VI

Rappels d'ECG-1
Applications linéaires

Pour comparer des structures mathématiques du même type, on considère les applications d'un ensemble dans un autre qui préservent les opérations définies sur ces ensembles :

— Lorsque l'on étudie des ensembles, on s'intéresse aux applications bijectives, qui préservent le « nombre d'éléments » de l'ensemble.

— En analyse, on étudie les fonctions continues, qui préservent l'opération de limite

— En algèbre linéaire, on s'intéresse aux applications qui préservent la structure d'espace vectoriel, c'est-à-dire, les applications d'un espace vectoriel dans un autre qui préservent l'addition et la multiplication par un scalaire : les applications linéaires.

Les *applications linéaires* sont donc des applications « naturelles » dans les espaces vectoriels, qui apparaissent dans tous les domaines des mathématiques, et pour lesquels une étude tout à fait générale et théorique est possible, ce qui permet d'appréhender un peu mieux la puissance de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes de maths très divers. Ce petit chapitre sera essentiellement constitué de vocabulaire, les quelques calculs à savoir faire se résumant la plupart du temps à des résolutions de petits systèmes (linéaires, cela va de soi !).

E	T	$\mathrm{T}(\lambda x+y)=\lambda\mathrm{T}(x)+\mathrm{T}(y)$
$\mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$	$f\longmapsto f'$	$(\lambda f+g)'=\lambda f'+g'$
$\mathbb{R}[\mathrm{X}]$	$\mathrm{P}\longmapsto \mathrm{P}'$	$(\lambda \mathrm{P}+\mathrm{Q})'=\lambda\mathrm{P}'+\mathrm{Q}'$
$\mathcal{C}^0(x_0)$	$f\longmapsto \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}(\lambda f(x)+g(x))=\lambda\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
$\mathbb{R}^2$	$(x\,;y)\longmapsto ax+by,\ a,b\in\mathbb{R}$	$a(\lambda x+x')+b(\lambda y+y')=\lambda(ax+by)+(ax'+by')$
$\mathcal{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$	$f\longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$	$\displaystyle\int_a^b(\lambda f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t=\lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
$\left\{\begin{array}{c}\text{Suites}\\ \text{convergentes}\end{array}\right\}$	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\longmapsto \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda u_n+v_n)=\lambda\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
$\mathcal{C}^1(\mathrm{I},\mathbb{R})$	$f\longmapsto f'+af,\ a\in\mathcal{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{R})$	$(\lambda f+g)'+a(\lambda f+g)=\lambda(f'+af)+(g'+ag)$
$\mathcal{C}^2(\mathrm{I},\mathbb{R})$	$f\longmapsto f''+af'+bf,\ a,b\in\mathbb{R}$	$(\lambda f+g)''+a(\lambda f+g)+b(\lambda f+g)=\lambda(f''+af'+bf)+(g''+ag'+bg)$

Figure VI.1 : Applications linéaires et espaces vectoriels

Plan du chapitre

I Applications linéaires 3

I.1 Généralités 3

I.2 Le $\mathbb{R}$-ev $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E;F)$ 7

I.3 Définition d'une application linéaire 8

I.4 Composition d'applications linéaires 10

I.5 Polynômes d'endomorphismes 11

II Noyau et image d'une application linéaire 13

II.1 Images directe et réciproque d'un sev 13

II.2 Noyau et image d'une application linéaire 13

II.3 Injectivité et surjectivité des applications linéaires 15

III Isomorphismes en dimension finie 17

III.1 Groupe linéaire 17

III.2 Isomorphismes et bases 20

III.3 Espaces isomorphes 24

IV Rang d'une application linéaire 27

IV.1 Généralités 27

IV.2 Rang d'une composée 28

IV.3 Théorème du rang 30

Index 34

I. Applications linéaires

Qu'est ce qu'un Kinder surprise sans jouet à l'intérieur ?

I.1 – Généralités

Définition 1 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+_\mathrm{E}\,;\cdot_\mathrm{E})$ et $(\mathrm{F}\,;+_\mathrm{F}\,;\cdot_\mathrm{F})$ deux $\mathbb{R}$-ev.

On dit que $f:\mathrm{E}\longmapsto\mathrm{F}$ est un *homomorphisme d'espaces vectoriels* ou, plus simplement, une *application linéaire* si :

— $\forall\ (x\,;y)\in\mathrm{E}^2,\quad f(x+_\mathrm{E}y)=f(x)+_\mathrm{F}f(y)$.

— $\forall\ (\lambda\,;x)\in\mathbb{R}\times\mathrm{E},\quad f(\lambda._\mathrm{E}x)=\lambda._\mathrm{F}f(x)$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}_\mathbb{R}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ ou, simplement, $\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

Vocabulaire :

— Si $f:\mathrm{E}\longmapsto\mathbb{R}$ est linéaire, on dit que f est une *forme* linéaire.
Leur ensemble est noté $\mathcal{L}_\mathbb{R}(\mathrm{E}\,;\mathbb{R})$ ou, simplement, E^* [1].

— Si $f:\mathrm{E}\longmapsto\mathrm{F}$ est linéaire et bijective, on dit que f est un *isomorphisme*.
Leur ensemble est noté $\mathrm{I}som_\mathbb{R}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ ou, simplement, $\mathrm{I}som(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

— Si $f:\mathrm{E}\longmapsto\mathrm{E}$ est linéaire, on dit que f est un *endomorphisme*.
Leur ensemble est noté $\mathcal{L}_\mathbb{R}(\mathrm{E})$ ou, simplement, $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

— Si $f:\mathrm{E}\longmapsto\mathrm{E}$ est linéaire et bijective, on dit que f est un *automorphisme*.
Leur ensemble est noté $\mathcal{G}l_\mathbb{R}(\mathrm{E})$ ou, simplement, $\mathcal{G}l(\mathrm{E})$.

Autrement dit, une application linéaire est une application compatible avec les deux opérations définissant la structure d'espace vectoriel.

ATTENTION

L'application $\ln:(\mathbb{R}_+^*\,;\times)\longmapsto(\mathbb{R}\,;+)$ est également appelé un *morphisme* mais non un homomorphisme car $(\mathbb{R}_+^*\,;\times)$ n'est pas un espace vectoriel.

De même, les homéomorphismes et autres difféomorphismes rencontrés en analyse n'ont, en général, rien à voir avec des morphismes. Juste un choix de nom malheureux.

[1]. On l'appelle le *dual* de E.

Exemples 1 :

— $\forall k \in \mathbb{R}$, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & kx \end{array}$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}$ dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}$.
C'est même un automorphisme si $k \neq 0$.

— Les translations $t_a : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & x+a \end{array}$ ne sont pas linéaires si $a \neq 0_\mathrm{E}$.

— Les applications $x \longmapsto x^2$, $\dfrac{1}{x}$, $\cos(x)$, $\sqrt{x}$, e^x, ... ne sont pas linéaires !!!!!

— $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+2y,-x,3y) \end{array}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

— $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-3,4+y,-x+2y) \end{array}$ n'est pas une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. On pourra notamment constater que $f\left(2x\,;2y\right) \neq 2f\left(x\,;y\right)$.

Proposition 1 :

Soient $(\mathrm{E}\,;+_\mathrm{E}\,;\cdot_\mathrm{E})$ et $(\mathrm{F}\,;+_\mathrm{F}\,;\cdot_\mathrm{F})$ deux $\mathbb{R}$-ev et $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$.

1. $f \in \mathcal{L}\left(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\right) \implies f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{F}$.
2. $f \in \mathcal{L}\left(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\right) \iff \forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2, \forall\ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2,$
$$f(\lambda._\mathrm{E}x + \mu._\mathrm{E}y) = \lambda._\mathrm{F}f(x) + \mu._\mathrm{F}f(y)$$
$$\iff \forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2, \forall\,\lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda._\mathrm{E}x + y) = \lambda._\mathrm{F}f(x) + f(y).$$
3. La restriction d'une application linéaire à un sev reste linéaire :
$$\forall\,\mathrm{A} \text{ sev de } \mathrm{E} \text{ et } f \in \mathcal{L}\left(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}\right), \quad f_{|\mathrm{A}} \in \mathcal{L}\left(\mathrm{A}\,;\mathrm{F}\right).$$

Preuve :

1. On a $f(0_\mathrm{E}) = f(0_\mathrm{E}+0_\mathrm{E}) = f(0_\mathrm{E}) + f(0_\mathrm{E})$. Donc $f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{F}$.
2. Montrons ces deux équivalences par implications tournantes.
   — Supposons que f soit linéaire.
   Alors $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2, \forall\ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad f(\lambda.x + \mu.y) = f(\lambda.x) + f(\mu.y) = \lambda.f(x) + \mu.f(y)$.
   — En particulier, $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2, \ \forall\,\lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda._\mathrm{E}x + y) = \lambda._\mathrm{F}f(x) + f(y)$.
   — Supposons que f vérifie la propriété ci-dessus.
   Alors,
   — $\forall\ (x\,;\in)\,\mathrm{E}, \quad f(0_\mathrm{E}) = f(-x+x) = -f(x) + f(x) = 0_\mathrm{F}$.
   — $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2, \quad f(x+y) = f(1.x+y) = 1.f(x) + f(y) = f(x) + f(y)$.
   — $\forall x \in \mathrm{E}, \forall\,\lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda.x) = f(\lambda.x + 0_\mathrm{E}) = \lambda.f(x) + f(0_\mathrm{E}) = \lambda.f(x) + 0_\mathrm{F} = \lambda.f(x)$.
   Par transitivité de l'implication, on a donc bien montré les deux équivalences.
3. Clair.

Pour toute application linéaire f :

$$f\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i.e_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i.f(e_i) \qquad \text{et} \qquad f(0_{\mathrm{E}})=0_{\mathrm{F}}.$$

On pourrait penser que les conditions définissant une application linéaire sont restrictives, et qu'il va donc y avoir « peu » d'applications linéaires. C'est vrai si on se restreint à des espaces donnés très simples. Par exemple, les seules applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions $f : x \longmapsto ax$, celles que vous avez justement appelées linéaires il y a quelques années ! Mais la grande variété des ensembles étant munis d'une structure d'espace vectoriel fait qu'il y a en fait énormément d'applications linéaires, très variées, que nous avons déjà, pour beaucoup d'entre elles, croisées depuis le début de l'année.

ATTENTION

Si f est linéaire alors $f(0)=0$, mais la réciproque est fausse.

En particulier il ne sert à rien de montrer que $f(0)=0$ pour justifier qu'une application est linéaire. C'est une condition nécessaire non suffisante.

Méthode 1 – Montrer qu'une application n'est pas linéaire :

Il suffit par exemple, au choix,

1. de vérifier que $f\left(0_{\mathrm{E}}\right)\neq 0_{\mathrm{F}}$,
2. d'exhiber un couple particulier de vecteurs (x,y) et un couple particulier de scalaires (λ,μ) pour lesquels $f(\lambda x+\mu y)\neq \lambda f(x)+\mu f(y)$.
3. de montrer que $f(-x)\neq -f(x)$ pour un vecteur $x\in \mathrm{E}$ particulier.

Exemples 2 :

Les applications ci-dessous ne sont pas linéaires :

$$f : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x\,;y) & \longmapsto & xy\end{array} \quad \text{et} \quad h : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x\,;y) & \longmapsto & x^2+y^2.\end{array}$$

Exemples 3 – Exemples de référence :

L'homothétie : Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. $h_\lambda : \begin{array}{ccc}\mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E}\\ x & \longmapsto & \lambda\cdot x\end{array}$ est un endomorphisme de E, appelé *homothétie de* E *de rapport* λ. En particulier, Id_{E} est linéaire.

La dérivation sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ **:** $\mathrm{D} : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}[\mathrm{X}]\\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}'\end{array}$ est un endomorphisme.

La dérivation sur $\mathcal{D}^1(\mathrm{I},\mathbb{R})$: $\delta : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}^1(\mathrm{I},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$ est linéaire.

Ce n'est pas un endomorphisme.

La dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{I},\mathbb{R})$: $\delta : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathrm{I},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathrm{I},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$ est un endomorphisme.

L'intégrale sur $[a\,;b]$: $\mathcal{I} : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([a\,;b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est une forme linéaire.

L'évaluation en a : si A est un ensemble non vide, alors pour tout $a \in \mathrm{A}$,

$$e_a : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathrm{A},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(a) \end{array}$$ est une forme linéaire.

Idem pour l'évaluation des polynômes en un $a \in \mathbb{R}$ donné

$$e_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(a). \end{array}$$

La transposition matricielle : $\tau : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}^\top \end{array}$ est linéaire.

La trace : $\mathrm{T} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{tr}\,(\mathrm{M}) \end{array}$ est une forme linéaire.

Partie réelle, imaginaire, conjugaison : sont $\mathbb{R}$-linéaires mais pas $\mathbb{C}$-linéaires.

$$\mathfrak{R} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \mathrm{Re}\,(z) \end{array} \qquad \mathfrak{I} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \mathrm{Im}\,(z) \end{array} \qquad c : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$$

L'application limite :

$$\Lambda : \left\{ \begin{array}{c} \text{suites convergentes} \\ \text{de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \end{array} \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$$ est une forme linéaire.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \lim_{n\to+\infty} u_n$$

L'application canonique associée à une matrice : si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ alors

$$f_\mathrm{A} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{AX} \end{array}$$ est linéaire.

La projection : Soient E_1, E_2, …, E_n des $\mathbb{R}$-ev.

$$p_i : \begin{array}{ccc} \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \ldots \times \mathrm{E}_n & \longrightarrow & \mathrm{E}_i \\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

est une application linéaire de $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ dans E_i appelée *projection* sur E_i (parallèlement aux E_j, $j \neq i$).

Exercice 1

1. À quelle matrice est associée φ : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+2y\,;3x+4y\,;5x+6y) \end{array}$?
2. Donner l'application canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. $\varphi(x\,;y) = \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+4y \\ 5x+6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donc φ est canoniquement associée à la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$
2. $$\begin{array}{ccc} f_A : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & AX = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y \\ 2x-z \\ x+y+z \end{pmatrix} \end{array}.$$

I.2 – Le $\mathbb{R}$-ev $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E\,;F)$

Proposition 2 :

$(\mathcal{L}(E\,;F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-ev, sev de $(\mathcal{F}(E\,;F), +, \cdot)$.

Preuve :

— L'application nulle $\tilde{0} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}$ est linéaire. Donc $\mathcal{L}(E\,;F) \neq \emptyset$.

— Supposons que $f, g \in \mathcal{L}(E\,;F)$. Montrons que $\forall\ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E\,;F)$.

Posons $\phi = \lambda f + \mu g$.

$$\begin{aligned}
\forall\,(x\,;x')\in \mathrm{E}^2,\ \forall\,(\alpha\,;\beta)\in\mathbb{R}^2,\quad \phi(\alpha x+\beta y) &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Def de } \phi}}{=} (\lambda f+\mu g)(\alpha x+\beta y)\\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \mathcal{F}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}) \text{ est un } \mathbb{R}\text{-ev}}}{=} \lambda f(\alpha x+\beta y)+\mu g(\alpha x+\beta y)\\
&\underset{\substack{\uparrow\\ f,g\in\mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})}}{=} \lambda[\alpha f(x)+\beta f(y)]+\mu[\alpha g(x)+\beta g(y)]\\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \mathcal{F}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F}) \text{ est un } \mathbb{R}\text{-ev}}}{=} \alpha(\lambda f+\mu g)(x)+\beta(\lambda f+\mu g)(y)\\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Def de } \phi}}{=} \alpha\phi(x)+\beta\phi(y)
\end{aligned}$$

Donc, $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ qui est donc stable par combinaisons linéaires donc un $\mathbb{R}$-ev.

I.3 – Définition d'une application linéaire

Exemple 4 :

Soit E un espace de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, l'application φ_i : $\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & x_i \end{array}$ est une forme linéaire appelée fonction $i^{ème}$ *coordonnée*.

En particulier, $\forall\,(i\,;j)\in[\![1\,;n]\!]\times[\![1\,;n]\!]$, $\varphi_i(e_j)=\delta_{ij}$ et $x=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)e_i$.

Théorème 3 :

On considère E et F deux $\mathbb{R}$-ev avec $\dim(\mathrm{E}) = n$.

Pour toute **base** $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E et toute famille $\mathcal{F} = (f_1, \cdots, f_n)$ de vecteurs de F, il existe une, et une seule application linéaire g de E dans F vérifiant :

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\,,\quad g(e_i) = f_i.$$

Preuve : On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : Supposons qu'une telle application linéaire $g : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ existe.

$$\text{Pour tout } x=\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot e_i\in \mathrm{E},\ \text{on a :}$$
$$g(x_1\cdot e_1+\dots+x_n\cdot e_n)=x_1\cdot g(e_1)+\dots+x_n\cdot g(e_n)=x_1\cdot f_1+\dots+x_n\cdot f_n.$$

Ainsi, on a $g = \varphi_1 \cdot f_1 + \dots + \varphi_n \cdot f_n$ où $\varphi_i : (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{E} \longmapsto x_i \in \mathbb{R}$ est la $i^{ème}$ application coordonnée.

Synthèse : Posons g : $\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \cdot f_k \end{array}$

g est-elle une application ? Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on associe par g un unique vecteur $y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \cdot f_k$.

La fonction g est donc bien une application.

g vérifie-t-elle la condition sur $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$? Par construction, $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$,

$$g(e_i) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(e_i) \cdot f_k = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ki} \cdot f_k = f_i.$$

g est-elle linéaire ? Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, x, $y \in \mathrm{E}$. On a :

$$g(\lambda x + y) = \varphi_1(\lambda x + y) \cdot f_1 + \ldots + \varphi_n(\lambda x + y) \cdot f_n$$

Par linéarité des φ_k, $k \in [\![1\,;n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} &= \lambda(\varphi_1(x) \cdot f_1 + \ldots + \varphi_n(x) \cdot f_n) + \varphi_1(y) \cdot f_1 + \ldots + \varphi_n(y) \cdot f_n \\ &= \lambda g(x) + g(y). \end{aligned}$$

Donc $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

g est-elle unique ? Considérons deux applications linéaires g_1 et g_2 de (E, F) coïncidant sur la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire vérifiant $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $g_1(e_i) = g_2(e_i) = f_i$.

Tout $x \in \mathrm{E}$ se décompose de manière unique sur la base $\mathcal{B}$: $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k$.

Comme g_1 est linéaire, on a $g_1(x) = g_1\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot g_1(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot f_k$.

Et, par le même raisonnement, $g_2(x) = g_2\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot g(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot f_k$.

On a donc prouvé que $\forall\, x \in \mathrm{E}$, $g_1(x) = g_2(x)$ *i.e.* g_1 et g_2 coïncident sur tout l'espace E : ces applications sont égales.

À retenir :

Corollaire 4 :

— Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base.

— Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

Une application :

Proposition 5 :

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ est un espace vectoriel de dimension finie et :

$$\dim\left(\mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})\right) = \dim(\mathrm{E}) \times \dim(\mathrm{F}).$$

Preuve : On note $n = \dim(\mathrm{E})$ et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Considérons l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F}) & \longrightarrow & \mathrm{F}^n \\ & f & \longmapsto & (f(e_1), \dots, f(e_n)). \end{array}$$

D'après le théorème (3) , l'application φ est bijective

On vérifie qu'elle est, de plus, linéaire sans difficulté. C'est donc un isomorphisme, et on peut conclure que :

$$\dim(\mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})) = \dim(\mathrm{F}^n) = n \times \dim(\mathrm{F}) = \dim(\mathrm{E}) \times \dim(\mathrm{F}).$$

Exemple 5 – Dimension du dual en dimension finie :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

L'ensemble $\mathrm{E}^* = \mathcal{L}(\mathrm{E};\mathbb{R})$ des formes linéaires sur E a donc même dimension que E.

Exercice 2

Considérons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ les applications coordonnées correspondantes.

Montrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^*, appelée base duale de $(e_1, \dots, e_n)$.

I.4 – Composition d'applications linéaires

Proposition 6 :

1. La composée d'applications linéaires est une application linéaire.
   En particulier, si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F};\mathrm{G})$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{G})$.
2. La composée est elle-même bilinéaire :
   En effet, si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F};\mathrm{G})$ alors :
   - $h \longmapsto g \circ h$ est linéaire de $\mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{G})$ **(linéarité à droite)**.
   - $h \longmapsto h \circ f$ est linéaire de $\mathcal{L}(\mathrm{F};\mathrm{G})$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{G})$ **(linéarité à gauche)**.

Remarque : $h \longmapsto g \circ h \in \mathcal{L}\Big(\mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F});\mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{G})\Big)$.

Preuve :

1. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$.

$$\begin{aligned} \forall\,(x;y) \in \mathrm{E}^2, \forall\,(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad (g\circ f)(\lambda x+\mu y) &= g(f(\lambda x+\mu y)) \\ &= g(\lambda f(x)+\mu f(y)) \\ &= \lambda g(f(x))+\mu g(f(y)) \\ &= \lambda(g\circ f)(x)+\mu(g\circ f)(y) \end{aligned}$$

D'où $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{G})$.

2. Easy…

I.5 – Polynômes d'endomorphismes

Dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, la composition $\circ$ est associative, distributive par rapport à $+$, admet pour élément neutre Id_E et satisfait à la loi externe : $\lambda.(f\circ g) = f\circ(\lambda.g) = (\lambda.f)\circ g$.

On dit alors que $(\mathcal{L}(\mathrm{E}),+,\circ,.)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre, non intègre et non commutative. Résultat à rapprocher de celui obtenu pour l'algèbre des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

De la même manière, pour tout $\mathrm{P} = a_0 + a_1\mathrm{X} + ... + +a_n\mathrm{X}^n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et $f\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$, on peut aussi définir le *polynôme d'endomorphisme* $\mathrm{P}(f)\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$ par :

$$\mathrm{P}(f) = a_0 f^0 + a_1 f^1 + a_2 f^2 + ... + a_n f^n \quad \text{où } f^0 = \mathrm{Id}_\mathrm{E},\ f^1 = f,\ f^2 = f\circ f,\ ...$$

Exemples 6 :

Soit $f\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

— Si $\mathrm{P} = \lambda\in\mathbb{R}$ alors $\mathrm{P}(f) = \lambda\mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

— Si $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 6 = (\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}+3)$ alors $\mathrm{P}(f) = f^2 + f - 6\mathrm{Id}_\mathrm{E} = (f-2\mathrm{Id}_\mathrm{E})\circ(f+3\mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

Exemples 7 :

— Si $u : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}\end{array}$ alors $u^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

— Si $u : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix}x+y\\x-y\end{pmatrix}\end{array}$ alors $u^2 : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}\end{array}$ et $u^2 = 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

Proposition 7 :

Soient $(f\,;g)\in\mathcal{L}(\mathrm{E})^2$ deux endomorphismes qui **commutent** *i.e.* $f\circ g = g\circ f$.

Alors, $\forall\, n\in\mathbb{N}$:

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^k g^{n-k} \quad \text{et} \quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ f^n - g^n = (f-g)\sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-1-k}.$$

ATTENTION

Les écritures $f^k g^{n-k}$ et $(f-g)\sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-1-k}$ sont respectivement à comprendre $f^k \circ g^{n-k}$ et $(f-g)\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k}\right)$.

Remarque : Les homothéties $\lambda \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ commutent avec tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Exemples 8 :

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, on a :

$$(f+\mathrm{Id}_\mathrm{E})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \quad \text{et} \quad (f-\mathrm{Id}_\mathrm{E})^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f^k.$$

$$\mathrm{Id} - f_\mathrm{E}^n = (\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)\circ\left(\mathrm{Id}_\mathrm{E} + f + f^2 + \cdots + f^{(n-1)}\right).$$

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E satisfaisant

$$u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}.$$

1. Montrer que u est un automorphisme de E.
2. Montrer que $\mathrm{E} = \ker(u - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \oplus \ker(u - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

1. Comme avec les matrices, $u \circ \underbrace{\left(-\frac{1}{2}(u - 3\mathrm{Id}_\mathrm{E})\right)}_{\in \mathcal{L}(\mathrm{E})} = \left(-\frac{1}{2}(u - 3\mathrm{Id}_\mathrm{E})\right) \circ u = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ donc u est inversible. Linéaire, c'est un automorphisme de E.
2. On sait déjà que $\ker(u - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$ et $\ker(u - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E})$ sont des sev de E.
   Soit $x \in \ker(u - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \cap \ker(u - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E})$. Par définition, $f(x) = x = 2x$, ce qui n'est possible que si $x = 0$. L'intersection des deux sev est donc réduite à $\{0\}$. La somme est directe.
   En reconnaissant $(u - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \circ (u - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$, tout $x \in \mathrm{E}$ s'écrit $x = \underbrace{2x - u(x)}_{x_1} \underbrace{- u(x) + x}_{x_2}$ avec

$$\begin{cases} (u - \mathrm{Id}_\mathrm{E})(2x - u(x)) = 0_\mathrm{E} \implies x_1 \in \ker(u - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \\ (u - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E})(x - u(x)) = 0_\mathrm{E} \implies x_2 \in \ker(u - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \end{cases}$$

   Les sev $\ker(u - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$ et $\ker(u - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E})$ sont donc aussi générateurs de E :

$$\mathrm{E} = \ker(u - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) + \ker(u - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}).$$

   Avec la somme directe, on en déduit qu'ils y sont supplémentaires :

$$\mathrm{E} = \ker(u - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \oplus \ker(u - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}).$$

II. Noyau et image d'une application linéaire

II.1 – Images directe et réciproque d'un sev

Proposition 8 :

Soient E, F, deux $\mathbb{R}$-ev, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$.

1. Pour tout sev E_1 de E, l'ensemble $f(\mathrm{E}_1)$ est un sev de F.
2. Pour tout sev F_1 de F, l'ensemble $f^{-1}(\mathrm{F}_1)$ est un sev de E.

Attention
La notation f^{-1} est à prendre comme l'image réciproque par f ici.

Preuve :

1. — E_1 est un sev donc $0_\mathrm{E} \in \mathrm{E}_1$ et $f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{F} \in f(\mathrm{E}_1)$ *i.e.* $f(\mathrm{E}_1) \neq \varnothing$.
   — Supposons que $x', y' \in f(\mathrm{E}_1)$. On peut écrire $x' = f(x)$ et $y' = f(y)$ avec $x, y \in \mathrm{E}_1$.
   Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda x' + \mu y' = \lambda f(x) + \mu f(y) = f(\lambda x + \mu y)$.
   Or, E_1 est un sev de E.
   Donc, $\lambda x + \mu y \in \mathrm{E}_1$ *i.e.* $f(\lambda x + \mu y) \in f(\mathrm{E}_1)$.
2. — F_1 est un sev donc $0_\mathrm{F} \in \mathrm{F}_1$.
   Comme $f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{F} \in \mathrm{F}_1$, on a $0_\mathrm{E} \in f^{-1}(\mathrm{F}_1)$ *i.e.* $f^{-1}(\mathrm{F}_1) \neq \varnothing$.
   — Soient $x, y \in f^{-1}(\mathrm{F}_1)$. On a donc $f(x) \in \mathrm{F}_1$ et $f(y) \in \mathrm{F}_1$.
   Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \in \mathrm{F}_1$ car F_1 est un sev de F.
   Donc $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(\mathrm{F}_1)$ qui est donc un sev de E.

II.2 – Noyau et image d'une application linéaire

La proposition (8) nous encourage à nous intéresser à deux sev bien particuliers :

Définition 2 :

Soient E, F, deux $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$.

1. On appelle *noyau* de f, et on note $\ker(f)$ l'ensemble des vecteurs de E s'envoyant sur le vecteur nul de F.
$$\ker(f) = f^{-1}(\{0_\mathrm{F}\}) = \{x \in \mathrm{E}, \quad f(x) = 0_\mathrm{F}\} \subset \mathrm{E}.$$
2. On appelle *image* de f, et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble des images par f des vecteurs de E.
$$\mathrm{Im}(f) = f(\mathrm{E}) = \{y \in \mathrm{F}, \quad \exists x \in \mathrm{E}, y = f(x)\} \subset \mathrm{F}.$$

Un peu d'histoire : *Les lettres* ker *sont les premières du mot allemand Kernel qui signifie, comme vous auriez pu le deviner, noyau.*

Contre-exemple 9 – C :

nsidérons l'endomorphisme $v : (x, y, z) \longmapsto (x + 2y + z, 2x + y - z, x + 2y + z)$.

$v\,(1\,;-1\,;1) = (0\,;0\,;0)$ *i.e.* $(1\,;-1\,;1) \in \ker v$ sans qu'il soit nul.

Les éléments du noyau d'une application linéaire ne sont pas tous nuls. C'est là le point intéressant.

À retenir :

- $\mathrm{Im}\,(u) = \{0_{\mathrm{F}}\} \iff u = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})} \iff \ker(u) = \mathrm{E}$.
- Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$. Alors,

$$v \circ u = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{G})} \iff \mathrm{Im}\,(u) \subset \ker(v)\,.$$

Exemples 10 – Images :

— Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, 2x) \end{array}$ alors $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Vect}\,((1,2))$ est représenté par la droite d'équation $y = 2x$ dans le plan.

— L'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto (x+2y+z, 2x+y-z, x+2y+z)$ est le plan d'équation $z = x$.

Exemples 11 – Noyaux :

— Si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x + y + z \end{array}$, alors $\ker(u)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$.

— Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\mathrm{D} : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}^1(\mathrm{I},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R}) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi' \end{array}$ est l'application linéaire de dérivation, alors $\ker(\varphi)$ est l'ensemble des fonctions constantes sur I.

— Si $f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(a) \end{array}$, alors $\ker(f_a) = \{(\mathrm{X}-a)\mathrm{Q} \,/\, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]\}$.

Exemple 12 – Projection :

Soit l'application linéaire définie par

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, 0). \end{array}$$

Noyau : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \in \ker p \iff p((x,y)) = (0,0)$
$\iff (x,0) = (0,0)$
$\iff x = 0.$

Donc, $\ker(p) = \{(0,y),\ y \in \mathbb{R}\}$ *i.e.* l'axe des ordonnées.

Image : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \in \operatorname{Im} p \iff \exists (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2, p((x_0,y_0)) = (x,y)$
$\iff \exists (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2, (x_0,0) = (x,y)$
$\iff y = 0.$

Donc, $\operatorname{Im}(p) = \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$ *i.e.* l'axe des abscisses.

Proposition 9 :

Soient E, F, deux $\mathbb{R}$-ev, et $f \in \mathcal{L}(E;F)$.

1. $\ker(f)$ est un sev de E.
2. $\operatorname{Im}(f)$ est un sev de F.

Preuve :

1. Par définition, $\ker(f) = f^{-1}(\{0_F\})$.
   Or, $\{0_F\}$ est un sev de F.
   Donc, $\ker(f)$, image réciproque par une application linéaire d'un sev de F, est un sev de E.
2. Par définition, $\operatorname{Im}(f) = f(E)$.
   Or, E est un sev de E.
   Donc, $\operatorname{Im}(f)$, image directe par une application linéaire d'un sev de E, est un sev de F.

II.3 – Injectivité et surjectivité des applications linéaires

Théorème 10 :

Soient E, F, deux $\mathbb{R}$-ev, et $f \in \mathcal{L}(E;F)$.

1. f est injective $\iff \ker(f) = \{0_E\}$.
2. f est surjective $\iff \operatorname{Im}(f) = F$.

Réponse : *Un Kinder injectif car son noyau est réduit à zéro.*

Preuve :

1. $(\Rightarrow)$ Supposons que f soit injective.
   Comme f est linéaire, on a $f(0_E) = 0_F$.
   D'où, $\{0_E\} \subset \ker(f)$.
   Réciproquement, si $x \in \ker(f)$, alors $f(x) = 0_F = f(0_E)$.
   Comme f est injective, $x = 0_E$, *i.e.* $\ker(f) \subset \{0_E\}$.
   Par double inclusion, on a bien $\ker(f) = \{0_E\}$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\ker(f) = \{0_E\}$ et montrons que f est injective.
Considérons $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.
Alors $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) = 0_F$ *i.e.* $x_1 - x_2 \in \ker(f)$ restreint à $\{0_E\}$.
Donc, $x_1 - x_2 = 0_E \iff x_1 = x_2$ et f est injective.

2. Cette assertion est plus simple à prouver :

$$f \text{ est surjective} \iff f(E) = F \iff \operatorname{Im}(f) = F.$$

La plus grande utilité de ce théorème est donc de ramener l'étude de l'injectivité d'une application linéaire à celle de son noyau.

Exemple 13 – Symétrie :

Soit l'application linéaire définie par

$$\begin{array}{rccc} S : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (-x,y). \end{array}$$

Noyau : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad (x,y) \in \ker S \iff p((x,y)) = (0,0).$
$\iff (-x,y) = (0,0)$
$\iff (x,y) = (0,0)$

Donc, $\ker(S) = \{(0,0)\}$ et S est injective.

Image : De plus, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) = S((-x,y))$ *i.e.* $\operatorname{Im}(S) = \mathbb{R}^2$.
L'application S est donc surjective.

Conclusion : $S \in \mathcal{G}l(\mathbb{R}^2)$.

Exemples 14 :

— Toute homothétie non nulle est surjective.

— $\begin{array}{rccc} D : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \longmapsto & P' \end{array}$ n'est pas surjective.

— $\begin{array}{rccc} T : & \mathcal{C}^0([-1\,;1]\,;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ n'est pas injective.

III. Isomorphismes en dimension finie

Rappel – D :

ns le contexte général une application $f : \mathrm{X} \longmapsto \mathrm{Y}$ est bijective si, et seulement si il existe $g : \mathrm{Y} \longmapsto \mathrm{X}$ une application telle que :

$$g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}} \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}.$$

Dans ce cas g est unique, noté f^{-1} et appelé inverse de f.

De plus, $f^{-1} : \mathrm{Y} \longmapsto \mathrm{X}$ est bijective d'inverse f.

En particulier, on se rappellera, notamment pour la démonstration de la proposition (17) , que :

— Une fonction f qui admet un inverse à gauche *i.e.* $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$, est injective.

— Une fonction f qui admet un inverse à droite *i.e.* $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}$, est surjective.

Dis autrement dans un langage de groupe, f est bijective si, et seulement si f est inversible dans $(\mathcal{F}(\mathrm{X};\mathrm{Y}), \circ)$.

III.1 – Groupe linéaire

Rappel – S :

ient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

— f est un isomorphisme si, et seulement si f est un homomorphisme (d'espaces vectoriels) bijectif. On note $\mathcal{I}som(\mathrm{E};\mathrm{F})$ leur ensemble.

— f est un automorphisme de E si, et seulement si f est un endomorphisme bijectif. Leur ensemble est noté $\mathcal{G}l(\mathrm{E})$.

Proposition 11 :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

$$f \in \mathcal{I}som(\mathrm{E};\mathrm{F}) \iff f^{-1} \in \mathcal{I}som(\mathrm{F};\mathrm{E}).$$

À retenir

Vocabulaire : Deux espaces vectoriels sont dit *isomorphes* s'il existe un isomorphisme entre eux.

Preuve : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ bijective. L'application $f^{-1} : \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{E}$ existe.

Montrons qu'elle est linéaire.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2 \in \mathrm{F}$.

Comme f est surjective, on peut poser $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ où $(x_1;x_2) \in \mathrm{E}^2$.

On a alors :

$$f^{-1}(\lambda y_1+y_2) \underset{\text{surj. de } f}{\uparrow=} f^{-1}(\lambda f(x_1)+f(x_2)) \underset{f\in\mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})}{\uparrow=} f^{-1}(f(\lambda x_1+x_2))$$
$$\underset{\text{def de }\circ}{\uparrow=} (f^{-1}\circ f)(\lambda x_1+x_2) \underset{\text{prop. de } f^{-1}}{\uparrow=} \lambda x_1+x_2 \underset{f \text{ bijective}}{\uparrow=} \lambda f^{-1}(y_1)+f^{-1}(y_2).$$

On en déduit que f^{-1} est bien linéaire.

La réciproque est évidente en considérant f^{-1} d'inverse f.

Exemples 15 :

— $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont isomorphes avec pour isomorphisme :

$$(x_1,\dots,x_n)\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

C'est cet isomorphisme qui permet d'identifier $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de façon légèrement abusive, mais transparente.

— φ : $\left\{\begin{array}{c}\text{Suites géométriques}\\ \text{de raison } q\neq 0\end{array}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un isomorphisme.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto u_0$$

Corollaire 12 :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

1. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.
2. La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme :

$$\forall\, f\in\mathcal{I}som\,(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})\,,\ g\in\mathcal{I}som\,(\mathrm{F}\,;\mathrm{G})\,,\ g\circ f\in\mathcal{I}som\,(\mathrm{E}\,;\mathrm{G}) \text{ et } (g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}.$$

Preuve :

1. C'est la proposition (11) .
2. La composée de deux applications linéaires est linéaire.
   Pour f et g bijectives, on sait depuis longtemps que $f^{-1}\circ g^{-1}=(g\circ f)^{-1}$.

Exemple 16 – Isomorphisme en analyse :

Soient $(a\,;b\,;c)\in\mathbb{R}^3$ avec $a\neq 0$.

Considérons l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $y:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :

$$ay''+by'+cy=0.$$

Alors :

1. $\mathcal{S}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$.
2. Pour tout réel t_0, l'application $\mathrm{T}_0 : \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ y & \longmapsto & (y(t_0);y'(t_0)) \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}^2$ puisqu'elle est linéaire et bijective d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Définition/Théorème 3 – Groupe linéaire :

Soit E un $\mathbb{R}$-ev.

L'ensemble des automorphismes de E muni de la composition est un groupe, appelé *groupe linéaire de* E et noté $\mathcal{G}l(\mathrm{E})$.

Preuve :

1. La composée de deux automorphismes est un automorphisme *i.e.* $\circ : \mathcal{G}l(\mathrm{E}) \times \mathcal{G}l(\mathrm{E}) \longmapsto \mathcal{G}l(\mathrm{E})$ est une loi de composition interne.
2. La composition des applications est toujours associative.
3. La loi $\circ$ admet un élément neutre : Id_E qui est bien un automorphisme.
4. Chaque automorphisme f admet un symétrique pour $\circ$ *i.e.* une réciproque f^{-1} qui est encore un automorphisme.

Exemples 17 :

— $(x;y) \longmapsto (x+y;x-y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

— Les homothéties non nulles $\lambda.\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ avec $\lambda \neq 0$ sont des automorphismes de E avec $(\lambda.\mathrm{Id}_\mathrm{E})^{-1} = \lambda^{-1}.\mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

— Les symétries $s \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *i.e.* $s^2 = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ sont des automorphismes de E tels que $s^{-1} = s$.

L'ensemble $\Big(\mathcal{L}(\mathrm{E}),+,\circ\Big)$ est ce qu'on appelle un anneau non commutatif. L'addition joue son rôle usuel et la composition joue à peu de choses près le rôle de la multiplication dans les ensembles de nombres usuels ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par exemple).

En effet, la composition admet un élément neutre qui est l'application identité et elle est distributive par rapport à l'addition, tout comme le produit dans les ensembles de nombres mais toutes les applications linéaires ne sont pas inversibles (seuls les automorphismes le sont).

En ce sens, $\mathcal{G}l(\mathrm{E})$ peut également être vu comme l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

En fait, nous verrons plus loin que la composition d'applications linéaires s'identifie effectivement à un produit, celui des matrices. Pour l'instant, nous utilisons déjà cette analogie pour justifier l'énorme abus de notation suivant : pour une application linéaire, on notera $f \circ f = f^2$ (un carré au

sens « produit » n'aurait en général aucun sens), et plus généralement f^n la composée de f n fois par elle-même.

Exercice 4

Montrer que l'application suivante est un automorphisme et expliciter son automorphisme réciproque.

$$\begin{array}{rccc} v : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+4z \\ x+y-z \\ 2y+z \end{pmatrix} \end{array}$$

Il est assez facile de montrer que $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
Soit $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$. Cherchons-lui un antécédent éventuel par v. Cela revient à résoudre le système :

$$v(x\,;y\,;z) = (a\,;b\,;c) \iff \begin{cases} x & +4z = a \\ x+ & y- & z = & b \\ & 2y+ & z = & c \end{cases} \iff \begin{cases} x & + & 4z = a \\ & y- & 5z = -a+b \\ & & 12z = 2a & -2b+c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x & & & = a & +2b-c \\ & 12y & & = -2a-8b+5c \\ & & 12z = 2a & -2b+c \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4a+8b-4c \\ -2a-b+5c \\ 2a-2b+c \end{pmatrix}.$$

L'application v est donc bien un automorphisme, de réciproque :

$$\begin{array}{rccc} v^{-1} : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4x+8y-4z \\ -2x-y+5z \\ 2x-2y+z \end{pmatrix}. \end{array}$$

III.2 – Isomorphismes et bases

Analysons maintenant le lien entre les propriétés d'une application linéaire et celles de familles particulières des espaces vectoriels concernés. Que se passe-t-il durant le transport ?

Tout d'abord un petit lemme utile en pratique :

Lemme 13 – Lemme de transport :

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On suppose E de dimension finie.

L'image de toute famille génératrice de E est génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Preuve : Comme E est de dimension finie, on peut considérer une famille génératrice finie de E que l'on note $\mathcal{F} = (e_1, \ldots e_p)$.

Soit $y \in \text{Im}\,(f)$. Il existe un antécédent $x \in \text{E}$ que l'on décompose dans la famille $\mathcal{F}$ pour obtenir :

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f\left(e_i\right) \in \text{Vect}\left(f\left(e_1\right), \ldots, f\left(e_p\right)\right) = \text{Vect}\left(f(\mathcal{F})\right).$$

Exercice 5

Déterminer une base de $\text{Im}\,(f)$ avec

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y+2z \\ x+z \\ -x-z \end{pmatrix}. \end{array}$$

Soit $\left(e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Elle est, en particulier, génératrice de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \text{Im}\,(f) &= \text{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Les deux vecteurs étant non colinéaires, ils forment une base de $\text{Im}\,(f)$ qui est donc de dimension 2.

Théorème 14 :

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\text{E}, \text{F})$. On suppose E de dimension finie.

1. f est injective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une famille libre.
2. f est surjective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une famille génératrice.
3. f est bijective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une base de F.

Preuve : Considérons $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et posons $\mathcal{F} = (f(e_1), \cdots, f(e_n))$

1. $(\Rightarrow)$: Supposons que f soit injective.

   Considérons une combinaison linéaire nulle de la famille $\mathcal{F}$: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0$.

   Par linéarité, on a $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0$.

   Par injectivité, on déduit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$.

   Par indépendance linéaire de la base $\mathcal{B}$, on en déduit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$: $\mathcal{F}$ est bien libre.

   $(\Leftarrow)$: Supposons que $\mathcal{F}$ soit libre.

   Montrons que f est injective en déterminant son noyau : soit $x \in \ker(f)$.

Décomposons x sur la base $\mathcal{B}$: $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

On a $0 = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$.

Or, la famille $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ étant libre, on en déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Par suite, $x = 0$ *i.e.* $\ker(f) = \{0\}$ et f est bien injective.

2. Cela ressemble beaucoup à la démonstration du lemme (13) :

   $(\Rightarrow)$ **:** Supposons que f soit surjective.

   Considérons $y \in \mathrm{F}$.

   Par surjectivité, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$.

   Décomposons x sur la base $\mathcal{B}$: $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

   Par linéarité, on a $y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$ *i.e.* $\mathcal{F}$ est bien génératrice.

Remarque

Il n'est nulle part besoin que F soit de dimension finie ou possède une base. Tout dépend de E.

   $(\Leftarrow)$ **:** Supposons que $\mathcal{F}$ soit génératrice.

   Montrons que f est surjective en trouvant un antécédent à $y \in \mathrm{F}$.

   Comme $\mathcal{F}$ est génératrice, on peut y décomposer y : $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$.

   En posant $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in \mathrm{E}$, par linéarité de f, on a $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = f(x)$ *i.e.* f est bien surjective.

3. Conséquence des deux points précédents.

Exemple 18 – Important :

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Comme $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{Im}(f)$ est surjective, on déduit de la propriété précédente que $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

Ainsi, on retrouve :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

Exercice 6

Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer une base de leur noyau et une base de leur image. Sont-elles injectives ? surjectives ?

1. $(x, y) \longmapsto (y - 3x, 5x + 2y, x + y)$.
2. $\mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P} - \mathrm{XP}' - \mathrm{P}(0)$ de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ dans lui-même.

Corollaire 15 :

Si deux $\mathbb{R}$-ev de dimension finie E et F sont isomorphes, alors ils ont la même dimension.

On verra plus loin (*confer* corollaire (19)) que la réciproque est vraie.

Preuve : Considérons un isomorphisme f de E sur F.

L'image d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E est une base de F.

Mais cette image est $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$.

Elle compte autant d'éléments que $\mathcal{B}$: les dimensions de E et F sont égales.

Théorème 16 :

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev de **même** dimension **finie** et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Alors :

$$(i)\ f \text{ est surjective} \iff (ii)\ f \text{ est injective} \iff (iii)\ f \text{ est bijective.}$$

Preuve : Notons n la dimension de E et F.

— On a clairement $(iii) \implies (i) \wedge (ii)$.

— $(ii) \implies (i)$: Supposons f injective. L'image de toute base de E est donc une famille libre de F de même cardinal que $\dim(\mathrm{F})$. C'en est une base et f, transformant toute base de E en une base de F, est donc bijective.

— $(iii) \implies (i)$: En supposant f surjective, le raisonnement est identique avec l'image d'une base de E qui est une famille génératrice de F de même cardinal que sa dimension.

Méthode 2 – Montrer qu'un endomorphisme est bijectif en dimension finie :

En dimension finie, pour montrer qu'un endomorphisme de E est bijectif, il suffit de montrer que f est injectif (en montrant par exemple que $\ker(f) = \{0_\mathrm{E}\}$) ou que f est surjectif (en montrant $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{F}$).

Exemple 19 – Polynômes de Lagrange :

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ des scalaires deux à deux distincts et définissons l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ & \mathrm{P} & \longmapsto & (\mathrm{P}(\alpha_0), \mathrm{P}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{P}(\alpha_n)) \end{array}.$$

Alors :

1. φ est linéaire.
2. φ est bijective car aisément injective entre deux espaces de même dimension $n+1$.
3. L'image par φ^{-1} de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ qui n'est autre que la base des polynômes de Lagrange $(\mathrm{L}_0, \ldots, \mathrm{L}_n)$ associée à $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$:

$$\forall\, i \in [\![0\,;n]\!]\,,\ \mathrm{L}_i(\alpha_j) = \delta_{i,j} \quad \text{avec} \quad \mathrm{L}_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{\mathrm{X} - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}.$$

Toute fonction définie sur un ensemble contenant les α_j coïncide en chacun de ces $(n+1)$ points avec le polynôme défini par :

$$\mathrm{P} = \sum_{i=0}^{n} f(\alpha_i)\mathrm{L}_i.$$

Exercice 7

Montrer que $\mathrm{P} \longmapsto \left(\mathrm{P}(0), \mathrm{P}'(0), \dots, \mathrm{P}^{(n)}(0)\right)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposition 17 :

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de **même** dimension finie, et soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application linéaire.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est un isomorphisme de E sur F.
2. f est inversible à gauche *i.e.* $\exists\, g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{E})$, $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.
3. f est inversible à droite *i.e.* $\exists\, h \in \mathcal{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{E})$, $f \circ h = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$.

De plus, les inverses à gauche et à droite coïncident nécessairement avec f^{-1}.

À retenir

Moralité : En dimension finie, l'existence d'un inverse à gauche ou à droite suffit à l'existence d'un inverse et, dans tous les cas, c'est le même.

Preuve : On a déjà 1. $\implies$ 2. et 1. $\implies$ 3., puisque si f est bijective, alors $g = f^{-1}$ est linéaire et convient.

Montrons que 2. $\implies$ 1..

Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{E})$, $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$. On sait alors que f est injective.

Comme E et F sont de même dimension finie, d'après le théorème (16) , f est donc bijective.

On montre de même que 3. $\implies$ 1..

Enfin, en composant $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ et $f \circ h = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$ respectivement à droite et à gauche par f^{-1}, on a bien $g = h = f^{-1}$.

☑

ATTENTION

Ce résultat n'est plus vrai si on ne suppose pas les espaces E et F de même dimension finie.

En effet, la dérivation D, par exemple, a un inverse à droite tel que $\mathrm{D} \circ \mathrm{P} = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$, mais on a $\mathrm{P} \circ \mathrm{D} \neq \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$.

En particulier, D n'est pas un isomorphisme.

III.3 – Espaces isomorphes

Précisons quelques propriétés des espaces isomorphes.

Rappel :

On dit que deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels E et F sont isomorphes, noté $\mathrm{E} \simeq \mathrm{F}$, s'il existe un isomorphisme f entre eux.

Remarque : La relation $\simeq$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des espaces vectoriels (pas forcément de dimension finie).

Une mathématicienne à son ami :
- Es-tu fidèle ?
- Oui, à isomorphisme près.

Proposition 18 – Morphisme de $\mathbb{R}^n$ dans E :

Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.

On considère l'application $\phi_{\mathcal{F}} : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathrm{E}$

$$(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \longmapsto \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$$

- $\phi_{\mathcal{F}}$ est linéaire ;
- $\mathcal{F}$ est génératrice $\iff$ $\phi_{\mathcal{F}}$ est surjective ;
- $\mathcal{F}$ est libre $\iff$ $\phi_{\mathcal{F}}$ est injective ;
- $\mathcal{F}$ est une base de E $\iff$ $\phi_{\mathcal{F}}$ est bijective ;

Preuve : La démonstration ressemble énormément à celle du théorème (14) . On l'écrit différemment :

— $\phi_{\mathcal{F}}$ est linéaire car pour tous $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p), (\mu_1, \cdots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathcal{F}}\left(\alpha(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) + (\mu_1, \cdots, \mu_p)\right) &= \phi_{\mathcal{F}}\left((\alpha\lambda_1 + \mu_1, \cdots, \alpha\lambda_p + \mu_p)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p} (\alpha\lambda_i + \mu_i) x_i \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i \\
&= \alpha\phi_{\mathcal{F}}\left((\lambda_1, \cdots, \lambda_p)\right) + \phi_{\mathcal{F}}\left((\mu_1, \cdots, \mu_p)\right)
\end{aligned}$$

— $\operatorname{Im}\phi_{\mathcal{F}} = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i, \quad (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\} = \operatorname{Vect}(\mathcal{F})$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \text{ est génératrice} &\iff \operatorname{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{E} \\
&\iff \operatorname{Im}\phi_{\mathcal{F}} = \mathrm{E} \\
&\iff \phi_{\mathcal{F}} \text{ est surjective}
\end{aligned}$$

— $\ker \phi_{\mathcal{F}} = \left\{ (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0 \right\}$

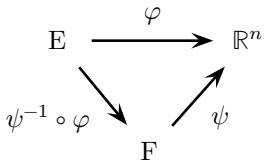
$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \text{ est libre} &\iff \left\{ (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0 \right\} = \{(0, \cdots, 0)\} \\
&\iff \ker \phi_{\mathcal{F}} = \{(0, \cdots, 0)\} \\
&\iff \phi_{\mathcal{F}} \text{ est injective}
\end{aligned}$$

Corollaire 19 :

1. Tout $\mathbb{R}$-ev de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.
2. Deux $\mathbb{R}$-ev de même dimension finie sont isomorphes.

Preuve :

1. Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E.
   Alors, $\phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^n \to \mathrm{E}$ est une application linéaire bijective, donc un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur E.
   Ces deux espaces sont donc isomorphes.
2. Deux $\mathbb{R}$-ev de même dimension finie n sont tous les deux isomorphes à $\mathbb{R}^n$.



Ils sont donc isomorphes entre eux (par composition d'isomorphismes).

En combinant le corollaire (15) et le corollaire (19) on obtient :

Théorème 20 :

Deux $\mathbb{R}$-ev de dimension finie sont isomorphes si, et seulement si ils ont même dimension.

Si on considère l'ensemble des espaces vectoriels de dimension finie, les classes d'équivalences pour la relation $\simeq$ sont donc paramétrées par $\mathbb{N}$.

Méthode 3 – Montrer qu'un espace est de dimension finie :

Pour montrer que E est de dimension finie n, on dispose de deux méthodes :

— exhiber une base de n vecteurs.

— exhiber un isomorphisme avec un espace dont on sait qu'il est de dimension n.

Exemples 20 :

— $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$.

— $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas isomorphes

— $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ sont isomorphes

— L'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $y : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $ay'' + by' + cy = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ de dimension 2, puisqu'on a vu que l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{T}_0 : & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & y & \longmapsto & (y(t_0)\,;y'(t_0)) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}^2$.

— L'ensemble $\mathcal{S}_2$ des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 *i.e.* vérifiant une relation de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de dimension 2 en considérant l'isomorphisme :

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{S}_2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0\,;u_1) \end{array}$$

IV. Rang d'une application linéaire

IV.1 – Généralités

Définition 4 :

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev avec E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

On appelle *rang de* f la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$:

$$\mathrm{rg}\,(f) = \dim(\mathrm{Im}\,(f))\,.$$

Exemples 21 :

— Le rang de l'application nulle est nul : $\mathrm{rg}\left(0_{\mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})}\right) = 0$, et c'est la seule telle application.

— Si $p_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$ alors $\mathrm{rg}\,(p_1) = 1$.

— Plus généralement, si φ est une forme linéaire non nulle, alors $\mathrm{rg}\,(\varphi) = 1$.

— Si E est de dimension finie et $\lambda \neq 0$, alors $\mathrm{rg}\,(\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \dim(\mathrm{E})$.

Théorème 21 – Inégalités sur le rang et cas d'égalité :

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$.

$$\mathrm{rg}\,(f) \leqslant \min(\dim(\mathrm{E})\,;\dim(\mathrm{F}))\,.$$

Plus précisément :

1. Si F est de dimension finie, f est de rang fini et $\text{rg}(f) \leqslant \dim(\text{F})$, avec égalité si, et seulement si f est surjective.
2. Si E est de dimension finie, f est de rang fini et $\text{rg}(f) \leqslant \dim(\text{E})$, avec égalité si, et seulement si f est injective.

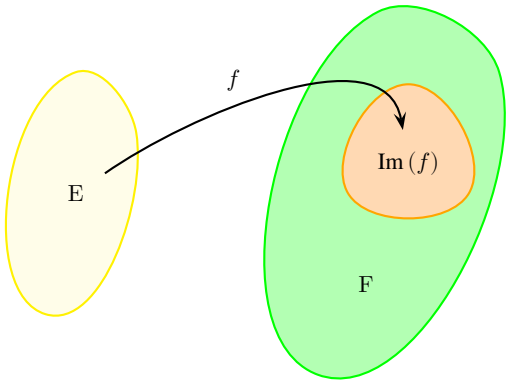


FIGURE VI.2 : En général, une application ne peut que « contracter » son ensemble de définition.

Preuve :

1. Par définition, $\text{Im}(f)$ est un sev de F donc $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) \leqslant \dim(\text{F})$.
   De plus, f est surjective si, et seulement si $\text{Im}(f) = \text{F}$ *i.e.* $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{F})$
2. Si E est de dimension finie, on peut en considérer une base $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ et on sait que
$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\left(f(e_1), \cdots, f(e_n)\right).$$
   Il est alors assez clair que
$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim\left(\text{Vect}\left(f(e_1), \cdots, f(e_n)\right)\right) \leqslant n = \dim(\text{E}).$$
   Avec égalité si, et seulement si $\left(f(e_1), \cdots, f(e_n)\right)$ est une base de $\text{Im}(f)$ *i.e.* l'image d'une base par f est une famille libre ce qui est équivalent à dire que f est injective.

Des deux assertions, on tire, bien évidemment, $\text{rg}(f) \leqslant \min(\dim(\text{E}); \dim(\text{F}))$.

IV.2 – Rang d'une composée

Avant de passer à ce qui nous importe (le théorème du rang), arrêtons nous sur quelques propriétés du rang et son comportement dans les opérations, notamment de composition.

Proposition 22 :

Soient E, F, G des $\mathbb{R}$-ev. On considère $f \in \mathcal{L}(\text{E}, \text{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\text{F}, \text{G})$.

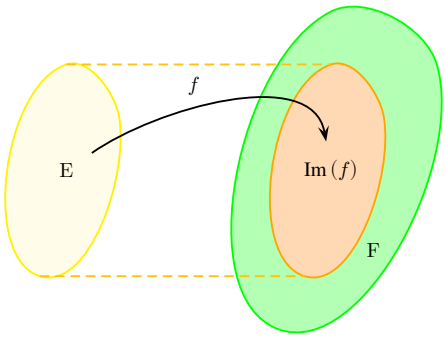


FIGURE VI.3 : f est injective si, et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(\text{E})$.

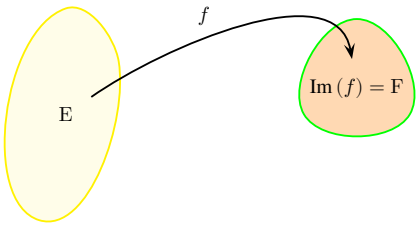


FIGURE VI.4 : f est surjective si, et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(\text{F})$.

Alors :

$$\text{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\text{rg}(f) ; \text{rg}(g)).$$

Preuve :

— Par définition, $\text{rg}(g \circ f) = \dim(\text{Im}(g \circ f))$.
Or $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ donc $\dim(\text{Im}(g \circ f)) \leqslant \dim(\text{Im}(g))$, *i.e.* $\text{rg}(g \circ f) \leqslant \text{rg}(g)$.

— Considérons $\tilde{g} : \text{Im}(f) \longmapsto \text{E}$, la restriction de g à $\text{Im}(f)$.
On a $g \circ f = \tilde{g} \circ f$ et

$$\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(\tilde{g} \circ f) \leqslant \text{rg}(\tilde{g}) \leqslant \dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f).$$

Donc, $\text{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\text{rg}(f) ; \text{rg}(g))$.

Exercice 8 – (Inégalité triangulaire)

On considère deux endomorphismes f et g d'un espace E de dimension finie.

Établir que $|\text{rg}(g) - \text{rg}(f)| \leqslant \text{rg}(g + f) \leqslant \text{rg}(g) + \text{rg}(f)$.

On a $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$, donc $\text{rg}(f + g) \leqslant \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.
En utilisant l'inégalite précédente, on obtient :

$$\text{rg}(g) = \text{rg}((f + g) + (-f)) \leqslant \text{rg}(f + g) + \text{rg}(-f) = \text{rg}(f + g) + \text{rg}(f).$$

De même, $\text{rg}(f) \leqslant \text{rg}(f + g) + \text{rg}(g)$.
D'où le résultat.

Proposition 23 :

Soient E, F, G, H des $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\text{E}, \text{F})$.

Si $u \in \mathcal{L}(\text{G} ; \text{E})$ et $v \in \mathcal{L}(\text{F} ; \text{H})$ sont des **isomorphismes** alors :

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(f \circ u) = \text{rg}(v \circ f).$$

Le rang est inchangé par isomorphisme.

Preuve :

— D'après la proposition (22) , on a déjà $\text{rg}(f \circ u) \leqslant \text{rg}(f)$.
Si u est un isomorphisme, on peut écrire $f = (f \circ u) \circ u^{-1}$.
D'où $\text{rg}(f) \leqslant \text{rg}(f \circ u)$ et l'égalité.

— D'après la proposition (22) , $\text{rg}(v \circ f) \leqslant \text{rg}(f)$.
Si v est un isomorphisme, on peut écrire $f = v^{-1} \circ (v \circ f)$.
D'où $\text{rg}(f) \leqslant \text{rg}(v \circ f)$ et l'égalité.

IV.3 – Théorème du rang

Théorème 24 :

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev avec E de dimension finie. On considère $f \in \mathcal{L}(\text{E}, \text{F})$.

Tout supplémentaire de $\ker(f)$ est isomorphe à $\text{Im}(f)$.

En particulier,

$$\dim(\ker(f)) + \text{rg}(f) = \dim(\text{E}).$$

Preuve : Considérons un supplémentaire H de $\ker(f)$ dans E de sorte que $\text{E} = \text{H} \oplus \ker(f)$.

Notons $g = f|_{\text{H}}^{\text{Im}(f)}$ ou en d'autres termes, $g : \begin{array}{ccc} \text{H} & \longrightarrow & \text{Im}(f) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ Montrons que g est un isomorphisme.

— Montrons que g est surjective :
Soit $y \in \text{Im}(f)$. Alors il existe $x \in \text{E}$ tel que $f(x) = y$.
Comme $\text{E} = \text{H} \oplus \ker(f)$, on peut écrire $x = x_1 + x_1'$ avec $x_1 \in \text{H}$ et $x_1' \in \ker(f)$.
On a alors $y = f(x) = f(x_1 + x_1') = f(x_1) + f(x_1') = f(x_1) = g(x_1)$.
Donc $y \in \text{Im}(g)$ et g est bien surjective.

— Montrons que g est injective.
Considérons un vecteur $x \in \ker(g)$ *i.e.* $0 = g(x) = f(x)$ donc $x \in \ker(f)$.
Par construction, x était élément de de H donc $x \in \text{H} \cap \ker(f)$ deux espaces qui sont en somme directe.
Donc, $x = 0$.
On en déduit que $\ker(g) = \{0\}$ et donc que g est injective.

— D'après le raisonnement précédent, l'application g est donc un isomorphisme de H sur $\text{Im}(f)$. Ces deux espaces sont donc isomorphes, et donc $\dim(\text{H}) = \dim(\text{Im}(f))$.
D'autre part, $\text{H} \oplus \ker(f) = \text{E}$ donc $\dim(\text{H}) + \dim(\ker(f)) = \dim(\text{E})$.
Finalement, on en déduit : $\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(\text{E})$.

Remarques :

1. La dimension de l'image $\text{Im}\,(f)$ est inférieure ou égale à la dimension de l'**espace de départ**. C'est la dimension du noyau qui fixe la perte entre $\dim(\text{E})$ et $\dim(\text{Im}\,(f))$.
2. La dimension de l'**espace d'arrivée** n'intervient pas.
3. Cette formule permet de trouver $\dim(\text{E})$, $\text{rg}\,(u)$ ou $\dim(\ker(u))$: suivant les 2 quantités que l'on connait, on peut en déduire la 3$^{\text{ème}}$.
4. Prenez le temps de réfléchir qu'en dimension finie et d'après le théorème du rang :
   — Il n'existe pas d'applications linéaires injectives de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
   — Il n'existe pas d'application linéaires surjectives de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Contre-exemples 22 :

$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,y,x-y) \end{array}$ est linéaire, injective, mais non surjective.

Exercice 9

1. Vérifier que les applications suivantes sont linéaires.
   a. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f((x,y)) = (4x, y-x, 2x+y)$.
   b. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g((x,y,z)) = (2x+y-z, x-y)$.
2. Déterminer une base du noyau, et une base de l'image pour chacune d'elles.

ATTENTION

Il s'agit d'une égalité de dimension, pas d'espaces ! On n'a pas, en général, $\text{E} = \text{Im}\,(f) \oplus \ker(f)$: $\ker(f)$ et $\text{Im}\,(f)$ ne sont pas nécessairement supplémentaires.

À l'aide du théorème (24) on redémontre aisément des résultats connus :

Corollaire 25 – Caractérisation des isomorphismes :

1. Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension **finie** et $f \in \mathcal{L}(\text{E})$.
$$\ker(f) = \{0\} \iff \text{Im}\,(f) = \text{E} \iff \text{rg}\, f = \dim(\text{E}) \iff f \in \mathcal{G}l(\text{E})$$
2. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev de **même** dimension **finie** et $f \in \mathcal{L}(\text{E};\text{F})$.
$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

ATTENTION

Ce corollaire n'est plus vrai en dimension infinie !

Contre-exemples 23 :

◇ $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{array}$ est un endomorphisme injectif, mais non surjectif.

◇ $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ est un endomorphisme surjectif, mais non injectif.

Exercice 10

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné).

Soit φ l'application définie par :

$$\forall P \in E,\ \varphi(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.

1. Si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $P(X+1) - P(X)$ est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
   Par suite, φ est bien une application de E dans lui-même.
   Soient alors $(P, Q) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
   $$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(\\ &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q).\end{aligned}$$
   φ est linéaire de E vers lui-même et donc un endomorphisme de E.
2. Soit $P \in E$. $P \in \ker(\varphi) \iff \forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) = P(x)$. Montrons alors que P est constant.
   Soit $Q = P - P(0)$. Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à n s'annulant en les entiers naturels 0, 1, 2, … (car $P(0) = P(1) = P(2) = \ldots$) et a ainsi une infinité de racines deux à deux distinctes. Q est donc le polynôme nul ou encore $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = P(0)$.
   Par suite, P est un polynôme constant.
   Réciproquement, les polynômes constants sont clairement dans $\ker(\varphi)$ et donc
   $$\ker(\varphi) = \{\text{polynômes constants}\} = \mathbb{R}_0[X].$$
   Pour déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$, on note tout d'abord que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.
   En effet, si $P = a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ (avec a_n quelconque, éventuellement nul) alors
   $$\begin{aligned}\varphi(P) &= a_n((X+1)^n - X^n) + \text{termes de degré inférieur on égal à } n-1 \\ &= a_n(X^n - X^n) + \text{termes de degré inférieur on égal à } n-1 \\ &= \text{termes de degré inférieur on égal à } n-1.\end{aligned}$$

Donc, $\text{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Mais d'après le théorème du rang,

$$\dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\ker(\varphi)) = (n+1)-1 = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) < +\infty,$$

et donc $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Remarque

On peut noter que le problème difficile « Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Existe-t-il $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = Q$? » a été résolu simplement par le théorème du rang.

Index

Anneau, 19
Application
    linéaire, 3
Automorphisme, 3

Base
    duale, 10
Bijection, 1

Dual
    d'un espace vectoriel, 3, 10

E^*, 3
Endomorphisme, 3
Ensemble, 1
Équation
    différentielle, 27
Espace
    isomorphe, 17, 24
    vectoriel, 3

Fonction
    continue, 1
    coordonnée, 8
Forme
    linéaire, 3

$\mathcal{G}l(E)$, 19
$\mathcal{G}l_{\mathbb{R}}(E)$, 3
Groupe, 17
    linéaire, 19

Homomorphisme, 3
Homothétie, 5, 19
Humour, 3, 25

Identité, 5
Image
    d'une application linéaire, 13
$\mathrm{Im}\,(f)$, 13
Inégalité
    triangulaire, 29
$\mathrm{I}som_{\mathbb{R}}\,(E\,;F)$, 3
Isomorphisme, 3, 29
    Caractérisation, 31

$\ker\,(f)$, 13

Lagrange, 23
Limite, 1
Linéarité
    Bi-, 10
$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$, 3
$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\,(E\,;F)$, 3

Matrice, 19
Méthode
    Application non linéaire, 5
    Montrer qu'un endomorphisme est bijectif en dimension finie, 23
    Montrer qu'un espace est de dimension finie, 26
Morphisme, 3
    Auto-, 3
    Endo-, 3
    Homo-, 3
    Iso-, 3

Newton
    Binôme de, 11
Noyau
    d'une application linéaire, 13

Polynôme
    d'endomorphismes, 11
    de Lagrange, 23
Projection, 7

Rang
    d'une application linéaire, 27

Suite
    linéaire, 27
Symétrie, 19

Théorème
    de Cauchy-Lipschitz, 19
    du rang, 30