathcal{G}(1-q_1q_2)}$. *D'où*

$$\mathbf{E}(\mathbb{U}) = \frac{1}{1-q_1q_2} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}(\mathbb{U}) = \frac{q_1q_2}{(1-q_1q_2)^2}.$$

4. *La fonction* `rd.geometric(p)` *simule la loi* $\mathcal{G}(p)$:

Éditeur
```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul(p1, p2):
    return min(rd.geometric(p1), rd.geometric(p2))
```

Par la loi des grands nombres, on approche l'espérance par une moyenne empirique :

Éditeur
```
N = 100000
echantillon = np.array([simul(1/2, 1/3) for _ in
 ⇝  range(N)])
print(np.mean(echantillon))
```

Pour $p_1 = \dfrac{1}{2}$ *et* $p_2 = \dfrac{1}{3}$, $q_1q_2 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$ *donc* $\mathbf{E}(\mathbb{U}) = \dfrac{1}{1-1/3} = \dfrac{3}{2}$ *: on attend une valeur proche de* $1{,}5$.

Correction de l'exercice V.11 : [Énoncé]

1. *Le maximum est inférieur ou égal à* k *si, et seulement si les deux numéros le sont :* $[\mathbb{V} \leqslant k] = [\mathbb{X} \leqslant k] \cap [\mathbb{Y} \leqslant k]$. *Par indépendance,*

$$\mathbf{P}([\mathbb{V} \leqslant k]) = \frac{k}{6} \times \frac{k}{6} = \frac{k^2}{36}.$$

Pour $k \in [\![1\,;6]\!]$ *(avec* $\mathbf{P}([\mathbb{V} \leqslant 0]) = 0$*), on obtient*

$$\mathbf{P}([\mathbb{V} = k]) = \mathbf{P}([\mathbb{V} \leqslant k]) - \mathbf{P}([\mathbb{V} \leqslant k-1]) = \frac{k^2 - (k-1)^2}{36} = \boxed{\frac{2k-1}{36}.}$$

2. *On utilise* $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} k = 21$ *et* $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} k^2 = 91$:

$$\mathbf{E}(\mathbb{V}) = \sum_{k=1}^{6} k\,\frac{2k-1}{36} = \frac{2 \times 91 - 21}{36} = \boxed{\frac{161}{36}} \approx 4{,}47.$$

3. *Pour tout* ω, *les deux nombres* $\mathbb{X}(\omega)$ *et* $\mathbb{Y}(\omega)$ *sont, dans un certain ordre,* $\mathbb{U}(\omega)$ *et* $\mathbb{V}(\omega)$ *: donc* $\mathbb{U} + \mathbb{V} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$. *Par linéarité de l'espérance,*

$$\mathbf{E}(\mathbb{U}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}) + \mathbf{E}(\mathbb{Y}) - \mathbf{E}(\mathbb{V}) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} - \frac{161}{36} = \boxed{\frac{91}{36}}.$$

4. *$\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes donc* $\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = 2 \times \dfrac{35}{12} = \boxed{\dfrac{35}{6}}$.

Correction de l'exercice V.12 : [Énoncé]

1. *Sachant* $[\mathbb{X}=k]$, $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(k\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ *donc*

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y} \mid [\mathbb{X}=k]) = \frac{k}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{E}(\mathbb{Y}^2 \mid [\mathbb{X}=k]) = \mathbf{V}(\mathbb{Y} \mid [\mathbb{X}=k]) + \mathbf{E}(\mathbb{Y} \mid [\mathbb{X}=k])^2 = \frac{k}{4} + \frac{k^2}{4},$$

d'après König-Huygens appliqué à la loi conditionnelle.

2. *Comme* $\mathbf{P}([\mathbb{X}=k]) = \dfrac{1}{n}$,

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2} = \frac{1}{2n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \boxed{\frac{n+1}{4}}.$$

3. *De même,*

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}^2) = \frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{n} (k+k^2) = \frac{1}{4n}\left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$
$$= \frac{n+1}{4} \times \frac{3+2n+1}{6} = \frac{(n+1)(n+2)}{12}.$$

Alors, par la formule de König-Huygens,

$$\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \frac{(n+1)(n+2)}{12} - \frac{(n+1)^2}{16} = \frac{(n+1)\left(4(n+2)-3(n+1)\right)}{48} = \boxed{\frac{(n+1)(n+5)}{48}}.$$

4. *Pour* $n=6$ *:* $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \dfrac{7}{4}$ *et* $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \dfrac{7 \times 11}{48} = \dfrac{77}{48}$.

Correction de l'exercice V.13 : [Énoncé]

1. $\mathrm{R}_k \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{k}\right)$ *donc* $\mathbf{E}(\mathrm{R}_k) = \dfrac{1}{k}$ *et* $\mathbf{V}(\mathrm{R}_k) = \dfrac{1}{k}\left(1-\dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k^2}$.

2. *Par linéarité de l'espérance,*

$$\mathbf{E}(\mathrm{S}_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Les R_k *étant mutuellement indépendantes, la variance de la somme est la somme des variances :*

$$\mathbf{V}(\mathrm{S}_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right).$$

3. *On a* $\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{k}$ *car* $\ln(1+x) \leqslant x$ *pour tout* $x > -1$. *En sommant pour* k *de* 1 *à* n, *la somme du membre de droite est* $\mathbf{E}(\mathrm{S}_n)$ *et celle du membre de gauche est télescopique :*

$$\mathbf{E}(\mathrm{S}_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).$$

Le nombre moyen de records tend donc vers $+\infty$ *avec* n, *mais très lentement.*

4. *On tire une permutation aléatoire des tailles et on compte les records :*

Éditeur
```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def nb_records(n):
    perm = rd.permutation(n)
    record = perm[0]
    compte = 1
    for k in range(1, n):
        if perm[k] > record:
            record = perm[k]
            compte = compte + 1
    return compte
```

La variable `record` *contient la plus grande taille rencontrée jusque-là. Pour approcher l'espérance :*

Éditeur
```python
N = 20000
print(np.mean([nb_records(10) for _ in range(N)]))
```

On attend $\mathbf{E}(\mathrm{S}_{10}) = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} = \frac{7381}{2520} \approx 2{,}93.$

Correction de l'exercice V.14 : [Énoncé]

1. *La personne* i *récupère l'un quelconque des* n *chapeaux avec la même probabilité (par symétrie) :* $\mathbf{P}(\mathrm{A}_i) = \frac{1}{n}$. *Donc* $\mathbb{X}_i \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$ *et* $\mathbf{E}(\mathbb{X}_i) = \frac{1}{n}$.

2. *On a* $\mathbb{X} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$. *Par linéarité de l'espérance,*

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\mathbb{X}_i) = n \times \frac{1}{n} = \boxed{1,}$$

quel que soit n *: en moyenne, une seule personne retrouve son chapeau.*

3. *Il y a* $(n-2)!$ *répartitions où les personnes* 1 *et* 2 *retrouvent leur chapeau, donc*

$$\mathbf{P}([\mathbb{X}_1 = 1] \cap [\mathbb{X}_2 = 1]) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Or $\mathbf{P}([\mathbb{X}_1 = 1])\,\mathbf{P}([\mathbb{X}_2 = 1]) = \frac{1}{n^2} \neq \frac{1}{n(n-1)}$ *: les variables* $\mathbb{X}_1$ *et* $\mathbb{X}_2$ ***ne sont pas indépendantes*** *(si la personne* 1 *a récupéré son chapeau, il est plus probable que la personne* 2 *récupère le sien). Pourtant le calcul de la question 2 est valable : la linéarité de l'espérance* ne demande aucune hypothèse d'indépendance.

4. *On utilise une permutation aléatoire des numéros des chapeaux :*

Éditeur

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def rencontres(n):
    perm = rd.permutation(n)
    compte = 0
    for i in range(n):
        if perm[i] == i:
            compte = compte + 1
    return compte

N = 20000
print(np.mean([rencontres(10) for _ in range(N)]))
```

On attend une valeur proche de $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 1$.

DM 6 — Espérance et corrélation

Exercice 1 – (Minimum et maximum de deux variables géométriques) :

Soit $p \in]0\,;1[$ et $q = 1-p$. On pose $r = 1-q^2$.

Soient $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ deux variables aléatoires indépendantes, de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On définit

$$\mathbb{U} = \min(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) \quad \text{et} \quad \mathbb{V} = \max(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2).$$

Partie I – Loi de $\mathbb{U}$

1. Rappeler l'espérance et la variance de $\mathbb{X}_1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}([\mathbb{X}_1 > n]) = q^n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Exprimer l'événement $[\mathbb{U} > n]$ à l'aide de $[\mathbb{X}_1 > n]$ et $[\mathbb{X}_2 > n]$.
   En déduire $\mathbf{P}([\mathbb{U} > n])$, puis que $\mathbb{U} \rightsquigarrow \mathcal{G}(r)$. Donner $\mathbf{E}(\mathbb{U})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{U})$.

Partie II – Espérance et covariance

3. Vérifier que $\mathbb{U}+\mathbb{V} = \mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2$ et $\mathbb{U}\mathbb{V} = \mathbb{X}_1\mathbb{X}_2$. En déduire que $\mathbb{V}$ admet une espérance et que
$$\mathbf{E}(\mathbb{V}) = \frac{2}{p} - \frac{1}{r}.$$
4. Montrer que $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ admettent un moment d'ordre 2. Montrer ensuite que
$$\mathbf{Cov}(\mathbb{U},\mathbb{V}) = \frac{q^2}{r^2}.$$
5. Établir que $\mathbf{Cov}(\mathbb{U},\mathbb{V}) = \mathbf{V}(\mathbb{U})$. En déduire que $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}-\mathbb{U}$ sont non corrélées.
6. Les variables aléatoires $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ sont-elles indépendantes ?

Partie III – Variance de $\mathbb{V}$ et corrélation

7. Calculer $\mathbf{V}(\mathbb{U}+\mathbb{V})$ de deux façons différentes. En déduire
$$\mathbf{V}(\mathbb{V}) = \frac{2q}{p^2} - \frac{3q^2}{r^2}.$$

8. Montrer que $r = p(1+q)$, puis que le coefficient de corrélation linéaire de $(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ vaut
$$\boldsymbol{\rho}(\mathbb{U}, \mathbb{V}) = \sqrt{\frac{q}{2q^2+q+2}}.$$

9. En étudiant la fonction $f : q \longmapsto \dfrac{q}{2q^2+q+2}$ pour $q \in]0\,;1[$, vérifier que $0 < \boldsymbol{\rho}(\mathbb{U}, \mathbb{V}) < \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et commenter.

Partie IV – Meilleure approximation affine et simulation

10. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, exprimer $\mathbf{V}(\mathbb{V} - t\,\mathbb{U})$ en fonction de t, q et r.
Pour quelle valeur de t cette quantité est-elle minimale ? Donner alors ce minimum.

11. Pour $p = \dfrac{1}{2}$, calculer $\mathbf{E}(\mathbb{U})$, $\mathbf{E}(\mathbb{V})$ et $\mathbf{Cov}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$.
Écrire ensuite un script Python simulant un grand nombre de réalisations de $(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ et affichant les moyennes empiriques de $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ ainsi que leur covariance empirique, afin de comparer avec les valeurs théoriques.

I

Python – Rappels de première année

Plan du chapitre

I Prise en main ***602***

II Rappels des principales commandes vues en première année ***603***

II.1 Ce que dit le programme 603

II.2 Les affectations 603

II.3 Les Types 604

II.4 Les fonctions d'entrée et de sortie 605

II.5 Instructions conditionnelles 606

II.6 Les fonctions 609

I. Prise en main

L'environnement de développement

L'environnement de développement est constitué de plusieurs fenêtres.

1. *Un interpréteur interactif appelé* ***console*** *permet d'exécuter des instructions en ligne de commande.*

   Il suffit pour cela de taper du code directement à la suite de l'invite `>>>`.

   S'il y a plusieurs instructions, on les sépare par un point-virgule.

   En appuyant sur la touche `Entrée` *(retour à la ligne), on obtient l'exécution des instructions saisies sur la ligne.*

   L'instruction tapée est évaluée et le résultat est alors affiché dans la console.

2. *Un* ***éditeur*** *de texte destiné à la saisie des programmes qui offre par défaut un certain nombre de fonctionnalités qui améliore l'expérience utilisateur.*

   — *Coloration syntaxique.*

   Les mots clé du langage sont colorés ce qui améliore la lisibilité des programmes.

   — *Indentation automatique.*

   Automatiquement, un espace est créé lors de l'écriture du corps d'un bloc.

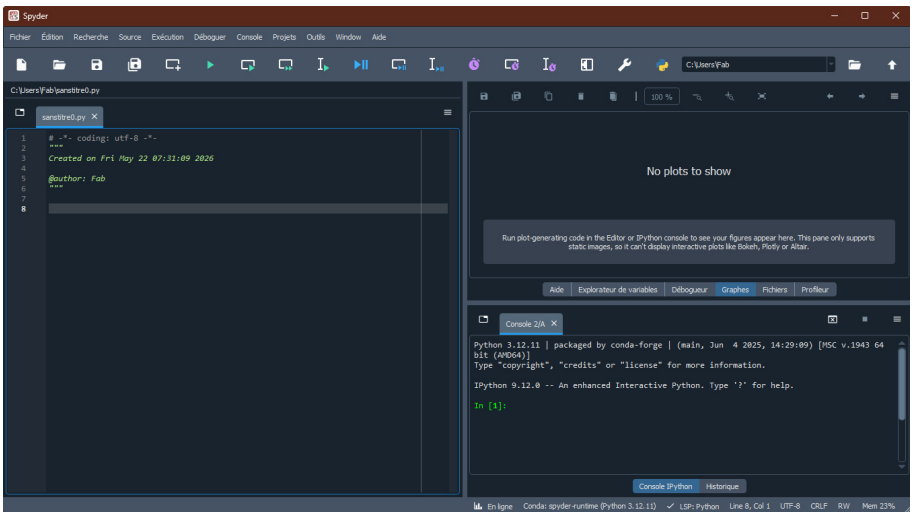
   — *Complétion automatique.*

   Lors de la saisie, différents termes permettant de compléter le mot sont proposés à l'utilisateur.

   On sépare les instructions en passant à la ligne et on doit obligatoirement enregistrer le programme avant de pouvoir l'exécuter.

   Après enregistrement et compilation du code, l'exécution se déroule dans la console.

3. *Un* ***affichage*** *pour les graphiques et histogrammes créés.*



4. *Un explorateur de variables, qui permet de connaitre les valeurs contenues dans les variables en cours d'utilisation.*

5. *Un explorateur de fichiers qui permet de se déplacer dans l'arborescence de fichier et d'en charger dans l'éditeur de texte.*

II. Rappels des principales commandes vues en première année

II.1 – Ce que dit le programme

Toute la richesse du langage Python ne peut pas être entièrement maîtrisée par un étudiant, aussi le paragraphe ci-dessous liste limitativement les éléments du langage Python (version 3 ou supérieure) dont la connaissance est exigible des étudiants.

Il s'agit de la liste des commandes utiles pour les travaux pratiques des deux années de formation.

Compétences attendues

— *Connaître et savoir manipuler les différents objets de base du langage `Python` (les entiers, les nombres flottants, les booléens, les chaînes de caractères, les variables).*

— *Savoir programmer en `Python` : fonctions d'entrée et de sortie, boucles `if`, …*

— *Savoir définir une `fonction` en `Python`.*

Liste des commandes Python exigibles aux concours

— *Opérations sur les entiers et les flottants : `+`, `-`, `*`, `/`, `**`*

— *Comparaison et connecteurs logiques pour les booléens : `==`, `>`, `<`, `>=`, `<=`, `!=`, `True`, `False`, `and`, `or`, `not`*

— *Programmation : `=`, `input`, `print`, `if`, `elif`, `else`, `def`, `return`, …*

II.2 – Les affectations

La notion de `variable` est essentielle en informatique. Elle s'articule autour de 3 principes :

— *stockage d'une information,*

— *accès au contenu du stockage,*

— *modification de l'information stockée.*

Dans la pratique, une variable est repérée par son nom auquel on associe une valeur `val`. Ce mécanisme d'association `nom = val` est appelé affectation.

Éditeur

```
1 a=4          # crée la variable a et lui affecte la
  ↪ valeur 4
2 a,b=1,2      # a vaut 1 et b vaut 2
```

Définition 1 – Portée d'une variable :

La portée d'une variable est la zone de code dans laquelle la variable vit (on peut récupérer sa valeur, la mettre à jour).

Illustrons cette notion, plus subtile qu'il n'y parait, sur des exemples.

Exercice I.1 [Correction p. 611]

1. On considère tout d'abord le programme suivant.

Éditeur
```
a = 1
b = 1
for i in range (3):
    print(a)
```

Quel est le résultat produit par ce programme ? Commenter.

2. On ajoute alors les instructions suivantes.

Éditeur
```
def f():
    b = 2
    c = 3
    print(a, b, c)

print(b)
```

Quel est la valeur de b affichée par ce programme ? Commenter.

II.3 – Les Types

entiers	*nombres à virgule*	*booléens*	*chaînes de caractère*	*objets matriciels*
int	*float*	*bool*	*str*	*np.array*

Éditeur
```
type(a)          # affiche le type de la variable a
```

addition	soustraction	multiplication	division	puissance
$a + b$	$a - b$	$a * b$	a/b	$a * * b$

TABLE I.1 : Opérations arithmétiques de base

vrai	faux	et	ou	non	$=$	$<$	$>$	$\leqslant$	$\geqslant$	$\neq$
true	false	and	or	not	==	<	>	<=	>=	!=

TABLE I.2 : Opérateurs logiques

Exemples 1 :

Console

```
>>> type(45)
<class 'int'>
>>> type('Hello there')
<class 'str'>
>>> type(3.14159)
<class 'str'>
>>> type(['world',24,15.78,[57]])
<class 'list'>
>>> type(True)
<class 'bool'>
```

II.4 – Les fonctions d'entrée et de sortie

Définition 2 :

— ***Instructions d'affichage :***

L'instruction `print('Mon message')` *écrit le message* `Mon message` *dans la console.*

L'instruction `print(x)` *affiche le contenu de la variable* `x`.

— ***Instructions de saisie :***

L'instruction `x=input('Mon message')` *écrit le message* `Mon message` *dans la console puis donne la main à l'utilisateur pour qu'il rentre la valeur à affecter à la variable* `x`.

Remarques :

— *L'instruction* `print(x,y,z)` *provoque l'affichage des contenus des variables* `x`, `y`, `z` *dans cet ordre sur une même ligne. Il est aussi possible de combiner affichage de messages et affichage de contenus de variables.*

Exemple 2 :

1. *Taper dans la console les instructions suivantes :*

Console
```
>>> print('Hello there')
```

2. *Taper dans l'éditeur de texte les instructions suivantes puis exécuter :*

Éditeur
```
n = int(input('Entrer n :'))
print('Le nombre qui suit ',n,' est
 ↪  ',n+1)
```

— *Attention : en faisant* `x=input ('Mon message')`*, la valeur entrée par l'utilisateur et affectée à la variable* `x` *est systématiquement de type chaîne de caractères* `str`*. Si on veut un entier ou un nombre flottant, il faudra utiliser les commandes* `int` *et* `float`*.*

Exercice I.2 [Correction p. 611]

1. a. Exécuter l'instruction ci-dessous :

Console
```
>>> a=input('Entrer un nombre: ')
>>> type(a)
```

b. Que remarquez-vous ?

2. a. Exécuter les instructions ci-dessous :

Console
```
>>> a=int(input('Entrer un entier: '))
>>> type(a)
>>> a=float(input('Entrer un nombre: '))
>>> type(a)
>>> a=eval(input('Entrer un contenu de type quelconque: '))
>>> type(a)
```

b. Commenter chaque résultat. (Pour la dernière instruction, on fera varier le type du contenu).

II.5 – Instructions conditionnelles

Définition 3 :

Pour effectuer un bloc d'instructions sous certaines conditions, on utilise une boucle `if`*.*

Voici la syntaxe :

Éditeur

```
if condition_1 :
    instructions_1
elif condition_2
    instructions_2
...
elif condition_{k-1}
    instructions_{k-1}
else :
    instructions_k
```

Si la $condition_1$ est vraie, le premier bloc d'instructions ($instructions_1$) est effectué.

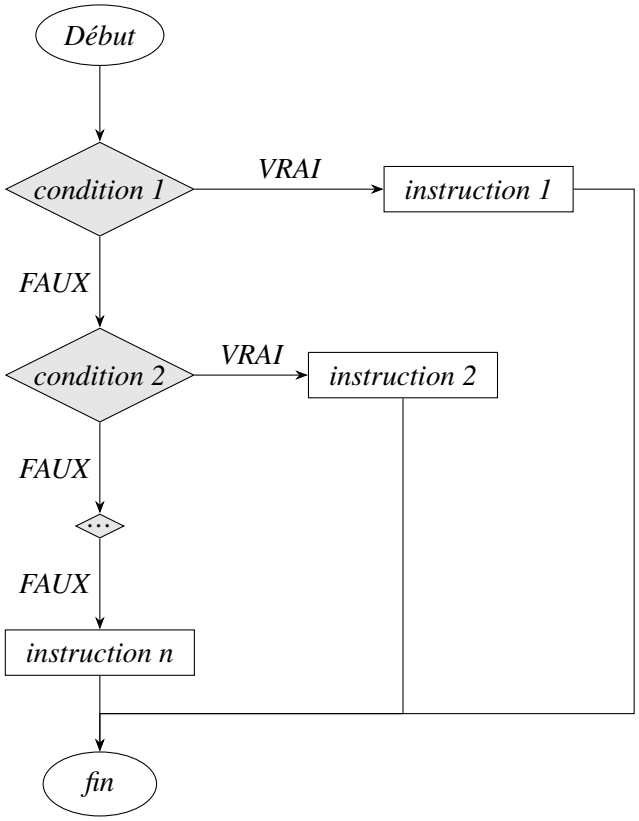
Si la $condition_1$ est fausse, on fait un deuxième test.

Si la $condition_2$ est vraie, le deuxième bloc d'instructions ($instruction_2$) est effectué.

Ce procédé est répété jusqu'à la $condition_{k-1}$.

Si la $condition_{k-1}$ est vraie, le bloc d'instructions ($instructions_{k-1}$) est effectué.

Si la $condition_{k-1}$ est fausse, le dernier bloc d'instructions ($instructions_k$) est effectué.



Remarques :

— *Il faut penser aux deux points après chaque condition et après le* `else`.

— *Bien respecter l'indentation : c'est elle qui permet à `Python` de reconnaître le bloc d'instructions à exécuter et où se termine la structure conditionnelle. Une fois les instructions écrites, si l'on doit poursuivre le script, on revient au même niveau d'indentation que le `if`.*

Exemple 3 :

Taper dans l'éditeur de texte le script suivant puis l'exécuter. Que calcule-t-il ?

Éditeur
```
a = float(input('Entrer un réel a : '))
if a >= 0 :
    print(a)
else :
    print(-a)
```

Exercice I.3 [Correction p. 612]

1. Décrire le déroulement du programme ci-dessous.

Éditeur
```
k=int(input('Quel est votre age ?'))
if k<=12 :
        print('vous avez droit au menu enfant !')
elif k>12 and k<= 18 :
    print('vous avez droit au menu spécial jeune !')
else :
    print("vous n'avez droit à rien !")
```

2. Que se passe-t-il si l'utilisateur entre la valeur 10 ? la valeur 18 ? la valeur 25 ?

Exercice I.4 [Correction p. 613]

Compléter le programme ci-dessous qui demande trois réels a, b et c et qui affiche le nombre de racines réelles du polynôme du second degré $\mathrm{P} : x \longmapsto ax^2 + bx + c$.

Selon les cas, le programme devra afficher le message « P n'admet pas de racine », « P admet une racine » ou « P admet deux racines ».

Éditeur
```
a = float(input('Donner une valeur non nulle pour a : '))
b = ... ... 'Donner une valeur pour b : '
c = ... ... 'Donner une valeur pour c : '
d = b^2-4*a*c
if ... :
    print('P admet deux racines racines réelles.')
elif ... :
    print('P admet une racine réelle.')
else :
    print('P admet zero racine réelle.')
```

II.6 – Les fonctions

Définition 4 :

— *La commande*

Éditeur
```
def nom(x) :
    instructions
    return ...
```

permet de créer une fonction, nommée ici `nom`*, qui à chaque variable* `x` *associe la quantité définie après le* `return`*.*

— *Une fonction peut posséder plusieurs variables. L'en-tête est alors* `def nom(x1,x2,...,xn) :`

Exemple 4 :

Pour définir la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 + 2x + 1$*, recopier le script suivant dans l'éditeur de texte :*

Éditeur
```
def f(x) :
    return x**2 + 2*x + 1
```

Après avoir exécuté, on peut alors utiliser cette fonction dans la console. Taper par exemple :

```
>>> f(1), f(0), f(-1)
```

Console
```
>>> f(1), f(0), f(-1)
(4, 1, 0)
```

Remarques :

— *Toujours la même remarque : attention aux deux points et à l'indentation !*

— *Les fonctions seront systématiquement à définir dans l'éditeur de texte. Une fois qu'une fonction a été chargée (le script qui la contient a été sauvegardé et exécuté), elle est disponible jusqu'à la fin de la session. Elle peut donc être appelée par son nom dans la console ou dans une autre fonction. L'appel de la fonction dans la console provoque l'affichage de la valeur retournée.*

— *Les variables utilisées dans le corps d'une fonction sont des variables locales : elles n'existent pas à l'extérieur de la fonction.*

— *Lorsqu'on définit une fonction, inutile d'ajouter les fonctions d'entrée et de sortie* `input` *et* `print` *à celle-ci. L'utilisateur est censé connaitre l'argument à rentrer pour la fonction.* `Python` *renverra le contenu des variables placées après le return.*

Dans l'exemple précédent, l'utilisateur rentre donc un entier ou un flottant à la fonction f , et Python renvoie le résultat du calcul donné après le `return` *en sortie.*

— *L'instruction* `return` *arrête le déroulement de la fonction. Si cette instruction est rencontrée, le programme s'arrête donc (en affichant le contenu de la variable à retourner) et le code situé après le* `return` *ne s'exécutera pas.*

Exemple 5 :

Recopier la fonction suivante dans l'éditeur de texte :

Éditeur
```
def minimum(x,y) :
    if x<=y :
        return x
    else :
        return y
```

Enregistrer et exécuter cette fonction puis tester la sur quelques exemples.

Exercice I.5 – (La valeur absolue) [Correction p. 613]

Définir une fonction `valabs`, qui prend en entrée un flottant et qui renvoie sa valeur absolue.

Éditeur
```
def valabs(x) :
    if ... :
        return ...
    else :
        return ...
```

Exercice I.6 – (Fonctions et `fonction`) [Correction p. 613]

1. Compléter la procédure f suivante sur `fonction` qui définit la fonction :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Éditeur
```
def f(x) :
    if ... :
        return ...
    else :
        return ...
```

2. On donne le script suivant :

Éditeur
```
def g(x) :
    if x<-1 :
        y=-2
    if x>=-1 and x<=1 :
        y=2 * x
    if x>1 :
        y=2
    return y
```

   a. Déterminer l'expression mathématique de la fonction g ainsi définie.

   b. Proposer un script analogue au précédent qui utilise `elif`.

Corrigés

Correction de l'exercice I.1 : [Énoncé]

1. *Les variables `a` et `b` sont des variables définies dans le bloc de code principal du programme. Elles sont dites globales. Elles sont accessibles partout dans le module.*

2. *La valeur affichée est* 1. *En effet, la définition `b=2` est une définition locale à la fonction `f`. Cette définition n'est accessible qu'au sein du bloc de code de la fonction.*

   Lors de l'appel à la fonction `f`, une case mémoire est créée pour stocker la valeur de `b`. Cette case est supprimée à la fin de l'exécution de `f`.

Correction de l'exercice I.2 : [Énoncé]

1. a.

Console

```
>>> a=input('Entrer un nombre: ')
Entrer un nombre : 45
>>> type(a)
<class 'str'>
```

   b. *La variable `a` est de type `string` (chaîne de caractères).*

2. a.

Console

```
>>> a=int(input('Entrer un entier: '))

Entrer un entier : 45

>>> type(a)
<class 'int'>
>>> a=float(input('Entrer un nombre: : '))

Entrer un nombre : 45

>>> type(a)
<class 'float'>

>>> a=eval(input('Entrer un contenu de type quelconque: '))

Entrer un contenu de type quelconque : 45

>>> type(a)
<class 'int'>

>>> a=eval(input('Entrer un contenu de type quelconque: '))

Entrer un contenu de type quelconque : Hello there

>>> type(a)
<class 'str'>

>>> a=eval(input('Entrer un contenu de type quelconque: '))

Entrer un contenu de type quelconque : 3.14159

>>> type(a)
<class 'float'>

>>> a=eval(input('Entrer un contenu de type quelconque: '))

Entrer un contenu de type quelconque : [1,3.14159,[2],"Hello"]

>>> type(a)
<class 'list'>
```

Correction de l'exercice I.3 : [Énoncé]

1. *Le programme demande l'âge à l'utilisateur et l'affecte en tant qu'entier dans une variable k puis, suivant la valeur, propose un menu comme suit :*
   - *Jusqu'à 12 inclus, un menu enfant.*
   - *De 13 à 18, un menu spécial jeune.*
   - *Au-delà de 19, rien.*
2. confer *question précédente. On parcourt les trois cas.*

Correction de l'exercice I.4 : [Énoncé]

Éditeur
```
a = float(input('Donner une valeur non nulle pour a : '))
b = float(input('Donner une valeur pour b : '))
c = float(input('Donner une valeur pour c : '))
d = b^2-4*a*c
if d>0 :
    print('P admet deux racines racines réelles.')
elif d==0 :
    print('P admet une racine réelle.')
else :
    print('P admet zero racine réelle.')
```

Correction de l'exercice I.5 : [Énoncé]

Éditeur
```
def valabs(x) :
    if x<0 :
        return -x
    else :
        return x
```

Correction de l'exercice I.6 : [Énoncé]

1.

Éditeur
```
def f(x) :
    if x != 0 :
        return 1/x
    else :
        return 0
```

2. a. *Ce programme définit la fonction suivante :*

$$g(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 2x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b.

Éditeur
```
def g(x) :
    if x < -1 :
        y = -2
    elif x<= 1 :
        y = 2*x
    else :
        y = 1
    return y
```

II

Python – Les boucles

Plan du chapitre

I Les boucles for *615*
I.1 Présentation 615
I.2 Les boucles classiques et fondamentales 616
II Les boucles while *619*
II.1 Présentation 619
II.2 Les boucles classiques et fondamentales 619

Compétences attendues

— *Savoir programmer en Python : fonctions d'entrée et de sortie, boucles `if`, `for`, `while`.*

Liste des commandes Python exigibles aux concours

— *Comparaison et connecteurs logiques pour les booléens : `==`, `>`, `<`, `>=`, `<=`, `!=`, `True`, `False`, `and`, `or`, `not`*

— *Programmation : `range`, `for`, `while`,*

I. Les boucles `for`

I.1 – Présentation

Définition 5 :

La commande range énumère des entiers en progression arithmétique.

- `range(n)` *énumère les entiers successifs de* 0 *à* $n-1$.
- `range(n,m)` *énumère les entiers successifs de* n *à* $m-1$ *(avec* $n<m$ *).*
- `range(n,m,r)` *énumère les entiers en progression arithmétique de raison* r *(entier positif ou négatif, appelé le pas), de* n *inclu à* m *exclu.*

Remarques :

- *La commande range ne provoque pas d'affichage.*
- *On prendra garde à deux choses : l'énumération s'arrête avant l'entier pris comme extrémité à droite, et par défaut, elle commence à* 0 *et non à* 1 .
  Par exemple :
  - `range(7)` *énumère les entiers* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.
  - `range(3,9)` *énumère les entiers* 3, 4, 5, 6, 7, 8.
  - `range(-2,8,2)` *énumère les entiers* -2, 0, 2, 4, 6.
  - `range(4,0,-1)` *énumère les entiers* 4, 3, 2, 1.

Définition 6 :

Pour répéter un bloc d'instructions un nombre déterminé de fois, on utilise une boucle `for`.

La syntaxe est la suivante :

Éditeur
```
for variable in range(début, fin,pas) :
        instructions
```

La variable parcourt dans l'ordre les entiers de début inclus à fin exclu en suivant le pas régulier et, à chaque étape, les instructions sont effectuées.

Remarques :

- *Comme pour les instructions conditionnelles, il faut faire attention aux deux points après le range et à l'indentation !*
- *Pour le* `range`*, on utilisera lorsque c'est possible les expressions simplifiées* `range(n,m)` *ou* `range(n)`.

Exemple 6 :

Taper dans l'éditeur de texte le script suivant puis l'exécuter. Que calcule-t-il ?

Éditeur
```
p = 1
for k in range(1,11) :
    p = p*k
print(p)
```

Console
```
3628800
```

Le script calcule 10!.

— *Une spécificité du langage* Python *est qu'il est possible d'itérer sur de nombreux objets. On peut remplacer l'énumérateur* range *par une chaîne de caractères ou un tableau.*

— *Par exemple, avec une chaîne de caractère :*

Éditeur
```
for car in "ma chaine":
  print(car)
```

On obtient l'affichage successif de chaque lettre de cette chaine de caractère.

Console
```
m a c h a i n e
```

— *Si la variable* T *contient un tableau, la boucle*

Éditeur
```
for variable in T :
        instructions
```

répète les instructions indentées, une fois pour chaque élément du tableau.

I.2 – Les boucles classiques et fondamentales

Exercice II.1 – (Suite récurrente simple) [CORRECTION P. 622]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 1}$.

1. Définir une fonction `suite` qui, à un entier naturel n en entrée, renvoie la valeur de u_n.

Éditeur
```
def ... :
    u = ...
    for k in ... :
        ...
    return ...
```

2. De manière empirique, que diriez vous de la limite éventuelle de cette suite ?

Exercice II.2 – (Produit simple) [Correction p. 622]

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

1. a. Compléter le programme ci-dessous qui prend en argument n et renvoie u_n.
   Que conjecturez-vous ?

```
Éditeur
1  n = int(input('Donner n : '))
2  P = ...
3  for i in ... :
4          ...
5  print(...)
```

   b. Démontrer votre conjecture.

2. Mêmes questions avec la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice II.3 – (Suite récurrente double) [Correction p. 622]

Soit $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $\mathrm{F}_0 = 0$, $\mathrm{F}_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$.

1. Définir une fonction `Fib` qui, à un entier naturel $n \geqslant 2$ en entrée, renvoie la valeur de F_n.

```
Éditeur
1  def Fib... :
2      u = ...
3      v = ...
4      for k in ... :
5          ...
6      return w
```

2. Modifier votre fonction afin qu'elle renvoie le quotient $\frac{\mathrm{F}_{n+1}}{\mathrm{F}_n}$ pour $n \geqslant 1$.
   Une conjecture sur sa limite éventuelle ?

Exercice II.4 [Correction p. 623]

Méthode 1 :

1. En vous aidant de l' exemple (6) , écrire une fonction `facto` qui prend un entier naturel n en argument et renvoie $n!$.
2. En utilisant la formule explicite des coefficients binomiaux, en déduire une fonction `binom1` qui prend en argument deux entiers p et n et renvoie $\binom{n}{p}$.
3. Tester votre programme. Que pouvez vous conclure sur son efficacité ?

Méthode 2 :

1. Justifier que pour $p, n \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leqslant n$: $\binom{n}{p} = \prod_{i=1}^{p}\frac{n-p+i}{i}$.

2. Compléter le programme suivant permettant le calcul de $\binom{n}{p}$.

Éditeur
```
def binom1(n,p):
  if p<n :
    coef= ...
    for i in range( ... ):
      coef= ...
    return coef
  else :
    return ...
```

Exercice II.5 – (Boucles imbriquées) [Correction p. 624]

1. Compléter le programme Python ci-dessous qui calcule le nombre de triplets $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ solutions de
$$a^2+b^2=c^2 \quad \text{et} \quad 1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant 50.$$

Éditeur
```
Compteur = 0

for c in ... :
    for b in ... :
        for a in ... :
            if ... :
                Compteur+=1

print(Compteur)
```

2. Même question en modifiant l'exposant 2 par 3, 4, 5 .... Que remarque-t-on ?

Exercice II.6 – (Sommes doubles) [Correction p. 625]

On considère les sommes doubles suivantes :
$$\mathrm{S}_n = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{i}{2^j} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i^3}{j(j+1)}.$$

1. a. Écrire un programme qui, étant donné un entier $n \geqslant 1$, calcule et affiche S_n.

   b. Même question pour T_n.

2. Calculer à la main S_n et T_n en fonction de n.

Exercice II.7 – (Suites imbriquées) [Correction p. 625]

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0=1, b_0=2$ et les relations :
$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n+b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1}=\frac{b_n^2}{a_n+b_n}.$$

Écrire une fonction `suites` ayant en entrée un entier naturel n et qui renvoie les réels a_n, b_n.

II. Les boucles while

II.1 – Présentation

Définition 7 :

Pour répéter un bloc d'instructions tant qu'une condition est vérifiée, on utilise une boucle **while**.

La syntaxe est la suivante :

Éditeur
```
while condition :
        instructions
```

Tant que la condition est vérifiée, les instructions sont effectuées. Dès que la condition n'est plus vérifiée, les instructions sont ignorées.

Remarques :

— *Même remarque que pour les boucles* **if** *et* **for** *: attention aux deux points et à l'indentation !*

— *Attention également à la condition : elle doit se révéler fausse à un moment donné, sinon la boucle est sans fin…*

Exemple 7 :

Taper dans l'éditeur de texte le script suivant puis l'exécuter. Que calcule-t-il ?

Éditeur
```
s = 0
i = 2
while i <=100 :
    s = s + i
    i = i+2
print(s)
```

II.2 – Les boucles classiques et fondamentales

Exercice II.8 – (Rang d'une suite dépassant un seuil) [Correction p. 625]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. Définir une fonction `rang` qui, à un réel a, renvoie le rang du premier terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est supérieur ou égal à a.

Exercice II.9 [Correction p. 626]

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. En déduire un encadrement de leur limite.
2. Écrire une fonction `approx` qui, à un réel strictement positif ε, associe une approximation de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ à ε près.

Exercice II.10 [Correction p. 627]

On reprend la suite de l' exercice (??) : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1}$. On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

1. Définir une fonction `valabs`, qui prend en entrée un flottant et qui renvoie sa valeur absolue.
2. À l'aide de la fonction `valabs`, écrire un programme permettant de déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel on a :
$$|u_n - 1| \leqslant 10^{-3}.$$

Exercice II.11 – ($\star\star$) - Raisonnement par dichotomie [Correction p. 627]

On considère une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;b]$ (avec $a < b$) telle que $f(a)f(b) < 0$.

Le théorème de la bijection assure que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α sur $]a\,;b[$.

On construit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies de la manière suivante :

$a_0 = a$, $b_0 = b$ et, pour tout entier naturel n,

— Si $f(a_n)\, f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \leqslant 0$, alors $\alpha \in \left]a_n\,; \dfrac{a_n + b_n}{2}\right[$. On pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

— Si $f(a_n)\, f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$, alors $\alpha \in \left]\dfrac{a_n + b_n}{2}\,; b_n\right[$. On pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

1. Étude des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
   a. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers α.
   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$.
   Puis que $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.
2. On considère l'équation (E) : $1 - x - x^3 = 0$, où x désigne un réel.
   On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x - x^3$.
   a. Construire une fonction `f` permettant de calculer des valeurs de f.
   b. Justifier que (E) possède une unique solution α, et vérifier que α appartient à $]0\,;1[$.

c. Écrire un script permettant de trouver et d'afficher une valeur approchée de α à $0,001$ près.

CORRIGÉS

Correction de l'exercice II.1 : [ÉNONCÉ]

Méthode
Si on connaît le rang, une boucle `for` est plus simple à mettre en œuvre qu'une boucle `while`.

1.

Éditeur
```
def suite(n) :
    u = 1/2
    for k in range(1,n+1) :
        u = 2*u/(u+1)
    return u
```

2. *Il semblerait que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 1.

Correction de l'exercice II.2 : [ÉNONCÉ]

Attention
Pensez à initialiser la variable `P` !

1. a.

Éditeur
```
n = int(input('Donner n : '))
P = 1
for i in range(1,n+1) :
        P=P*(1+1/i)

print(P)
```

Il semblerait que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n+1$.

b. *Après factorisation et télescopage,* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, *on a :*

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = u_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{n}\times\frac{n}{n-1}\times\ldots\frac{3}{2}\times\frac{2}{1} = n+1.$$

2. a.

Éditeur
```
n = int(input('Donner n : '))
P = 1
for i in range(1,n+1) :
        P=P*(1-1/(i**2))

print(P)
```

Plus difficile à voir !

b. *Par télescopage toujours,* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, *on a :*

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k\times k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{\frac{k+1}{k}}{\frac{k}{k-1}}\right) = \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{2}{1}} = \frac{n+1}{2n}.$$

Correction de l'exercice II.3 : [ÉNONCÉ]

Attention
Pensez à une variable auxiliaire pour conserver les termes de la suite !

1.

```
def Fib(n):
    u = 0
    v = 1
    for k in range(2,n+1):
        w = u+v
        u = v
        v = w
    return w
```

Une version plus élégante et plus « pythonique » qui fonctionne $\forall n \in \mathbb{N}$.

```
def Fib(n):
    u,v = 0,1
    for k in range(n):
        u,v = v,u + v
    return u
```

2.

```
def Fib_ratio(n):
    u, v = 0, 1  # u_0, u_1

    for k in range(n):
        u,v = v,u + v    # u_n,u_{n+1}
    return v / u
```

On peut montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, *le nombre d'or.*

Correction de l'exercice II.4 : [Énoncé]

Méthode 1 :

1.

Attention
Pensez à initialiser la variable p *!*

Et une version récursive :

```
def facto(n):
    p=1
    for k in range(1,n+1):
        p=p*k
    return p
```

```
def facto(n):
    if n == 0 or n == 1:
        return 1
    return n * facto(n - 1)
```

2. *On sait que pour* $p, n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On en déduit la fonction ci-dessous :

```
def binom1(n,p):
    if p<n:
        return facto(n)/(facto(p)*facto(n-p))
    else :
        return 0
```

3. *Le programme est (trop) gourmand en calcul à travers la fonction* `facto`.

Méthode 2 :

1. *Il suffit de simplifier numérateur et dénominateur :*

Pour $p, n \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leqslant n$, on a :

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{(n-p)! \times (n-p+1) \times \ldots \times n}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-p+1) \times (n-p+2) \times \ldots \times (n-p+p)}{p!} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{p} n-p+i}{\prod_{i=1}^{p} i} \\ &= \prod_{i=1}^{p} \frac{n-p+i}{i}.\end{aligned}$$

Idée
Petite amélioration qui ne coûte rien :
$\frac{n-p+i}{i} = \frac{n-p}{i} + 1.$

2.

Éditeur
```
def binom1(n,p):
  if p<n :
    coef= 1
    for i in range(1,p+1):
      coef= coef*((n-p)/i+1)
    return coef
  else :
    return 0
```

Remarque : *On pourrait aussi démontrer ce résultat par récurrence à partir de la formule, dite du capitaine :*

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k}\frac{n-1}{k-1}\binom{n-2}{k-2} = \cdots = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}.$$

Formule du capitaine qui donne l'envie d'une fonction récursive :

Éditeur
```
def binom1(n,p):
    if p==0 :
        coef = 1
    else :
        coef = (n / p) * binom1(n - 1, p - 1)
    return coef
```

Correction de l'exercice II.5 : [Énoncé]

1.

Éditeur
```
Compteur = 0

for c in range(1,51) :
    for b in range(1,c+1) :
        for a in range(1,b+1) :
            if a**2+b**2==c**2 :
                Compteur+=1

print(Compteur)
```

2. *Pour tout exposant supérieur ou égal à 3, il n'existe aucun triplet d'entier (a, b, c) tel que $a^n + b^n = c^n$. C'est le grand théorème de Fermat ou théorème de Fermat-Wiles démontré par ce dernier en 1994.*

Correction de l'exercice II.6 : [Énoncé]

1. a.

```
Éditeur
n = int(input('Donner n : '))
S = 0
for i in range(1,n+1) :
    for j in range(1,n+1) :
        S = S+i/2**j
print(S)
```

b.

```
Éditeur
n = int(input('Donner n : '))
T = 0
for i in range(1,n+1) :
    for j in range(i,n+1) :
        T = T+i**3/(j*(j+1))
print(T)
```

2. Pour S_n, on a :

$$\mathrm{S}_n = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^j\right) = \frac{n(n+1)}{2} \times \left(\frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{n(n+1)}{2} \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

Pour T_n, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_n &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{i^3}{j(j+1)}\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(j+1)}\left(\sum_{i=1}^{j} i^3\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(j+1)} \times \frac{j^2(j+1)^2}{4} = \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{4} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} + \frac{n(n+1)}{8}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice II.7 : [Énoncé]

Attention
Ne pas réutiliser les valeurs de a ou b sans réfléchir !

```
Éditeur
def suites(n) :
    a = 1
    b = 2
    for k in range(n) :
        aaux = a
        baux = b
        a = aaux**2 / (aaux + baux)
        b = baux**2 / (aaux + baux)
    return a,b
```

Correction de l'exercice II.8 : [Énoncé]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 = \mathrm{P}(u_n),$$

où $\mathrm{P} : x \longmapsto x^2 - x + 1$ est un polynôme de discriminant < 0. Il est donc de signe constant, du signe de son coefficient dominant 1 .

On a donc $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite est croissante.

Par théorème de limite monotone, on a alors deux cas possibles : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$, soit elle diverge vers $+\infty$.

Supposons qu'elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. On a $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
D'où en passant à la limite, on obtient (puisque P est continue)

$$\ell = \ell^2 + 1 \iff \mathrm{P}(\ell) = 0.$$

Or ceci est impossible car P n'a pas de racine réelle.
Ainsi, on a bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Méthode
Sans connaître le rang d'arrêt, une boucle `for` est impossible

2.

Éditeur
```
def rang(a) :
    u = 1
    n = 0
    while u < a :
        u = u**2 + 1
        n = n+1
    return n
```

Correction de l'exercice II.9 : [Énoncé]

1. *Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes :*

   — *Croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0.$$

   — *Décroissance de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} \leqslant 0. \end{aligned}$$

   — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n - u_n = \left(u_n + \frac{1}{n}\right) - u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

   Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc adjacentes.
   D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ.
   De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

À retenir
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2. *On cherche le premier $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n - u_n = \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$.*

   On utilise donc une boucle `while` :

Idée
On calcule les termes de la suite dans la boucle.

Éditeur
```
def approx(eps) :
    n = 1
    u = 1
    while 1/n > eps :
        n = n+1
        u = u+1/(n**2)
    return(u)
```

Remarque

Nous (re)verrons bientôt que la fonction valeur absolue est bien-sûr déjà définie dans Python, mais pas directement disponible. Elle nécessite d'importer le module `math`.

Correction de l'exercice II.10 : [Énoncé]

1. *Voici une définition de la fonction `valabs` :*

Éditeur
```
def valabs(x) :
    if x < 0 :
        return -x
    else :
        return x
```

2. *Cela nécessite l'utilisation d'une boucle `while`. On peut procéder comme suit :*

Éditeur
```
u = 1/2
n = 0
while valabs(u-1) > 10**(-3) :
    u = (2*u) / (u+1)
    n = n+1
print(n)
```

On trouve $n = 10$.

Correction de l'exercice II.11 : [Énoncé]

1. a. *Commençons pour cela par montrer par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a :*

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad \text{et} \quad f(a_n) f(b_n) \leqslant 0.$$

Init : *Par construction, on a soit* $a_1 = a_0$ *et* $b_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$, *soit* $a_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ *et* $b_1 = b_0$.

Comme $a_0 = a < b = b_0$, *on a ainsi l'inégalité* $a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0$.

D'autre part, $b_0 - a_0 = b - a = \dfrac{b-a}{2^0}$ *et* $f(a_0) f(b_0) = f(a)f(b) \leqslant 0$ *par hypothèse.*

Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hér : *Soit* n *un entier naturel. Supposons la propriété au rang* n *vraie. Montrons la propriété au rang* $n+1$.

Par construction, on a soit $a_{n+2} = a_{n+1}$ *et* $b_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$, *soit* $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$.

Par hypothèse de récurrence, $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$.

On a donc, dans les deux cas, l'inégalité $a_{n+1} \leqslant a_{n+2} \leqslant b_{n+2} \leqslant b_{n+1}$.

De plus, par construction, on a $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$.

Par hypothèse de récurrence, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.

Donc $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$.

Enfin, comme par hypothèse de récurrence $f(a_n) f(b_n) \leqslant 0$, $f(a_n)$ *et* $f(b_n)$ *sont de signe opposé.*

Donc $f(m_{n+1}) = f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)$ *n'a pas le même signe que* $f(a_n)$ *ou* $f(b_n)$.

Par définition de a_{n+1} *et de* b_{n+1}, *on a bien* $f(a_{n+1}) f(b_{n+1}) \leqslant 0$. *Donc la propriété au rang* $n+1$ *est vraie.*

Concl : *Par le principe de récurrence, on a bien pour tout* $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad \text{et} \quad f(a_n) f(b_n) \leqslant 0.$$

On en déduit donc que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et on a :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes et, d'après le théorème des suites adjacentes, convergent vers la même limite $\ell\in\,]a\,;b[$.

Reste enfin à montrer que $\ell=\alpha$.

En passant à la limite dans l'inégalité $f(a_n)\,f(b_n)\leqslant 0$ où f est continue sur $[a\,;b]$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(f(a_n)\cdot f(b_n)\right)=\left(\lim_{n\to+\infty}f(a_n)\right)\left(\lim_{n\to+\infty}f(b_n)\right)=(f(\ell))^2\leqslant 0.$$

D'où $(f(\ell))^2\leqslant 0$, ce qui implique $f(\ell)=0$. Et comme par hypothèse f s'annule en une seule valeur $\alpha\in\,]a\,;b[$, on a donc $\ell=\alpha$.

b. *On l'a démontré à la question précédente, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$:*

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(b_n-a_n\right).$$

La suite $(b_n-a_n)_n$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$. i.e.

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad b_n-a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(b_0-a_0\right).$$

2. a. *On peut utiliser le script suivant :*

Éditeur
```
def f(x) :
    return 1-x-x**3
```

Remarque

Pour éviter des erreurs de cumul d'arrondis, il est meilleur de calculer $1-x-x^3$ que $-x^3-x+1$ sur $[0\,;1]$.

b. *On applique le théorème de la bijection.*

— *La fonction f est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}$.*

— *f étant polynomiale, elle est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et on a :*

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=-1-3x^2<0.$$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

— *De plus, on a :*

$$-1=f(1)<0=f(\alpha)<f(0)=1.$$

Par le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $[0\,;1]$.

Par stricte décroissance de f, on en déduit que $\alpha\in]0,1[$.

c. *On peut utiliser le script suivant :*

Éditeur
```
a = 0
b = 1
while b-a>10**(-3):
    m = (a+b)/2
    if f(a)*f(m) <= 0 :
        b = m
    else :
        a = m
print(a)
```

III

Python – Les listes

Plan du chapitre

I Listes et premières commandes ***630***

I.1 Création d'une liste 630

I.2 Les indices d'une liste 631

I.3 Ajouter un élément à une liste 631

I.4 D'autres commandes utiles 634

II Modes de génération des listes ***636***

II.1 En extension 636

II.2 En compréhension 636

III Procédures classiques ***637***

III.1 Parcourir une liste 637

III.2 Conserver les termes d'une suite numérique 638

III.3 Représentation graphique des termes d'une suite 642

III.4 Construire une liste avec un pas fixé 643

III.5 Construire une liste de valeurs pour une fonction 644

III.6 Tracer une fonction avec Matplotlib 646

IV Exercices ***648***

Index ***658***

*Une **liste** permet de stocker plusieurs valeurs dans une même variable.*

Les listes sont particulièrement utiles en mathématiques pour :

- *conserver les termes successifs d'une suite ;*
- *calculer plusieurs valeurs et les conserver ;*
- *préparer les valeurs nécessaires au tracé d'une fonction.*

Liste des commandes Python exigibles aux concours

— *Tableau unidimensionnel ou liste.*

— *Définitions d'une liste avec une boucle ou en compréhension.*

— *Fonction range.*

— *Commandes* `append`, `len`.

— *Recherche séquentielle dans une liste.*

— *Commandes* `in` `del` `count`.

— *Manipulations élémentaires de listes.*

— *Commandes* `+` *et* `*`.

I. Listes et premières commandes

Une ***liste*** *en* `Python` *est une structure de données ordonnée permettant d'emmagasiner une suite d'éléments (nombres, chaînes de caractères, etc.).*

— ***Création d'une liste vide :*** `L = []`

— ***Ajouter un élément à la fin :*** `L.append(valeur)`

— ***Accéder à un terme :*** `L[0]` *donne le premier élément,* `L[1]` *le deuxième, et* `L[-1]` *le dernier.*

— ***Taille d'une liste :*** `len(L)` *renvoie le nombre d'éléments.*

Une liste est donc une collection finie d'éléments pouvant être de types différents (entiers, flottants, chaînes de caractères, listes...) ; ils sont notés entre crochets et séparés par des virgules.

I.1 – Création d'une liste

On crée une liste en utilisant des crochets.

Par exemple :

Éditeur
```
1 L = [3, 7, 2, 9]
```

La variable `L` *contient alors les quatre nombres*

$$3, \quad 7, \quad 2, \quad 9.$$

On peut également créer une liste de nombres décimaux :

Éditeur
```
1 L = [1.2, 3.5, 4.8, 7.1]
```

Enfin, on peut créer une liste vide :

Éditeur
```
1 L = []
```

Idée
Une liste vide est particulièrement utile lorsque l'on souhaite la construire progressivement.

I.2 – Les indices d'une liste

Les éléments d'une liste sont numérotés à partir de ***0****.*

Ainsi, pour

```
Éditeur
1 L = [3, 7, 2, 9]
```

on a :

Élément	3	7	2	9
Indice	0	1	2	3

On accède à un élément en utilisant son indice entre crochets :

```
Éditeur
1 L[0]
```

donne `3` *tandis que*

```
Éditeur
1 L[2]
```

donne `2`*.*

Idée

Cette notation est particulièrement pratique pour les suites : lorsque les termes ont été calculés les uns après les autres, `u[-1]` désigne toujours le dernier terme calculé.

L'indice `-1` *permet d'accéder au dernier élément d'une liste.*

Par exemple :

```
Éditeur
1 L[-1]
```

donne `9`*.*

De même, `L[-2]` *désigne l'avant-dernier élément.*

Exercice III.1

On considère la liste :

```
Éditeur
1 L = [4, 8, 3, 10, 6]
```

1. Quelle est la valeur de `L[0]` ?
2. Quelle est la valeur de `L[3]` ?
3. Quelle est la valeur de `L[4]` ?

I.3 – Ajouter un élément à une liste

Pour ajouter un élément à la fin d'une liste, on utilise la méthode `append` *:*

```
Éditeur
1 L = [3, 7, 2]
2 L.append(9)
```

La liste contient alors `[3, 7, 2, 9]`*.*

On peut donc construire une liste progressivement.

Exemple 8 :

On considère le programme :

Éditeur
```
L = []
L.append(5)
L.append(8)
L.append(2)
L.append(11)
```

1. *Quelle est la valeur de `L` à la fin du programme ?*
2. *Quelle est la valeur de `L[1]` ?*
3. *Quelle est la valeur de `L[-1]` ?*

Les symboles + et ∗ permettent : soit l'addition / la multiplication de nombres, soit la concaténation / la concaténation répétée de listes.

À retenir

Les commandes `L.append(x)` et `L=L+[x]` font donc exactement la même chose.

Éditeur
```
L=[1,2,3]
M=[4,5,6]
L+M # Renvoie la liste composée des éléments de la
    # première puis ceux de la seconde
```

Console
```
[1, 2, 3, 4, 5, 6]
```

Éditeur
```
L=[1,2,3]
M=[4,5,6]
M+L
```

Console
```
[4, 5, 6, 1, 2, 3]
```

Éditeur
```
N=list(range(0,6))
N+[5,6,7]
```

Console
```
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7]
```

Remarque

La commande ∗ fonctionne de la même façon sur les chaînes de caractères (pour répéter un message par exemple).

Éditeur
```
L*3 # Renvoie la liste obtenue en concaténant 3 fois
    ↪ la liste L
```

Console

```
[1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3]
```

Exemple 9 – Conserver les termes d'une suite :

Considérons la suite définie par

$$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

On souhaite conserver dans une liste les termes

$$u_0, u_1, \dots, u_{10}.$$

On commence par placer le premier terme dans une liste :

Éditeur

```
u = [2]
```

Pour obtenir le terme suivant, on utilise le dernier terme connu :

Éditeur

```
u.append(2*u[-1] + 1)
```

On peut répéter cette opération à l'aide d'une boucle :

Éditeur

```
u = [2]
for n in range(10):
    u.append(2*u[-1] + 1)
```

ou

Éditeur

```
u = [2]
for n in range(10):
    u=u+[(2*u[-1] + 1)]
```

La liste `u` *contient alors les termes*

$$u_0, u_1, \dots, u_{10}.$$

Attention
Ne pas oublier les [] !

Idée
En utilisant la commande `sum(u)` on pourra alors obtenir, par exemple, la somme

$$\sum_{n=0}^{10} u_n.$$

renvoie la valeur de la somme des éléments de `L`.

Console

```
>>> u
[2, 5, 11, 23, 47, 95, 191, 383, 767, 1535, 3071]
>>> sum(u)
6130
```

Exercice III.1 – (Faire connaissance) [Correction p. 650]

Exécuter successivement les lignes suivantes dans la console et indiquer à la suite des # l'effet de la commande.

Éditeur
```
L=[1,17,43]
type(L)       #
L==[1,43,17] #
```

Éditeur
```
M=[1,2,"Truc", False, L]
M
```

Éditeur
```
[]      #
L[0]
L[0]=0 #
L       #
L[1]    #
L[2]    #
L[3]    #
L[-1]   #
```

Éditeur
```
type(range(0,21))     #
N=list(range(0,21))
type(N)
```

Éditeur
```
N[2:6]        #
N[0:11 :2]    #
N[::2]        #
N[::-1]       #
list("Truc") #
```

Attention
Les listes L et M sont toutes deux modifiées !

ATTENTION

Que dire des listes M et L après exécution de ces lignes ?

Éditeur
```
L=list(range(0,11))
L
M=L
M[0]=43
L
```

Il faudra donc procéder autrement si l'on souhaite copier une liste, puis modifier la copie sans modifier la liste initiale.

Pour créer une copie indépendante d'une liste L, on peut écrire `M=L[:]` par exemple.

I.4 – D'autres commandes utiles

1. *La commande `len(L)` renvoie la longueur (length en anglais) de la liste L, autrement dit son nombre d'éléments.*

Idée
Cela permet d'accéder au dernier élément de la liste par `L[len(L)-1]`.

Éditeur
```
L=list(range(0,10))
len(L)
```

Console
```
10
>>> L[len(L)-1]
9
```

2. *La commande* `in` *permet : soit de parcourir les éléments d'une liste quand elle elle placée après une instruction* `for`*, soit de tester l'appartenance d'un élément à une liste (elle renvoie alors* `True` *ou* `False` *selon l'appartenance ou non).*

Éditeur
```
L=list(range(0,10))
8 in L
```

Éditeur
```
10 in L
```

3. *La commande* `del L[i]` *supprime l'élément indexé* `i` *de la liste* `L` *et ré-indexe la liste.*

Éditeur
```
del L[4]
L
```

Console
```
[0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9]
```

4. *La commande* `L.count(x)` *renvoie le nombre d'éléments de* `L` *ayant la valeur de* `x`*.*

Éditeur
```
L=[10,12,11,10,13,10]
```

Console
```
>>> L.count(10)
3
>>> L.count(15)
0
```

5. *Si* `L` *est une liste de nombres, la commande* `sum(L)` *renvoie la valeur de la somme des éléments de* `L`*.*

Console
```
>>> sum(L)
66
```

6. *Si* `L` *est une liste de nombres, les commandes* `min(L)` *et* `max(L)` *renvoient respectivement la valeur du minimum et du maximum des éléments de* `L`*.*

Console

```
>>> min(L)
10
>>> max(L)
13
```

II. Modes de génération des listes

En mathématiques, il y a essentiellement deux façons différentes d'écrire un ensemble :

- *en extension : cela revient à décrire les éléments qu'il contient :* $\mathrm{E} = \{1; 2; 3\}$
- *en compréhension : cela revient à le définir à partir d'une condition :* $\mathrm{E} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x+5 \geqslant 1\}$

C'est sensiblement identique pour générer des listes en Python.

II.1 – En extension

Cela revient en quelque sorte à écrire chaque élément de la liste ; ou à les ajouter à l'aide d'une boucle. Deux cas de figure :

Éditeur

```
L=[0,1,4,9,16,25,36,49,64,81,100]
```

ou

Remarque

On peut aussi écrire `L=L+[k**2]`.

Éditeur

```
L=[]      # On commence par définir L,
          # qui est une liste vide

for k in range(0,11):
  L. append(k**2)
```

Console

```
>>> L [0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100]
```

II.2 – En compréhension

Deux syntaxes possibles selon ce que l'on souhaite faire :

Éditeur

```
L=[f(x) for x in TRUC]
```

où TRUC est soit une liste, soit une commande `range()`.

Exemples 10 :

Console

```
>>> L=[k**2 for k in range(0,11)]
>>> L
[0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100]
>>> M=[k for k in L] # Permet de copier les éléments de
>>>                  # la liste L dans M, sans créer de
>>>                  # dépendance entre les listes
>>> M
[0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100]
```

Mais on peut aussi rajouter une condition à `x` pour qu'il soit rajouté à `L`.

Éditeur
```
L=[f(x) for x in TRUC if x ...]
```

Exemples 11 :

Console

```
>>> [k**2 for k in range(0,11) if k!=2]
[0, 1, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100]

>>> [k**2 for k in range(0,11) if k!=2 if k!=3]
[0, 1, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100]

>>> [c*2 for c in "Test"]
['TT', 'ee', 'ss', 'tt']

>>> [i+j for i in range(0,3) for j in range(0,6)]
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 4, 5, 6, 7]

>>> [i+j for j in range(0,6) for i in range(0,3)]
[0, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 4, 5, 6, 5, 6, 7]

>>> [i+j for i in range(0,3) for j in range(0,3) if i>=j]
[0, 1, 2, 2, 3, 4]
```

III. Procédures classiques

III.1 – Parcourir une liste

Idée

Cette structure permet notamment d'effectuer un calcul sur chacun des éléments d'une liste.

On peut parcourir successivement tous les éléments d'une liste à l'aide d'une boucle `for`.

Par exemple :

Éditeur
```
u = [2, 5, 11, 23, 47]

for terme in u:
 print(terme)
```

La variable `terme` prend successivement les valeurs des différents éléments de la liste.

Console

```
2
5
11
23
47
```

III.2 – Conserver les termes d'une suite numérique

Pour calculer et stocker les termes d'une suite récurrente ou explicite (u_n), on initialise une liste contenant le terme initial, puis on utilise une boucle `for` pour ajouter les termes successifs avec `.append()`.

Exemple 12 – Suite arithmético-géométrique :

Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$.

Éditeur

```
u = 2          # Initialisation

termes = [2]   # La liste contient u_0

# Calcul des 10 termes suivants (de u_1 a u_10)
for k in range(10):
    u = 0.5 * u + 3
    termes.append(u)

print(termes)
```

Console

```
[2, 4.0, 5.0, 5.5, 5.75, 5.875, 5.9375, 5.96875, 5.984375, 5.9921875,
5.99609375]
```

Dans cet exemple, `termes[0]` correspond à u_0, `termes[1]` à u_1, et plus généralement `termes[n]` à u_n.

Exercice III.2 – (Conserver les termes d'une suite) [Correction p. 650]

On considère la suite définie par

$$u_0 = 3 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_n + 4.$$

1. Compléter le programme suivant afin de conserver les 11 premiers termes de la suite dans une liste `u`.

Méthode
Les termes de la suite s'appellent par la commande `u[n]`.

Éditeur

```
u = [3]
for n in range(10):
    ...
```

2. Quelle est la valeur de `u[5]` ?

3. Quelle est la valeur de `u[-1]` à la fin du programme ?

Exemple 13 – Conserver les termes d'une suite :

Pour une suite définie par

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

on peut conserver les termes successifs avec :

Idée
`u[-1]` est le dernier terme calculé soit u_n.

Éditeur
```
u = [u0]

for n in range(N):
 u.append(f(u[-1]))
```

Exercice III.3 – (Conserver les termes d'une suite) [Correction p. 650]

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ et la suite

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Construire une fonction `f` prenant en argument un réel `x` et renvoyant la valeur de $f(x)$.
2. Compléter le programme suivant afin de conserver les 11 premiers termes de la suite dans une liste `u`.

Idée
On se servira bien évidemment de la fonction `f`.

Éditeur
```
u = [...]
for n in range(10):
    ...
```

3. En faisant varier le nombre de termes, quelle conjecture faites-vous sur l'éventuelle convergence de cette suite ?

Exercice III.4 – (Calcul et somme des termes d'une suite) [Correction p. 651]

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

On souhaite calculer les 10 premiers termes de cette suite et les stocker dans une liste `U`.

1. Créer une liste `U` contenant initialement le terme u_0.
2. À l'aide d'une boucle `for`, calculer successivement les termes u_1, u_2, …, u_9 et les ajouter à la liste `U` avec `append`.
3. Afficher la liste `U`.
4. Utiliser la fonction `sum(U)` pour calculer la somme des 10 premiers termes de la suite.
5. Afficher cette somme.

Exercice III.5 – (La suite de Syracuse – Une suite qui joue au yoyo) [Correction p. 652]

On choisit le nombre $u_0 = 13$ et on définit la suite (u_n) par

$$u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair,} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On souhaite calculer les termes de cette suite jusqu'à obtenir le nombre 1.

1. Créer une liste `U` contenant initialement le nombre 13.
2. À l'aide d'une boucle `while`, calculer les termes successifs de la suite et les ajouter à la liste `U` avec `append`.
3. Afficher la liste `U`.
4. Utiliser `sum(U)` pour calculer la somme de tous les termes obtenus.

À retenir

Pour tester la parité de `U[i]` on utilisera la commande

```
if U[-1] % 2 == 0:
```

Exercice III.6 – (Calcul des m premiers éléments d'une suite) [Correction p. 652]

onsidérons la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 1}$.

1. Dans l'éditeur de texte, écrire un programme qui :
   - demande initialement à l'utilisateur d'entrer au clavier la valeur d'un entier m,
   - crée une liste `U` contenant initialement l'unique élément u_0,
   - met à jour la liste `U` dans une structure itérative de sorte à ce que `U` contienne les valeurs des m premiers éléments de la suite (u_n) en fin de boucle.

Éditeur

```
m = ...
U = ...
for i in range(...) :
    U.append(...)
print(U)
```

2. Calculer les 5 premiers éléments de la suite à l'aide du programme précédent.

Exercice III.7 – (ECRICOME - 2015) [Correction p. 652]

'épreuve ECRICOME - 2015 commençait par l'étude d'une suite récurrente de type $u_{n+1} = \mathrm{F}(u_n)$. La fonction F est définie comme suit :

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_{n+1} = \mathrm{F}(u_n)$.

On admet que : $\forall n \geqslant 1,\ u_n > 0$.

1. Compléter le programme Python suivant qui permet de représenter les cent premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$:

Éditeur
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

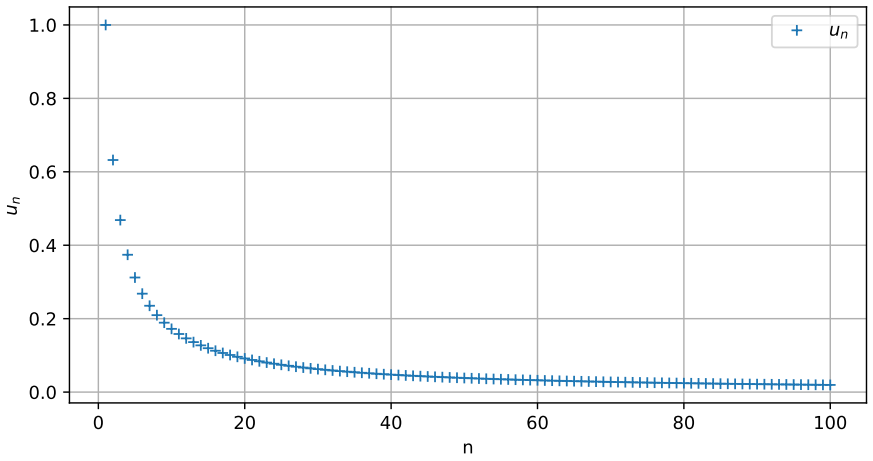
U = np.zeros(100)
U[0] = 1

for n in range(99):
    U[n+1] = ...

X = range(1, 101)

plt.plot(X, U, '+')
plt.show()
```

2. Le programme précédent complété permet d'obtenir la représentation graphique suivante :



Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la monotonie et la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$?

Exercice III.8 – (Suite récurrente double) [Correction p. 653]

On reprend la suite de Fibonacci du TP précédent.

Soit $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $\mathrm{F}_0 = 0$, $\mathrm{F}_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n.$$

1. Définir une fonction `Fib` qui, à un entier naturel $n \geqslant 2$ donné en entrée, renvoie la liste contenant les n premiers termes de la suite $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Par exemple, `Fib(7)` devra renvoyer :

```
>>>[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8]
```

```python
def Fib(n):
    F = [...]  # On initialise les deux premiers termes

    for k in range(...):
        F.append(...)  # On calcule les termes de la suite

    return F
```

2. Modifier le script précédent afin de sauver dans une liste `Phi` les valeurs de $\dfrac{\mathrm{F}_{n+1}}{\mathrm{F}_n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

III.3 – Représentation graphique des termes d'une suite

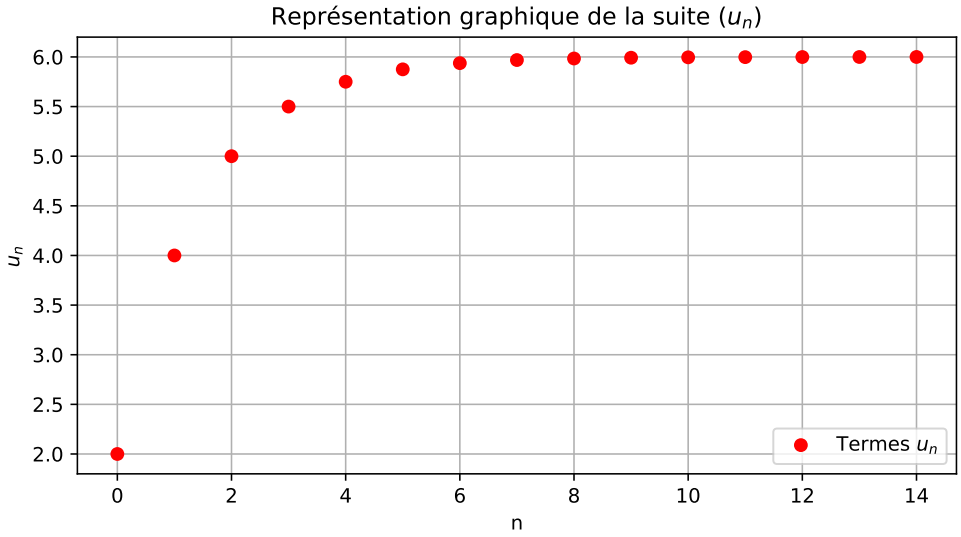
On peut associer la liste des indices $\mathrm{N} = [0, 1, 2, \dots]$ *et la liste des termes* $\mathrm{U} = [u_0, u_1, u_2, \dots]$ *pour placer les points de coordonnées* (n, u_n).

```python
import matplotlib.pyplot as plt

u = 2
U = [u]
N = [0]

for n in range(1, 15):
    u = 0.5 * u + 3
    U.append(u)   # On calcule les termes de la suite
    N.append(n)   # On crée la liste des indices

# Tracé des points (n, u_n)
plt.plot(N, U, 'ro', label="Termes u_n")  # 'ro' = points rouges
plt.title("Representation graphique de la suite u_n")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("u_n")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```



Exercice III.9 – (En route vers le nombre d'or) [Correction p. 653]

Recopier et modifier le script précédent afin qu'ils trace la représentation graphiques des 15 premiers termes de la suite $\left(\dfrac{\mathrm{F}_n}{\mathrm{F}_{n-1}}\right)_{n\geqslant 2}$ de l' exercice (??) *i.e.* les points de coordonnées

$$\left(n\,;\dfrac{\mathrm{F}_n}{\mathrm{F}_{n-1}}\right) \text{ pour } n\geqslant 2.$$

Éditeur

```
import matplotlib.pyplot as plt

...

for k in range(...):
    ...

# Tracé des points
plt.plot(..., ..., 'ro', label=r"Termes Fn/F(n-1)")

plt.title(r"Représentation graphique de la suite
 ⇝  Fn/F(n-1) pour n>=2")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel(r"Fn/F(n-1)")
plt.grid(True)
plt.legend(loc="lower right")

plt.show()
```

III.4 – Construire une liste avec un pas fixé

Pour obtenir des valeurs régulièrement espacées, on dit avec un pas p, on peut utiliser une boucle. Par exemple, pour construire la liste

$$0,\ 0{,}1,\ 0{,}2,\ \ldots,\ 1,$$

Idée
Cette technique est particulièrement utile pour préparer le tracé d'une fonction.

avec un pas de $\frac{1}{10}$*, on peut écrire :*

Éditeur
```
x = []

for n in range(11):
 x.append(n/10)
```

On obtient alors une liste contenant 11 *valeurs.*

Console
```
[0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0]
```

Exercice III.10 – (Liste de réels à pas fixé) [CORRECTION P. 654]

On souhaite construire une liste contenant les nombres

$$-2,\ -1{,}5,\ -1,\ -0{,}5,\ 0,\ 0{,}5, \dots, 2.$$

1. Combien cette liste doit-elle contenir de valeurs ?
2. Compléter le programme :

Éditeur
```
x = []

for n in range(...):
 x.append(-2 + ...)
```

3. Vérifier que `x[0]` vaut -2 et que `x[-1]` vaut 2.

III.5 – Construire une liste de valeurs pour une fonction

Les listes permettent également de conserver les valeurs nécessaires à l'étude d'une fonction. On peut construire deux listes, l'une contenant les abscisses et l'autre les ordonnées :

Éditeur
```
x = []
y = []

for n in range(N):
 x.append(...)
 y.append(...)
```

Les listes permettent ainsi de ***conserver les valeurs calculées*** *et de les réutiliser ensuite, notamment pour étudier une suite ou tracer une fonction.*

Exemple 14 – Tableau de valeurs d'une fonction :

Considérons

$$f(x) = x^2 - 2x + 1.$$

On souhaite calculer les valeurs de cette fonction pour x *compris entre* -2 *et* 2*, avec un pas de* $0,1$.

On commence par construire la liste des abscisses :

Éditeur
```
x = []

for n in range(41):
 x.append(-2 + n/10)
```

Console
```
>>> x
[-2.0, -1.9, -1.8, -1.7, -1.6, -1.5, -1.4, -1.3, -1.2, -1.1, -1.0,
-0.8999999999999999, -0.8, -0.7, -0.6000000000000001, -
0.5, -0.3999999999999999, -0.3000000000000004, -0.1
9999999999999996, -0.10000000000000009, 0.0, 0.10000000000000009,
0.2000000000000018, 0.2999999999999998, 0.3999999999999999,
0.5, 0.6000000000000001, 0.7000000000000002, 0. 7999999999999998,
0.8999999999999999, 1.0, 1.1, 1.2000000000000002,
1.2999999999999998, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7000000000000002,
1.7999999999999998, 1.9, 2.0]
```

On construit ensuite la liste des ordonnées :

Éditeur
```
y = []

for valeur in x:
 y.append(valeur**2 - 2*valeur + 1)
```

Console
```
>>> y
[9.0, 8.41, 7.84, 7.289999999999999, 6.760000000000001,
6.25, 5.76, 5.29, 4.84, 4.41, 4 .0, 3.6099999999999994, 3.24,
2.8899999999999997, 2.5600000000000005, 2.25, 1.959999999
9999997, 1.6900000000000002, 1.44, 1.2100000000000002, 1.0,
0.8099999999999998, 0.63999 99999999997, 0.4900000000000002,
0.3600000000000001, 0.25, 0.15999999999999992, 0.08999
999999999986, 0.040000000000000036, 0.010000000000000009,
0.0, 0.010000000000000009, 0. 040000000000000036,
0.08999999999999986, 0.15999999999999992, 0.25,
0.3600000000000003, 0.4900000000000002, 0.6399999999999997,
0.81, 1.0]
```

Les deux listes contiennent alors les coordonnées des points

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1), \dots, (x_{40}, y_{40}).$$

Idée
Elles pourront ensuite être utilisées pour tracer la courbe de la fonction.

Exercice III.11 – (Préparer le tracé d'une fonction) [Correction p. 654]

On considère la fonction

$$f(x) = x^3 - 2x.$$

On souhaite préparer le tracé de sa courbe sur l'intervalle $[-2, 2]$, avec un pas de $0,1$.

1. Compléter le programme permettant de construire la liste des abscisses :

```
Éditeur
x = []

for n in range(41):
 x.append(...)
```

2. Compléter le programme permettant de construire la liste des ordonnées :

```
Éditeur
y = []

for valeur in x:
 y.append(...)
```

3. Que représentent les couples

$$(x[0], y[0]), \quad (x[1], y[1]), \quad \dots, \quad (x[-1], y[-1])?$$

Exercice III.12 – (Préparer le tracé d'une fonction) [CORRECTION P. 654]

On considère la fonction

$$f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

On souhaite calculer ses images pour les valeurs

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

1. Créer la liste x contenant les cinq abscisses.
2. Créer une liste vide y.
3. Compléter le programme afin que y contienne les images des nombres de la liste x.

```
Éditeur
x = [...]
y = ...

for valeur in x:
        ...
```

4. Quelle est la valeur de y[3] ?

III.6 – Tracer une fonction avec Matplotlib

Pour représenter graphiquement une fonction f, le principe consiste à :

1. *Définir la fonction en Python.*
2. *Générer une liste d'abscisses* X.
3. *Construire la liste des ordonnées correspondantes* $\mathrm{Y} = [f(x)$ *pour* $x \in \mathrm{X}]$.
4. *Utiliser la bibliothèque* `matplotlib.pyplot`.

Exemple 15 – Tracé de $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ***sur*** $[-2, 5]$ ***:***

Éditeur

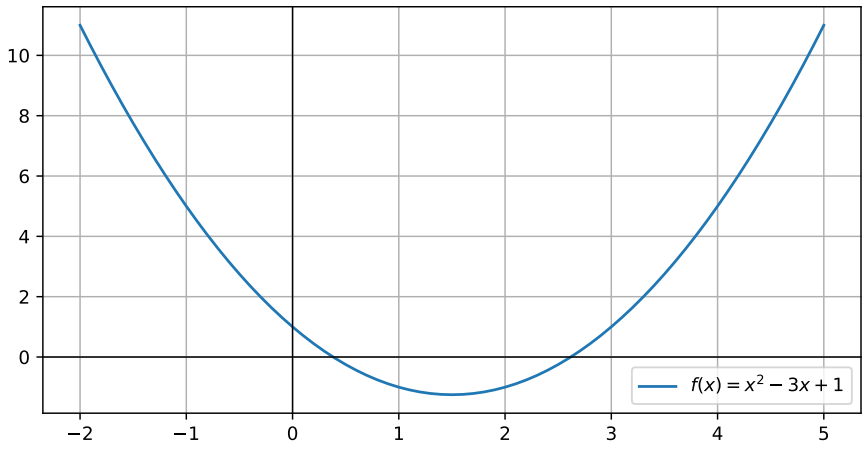
```python
import matplotlib.pyplot as plt

# 1. Définition de la fonction
def f(x):
 return x**2 - 3*x + 1

# 2. Construction de la liste des abscisses (pas de 0.1)
X = []
x_val = -2.0
while x_val <= 5.0:
 X.append(x_val)
 x_val += 0.1

# 3. Construction de la liste des ordonnées
Y = []
for x in X:
 Y.append(f(x))

# 4. Trace du graphique
plt.plot(X, Y, label="f(x) = x² - 3x + 1")
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.8)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.8)
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```



IV. Exercices

Exercice III.13 – $\left(\sum_{k=0}^{n} k^4\right)$ [Correction p. 655]

1. Créer une liste L qui contient les nombres k^4, pour $k \in [\![0; n]\!]$, après avoir demandé à l'utilisateur de saisir un valeur pour l'entier naturel n.
2. En déduire un programme permettant de calculer $\sum_{k=0}^{n} k^4$, pour une valeur de n saisie par l'utilisateur.

Exercice III.14 – (Suite) [Correction p. 655]

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{-u_n}. \end{cases}$$

Créer une fonction Python telle que l'exécution de `listeU(n)` renvoie une liste contenant les termes u_0 à u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice III.15 [Correction p. 655]

1. Définir une fonction `prod(L)` prenant en argument une liste `L` et renvoyant le produit de tous les éléments de la liste.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

   Construire une liste `L` contenant les nombres $1 + \frac{1}{k}$ pour k variant de 1 à n, l'entier n étant demandé à l'utilisateur.
3. Utiliser la fonction `prod(L)` afin de déterminer la valeur de u_{10}.

Exercice III.16 – (Liste inversée) [Correction p. 656]

Écrire une fonction qui prend en argument d'entrée une liste et qui renvoie la liste obtenue en inversant l'ordre des éléments.

Exercice III.17 – (Suppression) [Correction p. 656]

Écrire une fonction qui prend en arguments d'entrée une liste et un élément x, puis qui renvoie la nouvelle liste obtenue après suppression de toutes les occurrences de x dans cette liste.

Exercice III.18 – (Occurrences) [Correction p. 656]

1. Écrire une fonction prenant en arguments d'entrée une liste `L` et un élément `x`, puis renvoyant en sortie le nombre d'occurrences de `x` dans `L`.

   Tester avec `L=[1,3,7,3,8,3]` et `x=3`.

2. Écrire une fonction prenant en arguments d'entrée une liste `L` et un élément `x`, puis renvoyant en sortie le rang de la première occurrence de `x` dans `L` si la liste `L` contient l'élément `x`, et False sinon.

   Tester avec `L=[1,3,7,3,8,3]` et `x=3` puis `x=5`.

3. Écrire une fonction prenant en arguments d'entrée une liste `L` et un élément `x`, puis renvoyant en sortie le rang de la dernière occurrence de `x` dans `L` si la liste `L` contient l'élément `x`, et False sinon.

   Tester avec `L=[1,3,7,3,8,3]` et `x=7` puis `x=3`.

Exercice III.19 – (Maximum) [Correction p. 657]

1. Sans utiliser la commande `max`, écrire une fonction prenant en argument d'entrée une liste de réels `L` puis renvoyant en sortie le maximum de `L`.

2. Sans utiliser la commande `max`, écrire une fonction prenant en argument d'entrée une liste de réels `L` puis renvoyant en sortie le maximum de `L` ainsi que son nombre d'occurrences.

3. Sans utiliser la commande `max`, écrire une fonction prenant en argument d'entrée une liste de réels `L` puis renvoyant en sortie le maximum de `L` ainsi que le rang de sa première occurrence.

Exercice III.20 – (Ordonner une liste) [Correction p. 657]

Écrire une fonction qui prend en arguments d'entrée une liste de réels et qui renvoie la liste triée dans l'ordre croissant.

Corrigés

Correction de l'exercice III.1 : [Énoncé]

Éditeur

```
L=[1,17,43]
type(L)       # C'est une liste
L==[1,43,17] # False: l'ordre des éléments est important

M=[1,2,"Truc", False, L] # Une liste pour contenir plusieurs types d'objets

[]      # Liste vide
L[0]
L[0]=0 # Permet de changer la valeur de l'élément indexé 0
L       # Donne toute la liste
L[1]    # 17
L[2]    # 43
L[3]    # IndexError: list index out of range
L[-1]   # 43: le dernier élément de L

type(range(0,21))    # range() ne renvoie pas vraiment une liste, mais peut être converti en liste
N=list(range(0,21))  # La commande list permet de convertir range() en liste
type(N)              # C'est une liste

N[2 :6]      # Renvoie la liste composée des éléments indexés 2 à 6-1 de la liste N
N[0 :11 :2]  # Renvoie la liste composée des éléments de N indexés de 0 à 10, de 2 en 2
N[ : :2]     # Renvoie la liste composée des éléments de N indexés de 2 en 2
N[::-1]      # Renvoie la liste donc l'indexation est inversée
list("Truc") # ['T', 'r', 'u', 'c']
```

Correction de l'exercice III.2 : [Énoncé]

Éditeur

```
u = [3]

for n in range(10):
    u.append(u[n] + 4)

u[5]
u[-1]
```

Console

```
>>> u[5]
23      # c'est u_5
>>> u[-1]
43      # c'est u_10
```

Correction de l'exercice III.3 : [Énoncé]

1.

Éditeur
```
def f(x):
    return .5*(x+2/x)
```

2.
Éditeur
```
u = [1]

for n in range(10):
    u.append(f(u[-1]))

u[-1]
```

3.

Console
```
>>> def f(x):
...     return .5*(x+2/x)
...
>>> u = [1]
>>> for n in range(10):
...     u.append(f(u[-1]))
...
>>> u[-1]
1.414213562373095

>>> u = [1]
>>> for n in range(100):
...     u.append(f(u[-1]))
...
>>> u[-1]
1.414213562373095
```

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble converger (rapidement) vers $\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice III.4 : [Énoncé]

Éditeur
```
U = [1]

for n in range(9):
    U.append(2*U[-1] + 1)

print(U)
print(sum(U))
```

Console
```
[1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023]
2036
```

Correction de l'exercice III.5 : [Énoncé]

Éditeur
```
U = [13]

while U[-1] != 1:
    if U[-1] % 2 == 0:
        U.append(U[-1] // 2)  # // 2 permet de diviser
        ↪ des entiers
    else:
        U.append(3*U[-1] + 1)

print(U)
print(sum(U))
```

Console
```
[13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1]
119
```

Correction de l'exercice III.6 : [Énoncé]

1.

Éditeur
```
m = int(input("Entrer un entier m : "))
U = [3]
for i in range(m) :
    U.append(2 * U[i]/(U[i]+1))
print(U)
```

2. On obtient :

Console
```
[3, 1.5, 1.2, 1.0909090909090908, 1.0434782608695652,
1.0212765957446808]
```

Correction de l'exercice III.7 : [Énoncé]

1.

Éditeur
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

U = np.zeros(100)
U[0] = 1

for n in range(99):
    U[n+1] = 1 - np.exp(-U[n])

X = range(1, 101)

plt.plot(X, U, '+')
plt.show()
```

2. D'après la représentation graphique, la suite (u_n) semble être décroissante, de limite nulle.

Correction de l'exercice III.8 : [Énoncé]

1.

```
Éditeur
def Fib(n):
    F = [0, 1]

    for k in range(2, n):
        F.append(F[k-1] + F[k-2])

    return F
```

2.

```
Éditeur
def Fib(n):
    F = [0, 1]
    Phi=[]

    for k in range(2, n):
        F.append(F[k-1] + F[k-2])
        Phi.append(F[k]/F[k-1])

    return Phi
```

Correction de l'exercice III.9 : [Énoncé]

```
Éditeur
import matplotlib.pyplot as plt

N=[]
F = [0, 1]
Phi = []

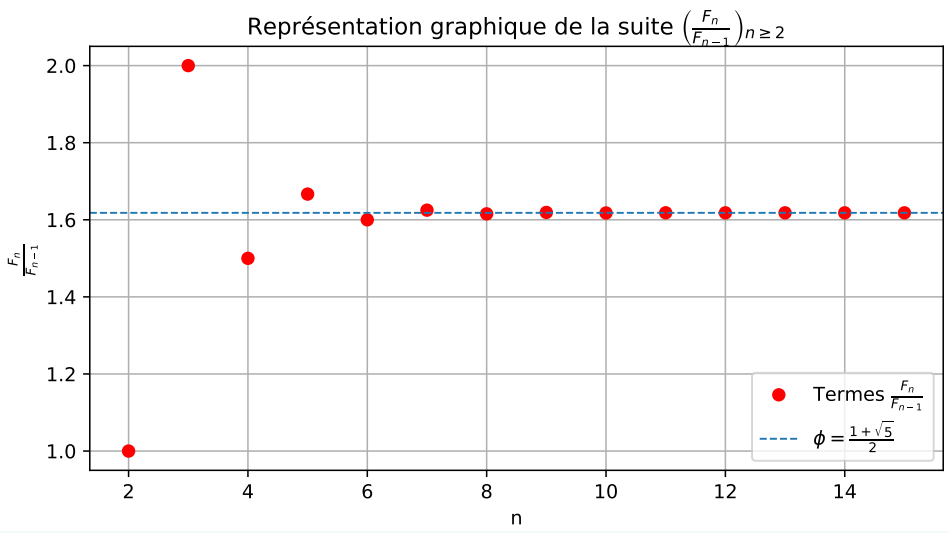
for k in range(2, 16):
    F.append(F[k-1] + F[k-2])  # Calcul des Fn
    Phi.append(F[k]/F[k-1])    # Calcul des Fn/F(n-1)

    N.append(k)                 # Calcul des indices
    ↪ associés

# Tracé des points
plt.plot(N, Phi, 'ro', label=r"Termes Fn/F(n-1)")

plt.title(r"Représentation graphique de la suite
↪ Fn/F(n-1) pour n>=2")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel(r"Fn/F(n-1)")
plt.grid(True)
plt.legend(loc="lower right")

plt.show()
```



Correction de l'exercice III.10 : [Énoncé]

```
x = []

for n in range(9):
 x.append(-2 + n/2)

x[0]
>>>-2

x[-1]
>>>2
```

Correction de l'exercice III.11 : [Énoncé]

1.

```
x = []

for n in range(41):
 x.append(-2+n*0.1)
```

2.

```
y = []

for valeur in x:
 y.append(valeur**3-2*valeur)
```

3. *Les couples* $(x[0], y[0])$, $(x[1], y[1])$, ..., $(x[-1], y[-1])$ *représentent les points de la représentation graphique de* f *pour* x *variant entre* -2 *et* 2 *avec un pas de* 1.

Correction de l'exercice III.12 : [Énoncé]

Attention

Avant toute utilisation de la commande append, on pensera à initialiser la liste par un y=[].

Éditeur
```
x = [0,1,2,3,4]
y = []

for valeur in x:
        y.append(valeur**2-3*valeur+2)
```

Console
```
>>> y[3]
2
```

C'est l'image de 3 *par* f *:*

$$f(3) = 3^2 - 3 \times 3 + 2 = 2.$$

Correction de l'exercice III.13 : [Énoncé]

Éditeur
```
n=int(input("Entrer une valeur d'un entier naturel n : "))
L=[k**4 for k in range(0,n+1)]
S=sum(L)
print(L)
print(S)
```

Correction de l'exercice III.14 : [Énoncé]

Éditeur
```
import numpy as np
def listeU(n):
 u=0
 L=[u]
 for k in range(1,n+1):
  u=np.exp(-u)
  L.append(u) # ou L=L+[u]
 return L
```

Correction de l'exercice III.15 : [Énoncé]

1. *On parcourt les éléments de la liste et on les multiplie successivement.*

Éditeur
```
def prod(L):
    p = 1
    for x in L:
        p = p*x
    return p
```

2. *On demande la valeur de* n*, puis on construit la liste des facteurs*

$$1 + \frac{1}{k}, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Éditeur
```
n = int(input("n = "))

L = []
for k in range(1,n+1):
    L.append(1+1/k)

print(L)
```

3. *Pour $n = 10$, on utilise la fonction `prod(L)`.*

```
Éditeur
n = 10

u = prod(L)
print(u)
```

On obtient

$$u_{10} = 11.$$

Correction de l'exercice III.16 : [ÉNONCÉ]

```
Éditeur
def listeinversee(L):
  M=[]
  for k in L:
    M=[k]+M # permet d'ajouter l'élément par la gauche
  return M
```

Correction de l'exercice III.17 : [ÉNONCÉ]

```
Éditeur
def suppression(L,x):
  M=[k for k in L if k!=x] # Nouvelle liste avec les
  ↪  éléments différents de x
  return M
```

Correction de l'exercice III.18 : [ÉNONCÉ]

1.

```
Éditeur
def nombreocc(L,x):
 c=0
 for e in L:
  if e==x:
c=c+1
 return c
```

2.

```
Éditeur
def premiereocc(L,x):
 for k in range(0,len(L)):
  if L[k]==x:
return k
 return False
```

3.

```
Éditeur
def derniereocc(L,x):
 rang=False
 for k in range(0,len(L)):
  if L[k]==x:
rang=k
 return rang
def derniereoccbis(L,x):
 return len(L)-1-premiereocc(L[::-1],x)
```

Correction de l'exercice III.19 : [Énoncé]

1.

```
def monmax(L):
 maxi=L[0]
 for x in L:
  if x>maxi:
maxi=x
 return maxi

def monmaxbis(L): #ou en parcourant les rangs
 maxi=L[0]
 for k in range(0,len(L)):
  if L[k]>maxi:
maxi=L[k]
 return maxi
```

2.

```
def monmax(L):
 maxi=L[0]
 c=0
 for x in L:
  if x>maxi:
maxi=x
c=1
  elif x==maxi:
c=c+1
 return maxi,c
```

3.

```
def monmax(L):
 maxi=L[0]
 rang=0
 for k in range(1,len(L)):
  if L[k]>maxi:
maxi=L[k]
rang=k
 return maxi,rang
```

Correction de l'exercice III.20 : [Énoncé]

```
def listeordonnee(L):
 for k in range(1,len(L)):
  for j in range(0,k):
if L[j]>L[k]:
 L[j],L[k]=L[k],L[j]
 return L
```

Index

Algèbre
σ-, 375

Base
canonique, 195
Bayes
Formule de, 380
Borne
supérieure, 87

Chaos, 316
Coefficient
de corrélation linéaire, 578
Combinaison
linéaire, 184
de séries convergentes, 97, 125
Combinaisons
linéaire, 188
Compatibilité
avec les opérations, 114
Comportement
asymptotique, 73
Composante
d'un vecteur, 195
Condition
nécessaire, 98
suffisante, 100
Continuité, 322
Convergence
absolue, 131
d'une série, 376
Coordonnées, 195
Corps, 179, 217
Corrélation, 578
Interprétation, 578
Couple
de variables aléatoires, 442
Covariance, 573, 575, 599
Critère
de comparaison, 128, 131, 133
de divergence, 98, 126
Croissances
comparées, 111

Dimension, 236
d'un espace vectoriel, 198, 200
finie, 196
Divergence
grossière, 126, 134
Dénombrement, 378

Écart-type, 541
Élément
neutre, 179, 217
Ensemble
d'événements, 375
stable, 318

Équation
caractéristique, 90
Équiprobabilité, 377
Espace
de dimension finie, 196
probabilisé, 376
Sous-, 184
vectoriel, 81, 126, 178, 179, 217
Espérance, 539, 564, 565, 571
Croissance de l', 569
d'un maximum, 566
d'un produit, 569, 572
d'une loi
binomiale, 408
certaine, 403
de Bernoulli, 405
de Poisson, 419
géométrique, 414
uniforme, 411
d'une somme, 568
Linéarité de l', 568
Événement, 375, 390
incompatible, 376, 416
indépendant, 380
mutuellement indépendant, 380
négligeable, 376
presque sûr, 376
Expérience
aléatoire, 375

Famille
base, 194
génératrice, 192, 199
libre, 189, 192, 194, 199, 200
liée, 189, 191, 194
Fonction
de répartition, 391, 393, 395
de répartition d'une loi
binomiale, 406
certaine, 403
de Bernoulli, 404
de Poisson, 417
géométrique, 413
uniforme, 410
dérivable, 119
monotone, 319
Formule
de Bayes, 380
de Koenig-Huygens, 574
de transfert, 539
des probabilités composées, 384
des probabilités totales, 382, 386, 453

Groupe
abélien, 179, 217

Humour, 65

Identité
de Vandermonde, 17
Inconnue
principale, 26
Indépendance
d'événements, 380
de variables aléatoires, 543
Intervalle
stable, 318
Inégalité
de Boole, 378
de Cauchy-Schwarz, 577
des accroissements finis, 339
Issue, 375

Lemme
des coalitions, 457, 544
Limite
d'une suite, 77
d'une suite convergente, 74
d'une suite divergente, 74
et inégalités strictes, 78
Opérations sur les, 80
Linéarité
de l'espérance, 539
Loi
binomiale, 402, 406, 461, 463, 577
certaine, 403
conditionnelle, 452–455
conjointe, 441, 442, 446, 450, 451
d'un maximum de variables aléatoires , 466, 468, 469
d'un minimum de variables aléatoires , 466, 467, 481, 485
d'un produit de variables aléatoires , 466
d'une somme de variables aléatoires , 460
d'une variable aléatoire, 394
discrète, 399
de Bernoulli, 390, 402, 404, 573, 577
de Poisson, 402, 416, 461, 463, 465
de probabilité, 390, 397, 400, 402
externe, 179, 217
géométrique, 402, 412, 451, 458, 465, 599
Minimum de, 467
induite, 185
interne, 179, 217
marginale, 441, 443, 444, 446, 450, 451, 453, 455
quasi-certaine, 403
sans mémoire, 415, 416
uniforme, 402
uniforme (discrète), 409

Matrice
élémentaire, 195
augmentée, 256
Méthode
Étude d'un suite arithmético-géométrique, 70
Étude d'une suite récurrente, 321
Encadrer une suite, 71
Montrer qu'une famille est une base, 199
Montrer qu'une suite est arithmétique, 68
Montrer qu'une suite est géométrique, 69
Montrer qu'une suite est monotone, 73
Montrer qu'une suite n'est pas majorée, 71
Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F}$*, 200*
Moment, 540

Nature
d'une série, 93, 122
Newton
Binôme de, 260

$\mathrm{o}(\,)$*, 108*
Opérateur
linéaire, 81

Point
fixe, 70, 322, 325
Probabilité, 375, 376
composée, 384
conditionnelle, 380
totale, 386
uniforme, 378
Produit
de convolution, 460

Raison
d'une suite arithmétique, 67
d'une suite géométrique, 67
Raisonnement
par récurrence, 67
Rang
d'une famille de vecteurs, 200
Reste
d'une série, 93, 122
Réflexivité, 113

Scalaire, 179, 217
SCE:« Système complet d'événements », 444, 464, 466
SCE:« Système complet d'événements », 445
Somme
d'une série, 93, 121
des termes d'une suite, 67
partielle, 93, 121, 128
Suite, 66
adjacente, 88, 107, 326
arithmético-géométrique, 67
arithmétique, 67, 77
bornée, 71
convergente, 74, 107, 116
croissante, 72
d'événements, 379, 385, 386
croissante, 378, 379
décroissante, 384
divergente, 74, 107
vers $\pm\infty$*, 74*

double, 449
géométrique, 67, 70, 89
majorée, minorée, 71
monotone, 72
négligeable, 108, 112
récurrente
linéaire d'ordre 2, 90
équivalente, 112, 119
Symbole
de Kronecker, 195
Symétrie, 113
Symétrique
d'un élément, 179, 217
Système
complet d'événements, 377, 386, 391, 399
dynamique, 316
presque complet d'événements, 377
Série, 107, 121
absolument convergente, 100, 131, 565
convergente, 93, 107, 121
de Riemann, 107, 129
divergente, 93, 122
grossièrement, 98, 126
double, 564
dérivée, 124
exponentielle, 97
géométrique, 94, 107, 123
harmonique, 95, 123, 126
télescopique, 96, 125, 134
à terme positif, 99, 127

Taux
d'accroissement, 119
Terme
général, 121
Terme général
d'une série, 93, 121
Théorème
d'encadrement, 85, 97, 124
de Cauchy-Schwarz, 577
de Fubini-Tonelli, 449
de la base extraite, 196
de la base incomplète, 197
de la limite monotone, 87, 99, 128, 380, 385, 392
de transfert, 564
Transfert, 564
Transitivité, 109, 114
Tribu, 375

Univers, 375

Vandermonde, 17
Variable
indépendante, 572–575
non corrélée, 578
Variable aléatoire
aléatoire
finie, 395
centrée, 541
certaine, 541
discrète, 395
indépendante, 455, 543, 544
mutuellement indépendante, 543, 544
presque sûrement constante, 541
réduite, 541
réelle, 389
Variance, 541
d'une loi
binomiale, 408
certaine, 403
de Bernoulli, 405
de Poisson, 419
géométrique, 414
uniforme, 411
d'une somme, 545, 575
Variations
d'une suite, 107
Vecteur, 179, 217
nul, 179, 217