VI

Applications linéaires en dimension finie

Plan du chapitre

I Applications linéaires 2
- I.1 Définitions et généralités 2
- I.2 Noyau et Image d'une application linéaire 4
- I.3 Injectivité, surjectivité et bijections 7
- I.4 Image d'une base et dimension finie 9

II Théorème du rang 10
- II.1 Rang d'une application linéaire 10
- II.2 Le Théorème du rang 11

III Composition et polynômes d'endomorphismes 13
- III.1 Composition d'applications linéaires 13
- III.2 Polynômes d'endomorphismes et annulateurs 13

IV Bilan et compétences attendues 14

Index 16

Dans ce chapitre, E et F désignent des espaces vectoriels réels de dimension finie.

I. Applications linéaires

I.1 – Définitions et généralités

Définition 1 – Application linéaire et endomorphisme :

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est appelée *application linéaire* si :

— $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$

— $\forall x \in \mathrm{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Vocabulaire :

— Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$, f est appelée un *endomorphisme* de E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Méthode

Pour montrer que f est un endomorphisme de E, il suffit de :

— prouver que f est linéaire.

— vérifier que,

$\forall\, x \in \mathrm{E},\ f(x) \in \mathrm{E}$.

Proposition 1 – Caractérisation pratique et image du vecteur nul :

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application.

1. f est linéaire si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

2. Si f est linéaire, alors $f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{F}$.

Attention

La réciproque est fausse : $f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{F}$ est une condition nécessaire mais non suffisante.

Exercice VI.1

Montrer que l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - 3z \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

est une application linéaire.

Attention

Ne pas confondre le vecteur X et sa coordonnée x.

Soient $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Par définition de f on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda\cdot \mathrm{X}+\mu\cdot \mathrm{Y}) &= f\left(\lambda\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix}\lambda x+\mu x'\\ \lambda y+\mu y'\\ \lambda z+\mu z'\end{pmatrix}\right)\\ &=\begin{pmatrix}2(\lambda x+\mu x')-3(\lambda z+\mu z')\\ (\lambda x+\mu x')+(\lambda y+\mu y')+(\lambda z+\mu z')\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\lambda(2x-3z)+\mu(2x'-3z')\\ \lambda(x+y+z)+\mu(x'+y'+z')\end{pmatrix}\\ &=\lambda\cdot\begin{pmatrix}2x-3z\\x+y+z\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}2x'-3z'\\x'+y'+z'\end{pmatrix}\\ &=\lambda\cdot f(x)+\mu\cdot f(y)\end{aligned}$$

Donc f est bien une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

Idée

Une application linéaire est une application compatible avec les combinaisons linéaires !

Proposition 2 – Conservation des combinaisons linéaires :

Pour toute application linéaire $f\in\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, pour tous vecteurs $x_1,\dots,x_k\in\mathrm{E}$ et tous scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f(x_i)$$

Exemples 1 – Exemples usuels d'applications linéaires :

- **L'application nulle :** $\mathbf{0}_{\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})}:x\longmapsto 0_{\mathrm{F}}$ est linéaire.
- **L'identité :** $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}:x\longmapsto x$ est un endomorphisme de E.
- **L'homothétie vectorielle :** Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, $h_\lambda:x\longmapsto\lambda x$ est un endomorphisme de E.
- **La dérivation dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$:** $\mathrm{D}:\mathrm{P}\longmapsto\mathrm{P}'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
- **L'application matricielle canonique :** Pour $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $f_{\mathrm{A}}:\mathrm{X}\longmapsto\mathrm{AX}$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice VI.2 – (Une application linéaire est déterminée par l'image d'une base)

Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que $f(1,0)=(2,1)$ et $f(0,1)=(-1,3)$.

1. Calculer $f(3,-2)$.
2. Plus généralement, soit $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$, déterminer l'expression de $f(x\,;y)$.

1. Comme $(3,-2)=3(1,0)-2(0,1)$, la linéarité donne

$$f(3,-2)=3f(1,0)-2f(0,1)=3(2,1)-2(-1,3)=(8,-3).$$

2. Plus généralement,

$$f(x,y) = x(2,1) + y(-1,3) = (2x - y,\ x + 3y).$$

Méthode 1 – Montrer qu'une application n'est pas linéaire :

Pour prouver qu'une application f n'est pas linéaire, il suffit au choix de :

1. Vérifier que $f(0_E) \neq 0_F$.
2. Exhiber un contre-exemple explicite d'échec de la linéarité (par exemple $f(\lambda x) \neq \lambda f(x)$).

Attention
Si f est linéaire alors $f(0) = 0$, mais la réciproque est fausse.
En particulier il ne sert à rien de montrer que $f(0) = 0$ pour justifier qu'une application est linéaire. C'est une condition nécessaire non suffisante.

Exercice VI.3 – (Montrer qu'une application n'est pas linéaire)

Étudier la linéarité de $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = x + y + 1$ et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $h(x,y) = (x^2, y)$.

— $g(0,0) = 1 \neq 0$, donc g n'est pas linéaire.

— $h(1,0) = (1,0)$, mais $h(2 \cdot (1,0)) = h(2,0) = (4,0) \neq 2 \cdot h(1,0) = (2,0)$.
Donc h n'est pas linéaire.

Remarque
Et pourtant, on a bien $h(0,0) = (0,0)$.

Exercice VI.4 – (Un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ (esprit Ecricome))

Montrer que l'application $\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X^2-1)P'' + 5XP' \end{array}$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Linéarité. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Par linéarité de la dérivation :

$$\Psi(\lambda P + \mu Q) = (X^2-1)(\lambda P'' + \mu Q'') + 5X(\lambda P' + \mu Q') = \lambda\Psi(P) + \mu\Psi(Q)$$

Stabilité. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.
On a $P' = 2aX + b$ et $P'' = 2a$, donc :

$$\Psi(P) = 2a(X^2-1) + 5X(2aX + b) = 12aX^2 + 5bX - 2a \in \mathbb{R}_2[X]$$

Ainsi, $\Psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

I.2 – Noyau et Image d'une application linéaire

Définition 2 – Noyau et Image :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

— Le *noyau* de f, noté $\ker(f)$, est l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est le vecteur nul 0_F :

$$\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$$

— L'*image* de f, notée $\mathrm{Im}\,(f)$, est l'ensemble des images par f des vecteurs de E :

$$\mathrm{Im}\,(f) = \{f(x) \mid x \in \mathrm{E}\} = f(\mathrm{E})$$

Proposition 3 – Structure du noyau et de l'image :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

1. $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $\mathrm{Im}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice VI.5 – (Noyau d'une application linéaire)

Soit l'application linéaire f définie par

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x - 2y + z + 2t \\ 2y - t \end{pmatrix}. \end{array}$$

Méthode
Pour déterminer le noyau d'une application linéaire, on résout un système homogène.

Déterminer le noyau de f.

Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{X} \in \ker(f) &\iff f(\mathrm{X}) = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} x - 2y + z + 2t \\ 2y - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x - 2y + z + 2t = 0 \\ 2y \quad - \quad t = 0 \end{cases} \\
&\underset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}{\iff} \begin{cases} x \quad + z + t = 0 \\ 2y \quad - t = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \quad = -z - t \\ y = \quad \frac{1}{2} t \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -z - t \\ y = \quad \frac{1}{2} t \\ z = z \\ t = \quad t \end{cases} \\
&\iff \mathrm{X} = z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc, $\ker(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$:

— engendre $\ker(f)$,

— est libre, car elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires.

C'est donc une base de $\ker(f)$.

Rappel
Deux vecteurs sont libres si leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Exemple 2 – Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel grâce au noyau :

$\mathrm{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$: c'est le noyau de la forme linéaire $\ell : (x, y, z) \longmapsto x + y - z$.

I.3 – Injectivité, surjectivité et bijections

Théorème 4 – Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

— f est *injective* $\iff \ker(f) = \{0_\mathrm{E}\}$.

— f est *surjective* $\iff \mathrm{Im}(f) = \mathrm{F}$.

Méthode 2 – Montrer qu'une application linéaire est injective :

Pour montrer qu'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est injective.

1. On considère un vecteur $x \in \mathrm{E}$: « Soit $x \in \mathrm{E}$ »
2. On résout l'équation $f(x) = 0_\mathrm{F}$ sous la forme d'un système linéaire.
3. On démontre finalement que $f(x) = 0_\mathrm{F} \iff x = 0_\mathrm{E}$ *i.e.* que les seuls vecteurs envoyés par f sur le vecteur nul sont eux-mêmes nuls.

Idée

Le théorème du rang en dimension finie nous permettra souvent de ne montrer que l'une ou l'autre de ces propriétés.

Méthode 3 – Montrer qu'une application linéaire est surjective :

Pour montrer qu'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est surjective.

Comme on a déjà $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{F}$, il ne reste qu'à montre l'inclusion réciproque :

1. On considère un vecteur $y \in \mathrm{F}$: « Soit $y \in \mathrm{F}$ »
2. On résout l'équation $f(x) = y$ sous la forme d'un système linéaire d'inconnue le vecteur x
3. On démontre finalement que l'ensemble des solutions est non vide *i.e.* qu'il existe au moins un antécédent de y par f.

Exemple 3 – Symétrie :

Soit l'application linéaire définie par

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{S} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (-x,y). \end{array}$$

Noyau : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \in \ker \mathrm{S} \iff \mathrm{S}((x,y)) = (0,0)$.

$$\iff \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff (x,y) = (0,0)$$

Donc, $\ker(\mathrm{S}) = \{(0,0)\}$ et S est injective.

Image : De plus, soit $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Il suffit de lui trouver un antécédent par S :

Comme $\mathrm{S}((-x,y)) = (x,y)$, $(-x,y)$ est un antécédent de (x,y) *i.e.* $\mathrm{Im}(\mathrm{S}) = \mathbb{R}^2$.

L'application S est donc surjective.

Conclusion : $\mathrm{S} \in \mathcal{G}l(\mathbb{R}^2)$.

Exemples 4 – Injective ? Surjective ?:

E1 • $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \longmapsto (x+y,\ x-y,\ 2y)$ est injective.
Soit $(x,y) \in \ker(f)$.
Alors $x+y=0$, $x-y=0$ et $2y=0$, d'où $y=0$ puis $x=0$.
Donc $\ker(f) = \{(0,0)\}$.

E2 • $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \longmapsto (x+y,\ y+z)$ est surjective mais pas injective.

— Surjective : pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $h(a,0,b) = (a,b)$.

— Pas injective : $h(1,-1,1) = (0,0)$ avec $(1,-1,1) \neq (0,0,0)$.

E3 • $g : \mathbb{R}[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}[\mathrm{X}],\ \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{XP}$ est injective non surjective.

— Injective : Si $\mathrm{XP} = 0$ alors $\mathrm{P} = 0$.

— Pas surjective : 1 n'a pas d'antécédent (tout polynôme XP s'annule en 0).

Définition 3 – Isomorphismes et automorphismes :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

— Si f est bijective, on dit que f est un *isomorphisme* de E sur F.

— Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ et que f est bijective, on dit que f est un *automorphisme* de E.

Proposition 5 – Réciproque d'un isomorphisme :

Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est un isomorphisme, alors son application réciproque $f^{-1} : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ est également une application linéaire (et donc un isomorphisme de F sur E).

Exercice VI.6 – (Injectivité et surjectivité dans les polynômes)

Soit $\theta : \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ définie par $\theta(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$.

1. Montrer que θ est un endomorphisme.
2. Déterminer $\ker(\theta)$. L'application θ est-elle injective ?

1. Pour $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
$$\theta(\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q}) = (\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q})(\mathrm{X}+1) - (\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q})(\mathrm{X}) = \lambda\theta(\mathrm{P}) + \mu\theta(\mathrm{Q}).$$
De plus, $\deg(\theta(\mathrm{P})) \leqslant \deg(\mathrm{P}) \leqslant 2$, donc $\theta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}])$.
2. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. $\mathrm{P} \in \ker(\theta) \iff \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) = \mathrm{P}(\mathrm{X})$.
Les seuls polynômes vérifiant cette propriété sont les polynômes constants.
Ainsi, $\ker(\theta) = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}] = \mathrm{Vect}(1) \neq \{0\}$ et θ n'est pas injective.

I.4 – Image d'une base et dimension finie

Théorème 6 – Transport de base par une application linéaire :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

1. $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
2. f est injective $\iff$ $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre dans F.
3. f est surjective $\iff$ $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ engendre F.
4. f est bijective $\iff$ $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F.

Exemple 5 – Image d'un endomorphisme :

Déterminons une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ avec

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y+2z \\ x+z \\ -x-z \end{pmatrix}. \end{array}$$

Soit $\left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Elle est, en particulier, génératrice de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,(f) &= \mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Les deux vecteurs étant non colinéaires, ils forment une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ qui est donc de dimension 2.

Exercice VI.7 – (Image d'une application linéaire)

Démonter que l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$$

est linéaire et déterminer son image. Qu'en dire ?

— Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ de sorte que, pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Par linéarité à droite du produit matriciel, on en déduit que f est une application linéaire de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Méthode
C'est une méthode efficace pour montrer que f est une application linéaire.

— En considérant la base canonique $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on sait que :

$$\text{Im}\,(f) = \text{Vect}\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Or, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Conclusion, $\text{Im}\,(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

— Comme $\dim(\text{Im}\,(f)) = 2$, alors $\text{Im}\,(f) \neq \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et f n'est pas surjective.

Remarque
Pour montrer que f n'est pas surjective, on aurait pu aussi exhiber un vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui n'a pas d'antécédent par f : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient comme une infinité d'autres.

II. Théorème du rang

II.1 – Rang d'une application linéaire

Définition 4 – Rang d'une application linéaire :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle *rang* de f, noté $\text{rg}\,(f)$, la dimension de son image :

$$\text{rg}\,(f) = \dim(\text{Im}\,(f))$$

Proposition 7 – Inégalités sur le rang :

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$:

$$\text{rg}\,(f) \leqslant \min(\dim E, \dim F)$$

De plus :

— f est injective $\iff \text{rg}\,(f) = \dim E$.

— f est surjective $\iff \text{rg}\,(f) = \dim F$.

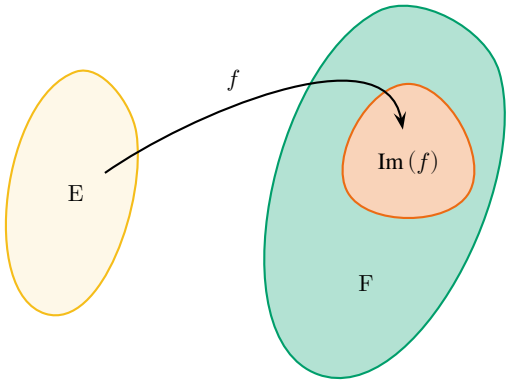


FIGURE VI.1 : En général, une application ne peut que « contracter » son ensemble de définition.

II.2 – Le Théorème du rang

Théorème 8 – Théorème du rang :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

$$\dim \mathrm{E} = \dim\left(\ker\left(f\right)\right) + \mathrm{rg}\left(f\right)$$

Corollaire 9 – Caractérisation des isomorphismes en dimension égale :

Soient E et F deux espaces vectoriels de *même dimension finie* ($\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$) et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est bijective (isomorphisme).

(ii) f est injective ($\ker\left(f\right) = \{0_{\mathrm{E}}\}$).

(iii) f est surjective ($\mathrm{rg}\left(f\right) = \dim\left(\mathrm{F}\right)$).

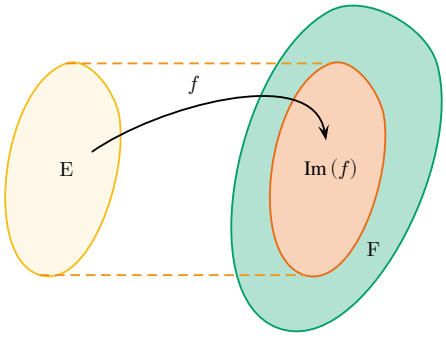


FIGURE VI.2 : f est injective si, et seulement si $\mathrm{rg}\left(f\right) = \dim\left(\mathrm{E}\right)$.

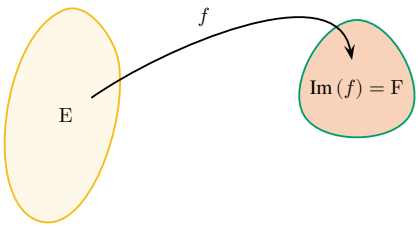


FIGURE VI.3 : f est surjective si, et seulement si $\mathrm{rg}\left(f\right) = \dim\left(\mathrm{F}\right)$.

Méthode 4 – Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$:

— **Pour déterminer** $\ker(f)$ **:** On résout le système linéaire homogène $f(x) = 0_{\mathrm{F}}$.

— **Pour déterminer** $\mathrm{Im}(f)$ **:**

1. On calcule les images de la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de E : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
2. On applique le théorème du rang pour connaître la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, puis on en extrait une famille libre de cardinal égal à $\mathrm{rg}(f)$.

Exemple 6 – Utiliser le théorème du rang pour éviter des calculs :

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z, t) \longmapsto (x - 2y + z + 2t,\ 2y - t)$ de l' exercice (VI.5) .

On a trouvé $\ker(f) = \mathrm{Vect}\big((-1, 0, 1, 0), (-2, 1, 0, 2)\big)$ de dimension 2.

Le théorème du rang donne $\mathrm{rg}(f) = 4 - 2 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, donc f est surjective, sans avoir calculé son image.

Exercice VI.8 – (Application du théorème du rang (suite de l'exemple Ψ))

Soit $\Psi : \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ définie par $\Psi(a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c) = 12a\mathrm{X}^2 + 5b\mathrm{X} - 2a$.

Déterminer $\ker(\Psi)$, $\mathrm{Im}(\Psi)$ et vérifier le théorème du rang.

— **Noyau :** $\Psi(\mathrm{P}) = 0 \iff 12a = 0,\ 5b = 0,\ -2a = 0 \iff a = b = 0$.
Ainsi, $\ker(\Psi) = \mathrm{Vect}(1)$ et $\dim(\ker(\Psi)) = 1$.

— **Rang et Image :** D'après le théorème du rang :

$$\mathrm{rg}(\Psi) = \dim \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] - \dim(\ker(\Psi)) = 3 - 1 = 2$$

Or $\mathrm{Im}(\Psi) = \mathrm{Vect}(\Psi(1), \Psi(\mathrm{X}), \Psi(\mathrm{X}^2)) = \mathrm{Vect}(-2, 5\mathrm{X}, 12\mathrm{X}^2 - 2) = \mathrm{Vect}(\mathrm{X}, 6\mathrm{X}^2 - 1)$.
Les polynômes X et $6\mathrm{X}^2 - 1$ ne sont pas colinéaires et appartiennent à $\mathrm{Im}(\Psi)$. Ils forment donc une base de $\mathrm{Im}(\Psi)$.

Exercice VI.9 – (Utilisation du théorème du rang pour prouver la surjection)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + z,\ 2x - z)$. f est-elle surjective ?

Comme on est en dimension finie, on commence par déterminer le noyau de f :

$$(x, y, z) \in \ker(f) \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2x \\ y = -3x \end{cases}$$

Donc $\ker(f) = \mathrm{Vect}\big((1, -3, 2)\big)$. Ainsi $\dim(\ker(f)) = 1$.
D'après le théorème du rang :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f)) = 3 - 1 = 2$$

Comme $\mathrm{rg}(f) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, f est surjective.

III. Composition et polynômes d'endomorphismes

III.1 – Composition d'applications linéaires

Proposition 10 – Composée d'applications linéaires :

Soient $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$.

La composée $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G *i.e.* $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{G})$.

III.2 – Polynômes d'endomorphismes et annulateurs

Définition 5 – Puissances et polynômes d'un endomorphisme :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

— On pose $f^0 = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f \circ f^n$.

— Soit $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On définit l'endomorphisme $\mathrm{P}(f) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ par :

$$\mathrm{P}(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k = a_0 \mathrm{Id}_\mathrm{E} + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_d f^d$$

Attention
f^k signifie $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$ et non $\underbrace{f \times f \times \ldots \times f}_{k \text{ fois}}$!

Définition 6 – Polynôme annulateur :

Un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est dit *annulateur* de $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ si $\mathrm{P}(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

Exemples 7 :

— Si u : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \end{array}$ alors $u^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

Le polynôme $\mathrm{X}^2 - 1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)$ est annulateur de u.

— Si u : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$ alors u^2 : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \end{array}$ et $u^2 = 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

Le polynôme $\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-2)$ est annulateur de u.

Exercice VI.10 – (Polynôme annulateur et automorphisme)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

Montrer que f est un automorphisme de E et exprimer f^{-1}.

L'égalité s'écrit $3f - f^2 = 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}$, d'où :

$$f \circ \left(\frac{1}{2}(3\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)\right) = \mathrm{Id}_\mathrm{E} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{2}(3\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)\right) \circ f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$$

Par conséquent, f est inversible (donc un automorphisme) et :

$$f^{-1} = \frac{1}{2}(3\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)$$

Exercice VI.11 – (Étude d'un endomorphisme nilpotent)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

1. À l'aide du polynôme $(1 - \mathrm{X})(1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2) = 1 - \mathrm{X}^3$, montrer que $\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f$ est un automorphisme de E et exprimer son inverse.
2. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est libre.

1. En appliquant le polynôme $1 - \mathrm{X}^3$ à l'endomorphisme f on a :

   $$(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f) \circ (\mathrm{Id}_\mathrm{E} + f + f^2) = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - f^3 = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$$

   Donc $\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f$ est inversible et $(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)^{-1} = \mathrm{Id}_\mathrm{E} + f + f^2$.
2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $ax_0 + bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$.
   — En composant par f^2, on obtient

   $$af^2(x_0) + bf^3(x_0) + cf^4(x_0) = 0_\mathrm{E} \implies af^2(x_0) = 0_\mathrm{E}.$$

   Comme $f^2(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$, on a $a = 0$.
   — L'égalité devient $bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$. En composant par f, on obtient

   $$bf^2(x_0) = 0_\mathrm{E} \implies b = 0.$$

   — Il reste $cf^2(x_0) = 0_\mathrm{E} \implies c = 0$.

   La famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est donc libre.

IV. Bilan et compétences attendues

Les compétences attendues sur le chapitre « applications linéaires » sont les suivantes :

— savoir montrer qu'une application est linéaire (ou qu'elle ne l'est pas), et qu'un endomorphisme stabilise bien l'espace de départ.

— savoir déterminer le noyau (système homogène) et l'image (image d'une famille génératrice) d'une application linéaire, et en donner une base.

— savoir caractériser l'injectivité (via $\ker(f)$) et la surjectivité (via $\mathrm{Im}\,(f)$ ou le rang).

— connaître le théorème du rang et savoir l'utiliser, notamment en dimension égale pour passer de l'injectivité à la bijectivité.

— savoir manipuler les polynômes d'endomorphismes et utiliser un polynôme annulateur pour prouver qu'un endomorphisme est un automorphisme et calculer son inverse.

Index

Application linéaire, 2
caractérisation, 2
exemples, 3
non linéaire, 4
Automorphisme, 8

Base
image d'une base, 3, 9

Combinaison linéaire, 3
Composition d'applications linéaires, 13

Dérivation, 3

Endomorphisme, 2
de $\mathbb{R}_2[X]$, 4
nilpotent, 14
puissances, 13

Forme linéaire, 6

Groupe linéaire, 7

Homothétie vectorielle, 3

Image, 4
base de l'image, 9
méthode, 12
sous-espace vectoriel, 5
Injectivité, 7
exemples, 8
méthode, 7
Isomorphisme, 8
en dimension égale, 11
réciproque, 8

Noyau, 4
calcul, 5
méthode, 12
sous-espace vectoriel, 5

Polynôme
annulateur, 13
et automorphisme, 13
exemples, 13
d'endomorphisme, 13

Rang, 10
inégalités, 10

Sous-espace vectoriel, 6
Surjectivité, 7
exemples, 8
méthode, 7
Symétrie, 7

Théorème
du rang, 7, 11
application, 12