VI

Applications linéaires en dimension finie

Plan du chapitre

I Applications linéaires 1
I.1 Définitions et généralités 1
I.2 Noyau et Image d'une application linéaire 4
I.3 Injectivité, surjectivité et bijections 6
I.4 Image d'une base et dimension finie 8
II Théorème du rang 9
II.1 Rang d'une application linéaire 9
II.2 Le Théorème du rang 10
III Composition et polynômes d'endomorphismes 12
III.1 Composition d'applications linéaires 12
III.2 Polynômes d'endomorphismes et annulateurs 12
IV Bilan et compétences attendues 13

Dans ce chapitre, E et F désignent des espaces vectoriels réels de dimension finie.

I. Applications linéaires

I.1 – Définitions et généralités

Définition 1 – Application linéaire et endomorphisme :

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est appelée *application linéaire* si :

— $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$

— $\forall x \in \mathrm{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Vocabulaire :

— Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$, f est appelée un *endomorphisme* de E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Méthode

Pour montrer que f est un endomorphisme de E, il suffit de :

— prouver que f est linéaire.

— vérifier que,

$\forall\, x \in \mathrm{E},\ f(x) \in \mathrm{E}.$

Proposition 1 – Caractérisation pratique et image du vecteur nul :

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application.

1. f est linéaire si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

2. Si f est linéaire, alors $f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{F}$.

Attention

La réciproque est fausse : $f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{F}$ est une condition nécessaire mais non suffisante.

Exercice VI.1

Montrer que l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - 3z \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

est une application linéaire.

Idée
Une application linéaire est une application compatible avec les combinaisons linéaires !

Proposition 2 – Conservation des combinaisons linéaires :

Pour toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tous vecteurs $x_1, \dots, x_k \in \mathrm{E}$ et tous scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i)$$

Exemples 1 – Exemples usuels d'applications linéaires :

— **L'application nulle :** $\mathbf{0}_{\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})} : x \longmapsto 0_\mathrm{F}$ est linéaire.

— **L'identité :** $\mathrm{Id}_\mathrm{E} : x \longmapsto x$ est un endomorphisme de E.

— **L'homothétie vectorielle :** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $h_\lambda : x \longmapsto \lambda x$ est un endomorphisme de E.

— **La dérivation dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$:** $\mathrm{D} : \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

— **L'application matricielle canonique :** Pour $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $f_\mathrm{A} : \mathrm{X} \longmapsto \mathrm{AX}$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice VI.2 – (Une application linéaire est déterminée par l'image d'une base)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que $f(1,0) = (2,1)$ et $f(0,1) = (-1,3)$.

1. Calculer $f(3,-2)$.
2. Plus généralement, soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'expression de $f\,(x\,;y)$.

Méthode 1 – Montrer qu'une application n'est pas linéaire :

Pour prouver qu'une application f n'est pas linéaire, il suffit au choix de :

1. Vérifier que $f(0_\mathrm{E}) \neq 0_\mathrm{F}$.
2. Exhiber un contre-exemple explicite d'échec de la linéarité (par exemple $f(\lambda x) \neq \lambda f(x)$).

Attention
Si f est linéaire alors $f(0) = 0$, mais la réciproque est fausse.
En particulier il ne sert à rien de montrer que $f(0) = 0$ pour justifier qu'une application est linéaire. C'est une condition nécessaire non suffisante.

Exercice VI.3 – (Montrer qu'une application n'est pas linéaire)

Étudier la linéarité de $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = x + y + 1$ et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $h(x,y) = (x^2, y)$.

Exercice VI.4 – (Un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ (esprit Ecricome))

Montrer que l'application $\Psi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X], P \longmapsto (X^2-1)P''+5XP'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

I.2 – Noyau et Image d'une application linéaire

Définition 2 – Noyau et Image :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

— Le *noyau* de f, noté $\ker(f)$, est l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est le vecteur nul 0_F :

$$\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$$

— L'*image* de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, est l'ensemble des images par f des vecteurs de E :

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\} = f(E)$$

Proposition 3 – Structure du noyau et de l'image :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice VI.5 – (Noyau d'une application linéaire)

Soit l'application linéaire f définie par

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x-2y+z+2t \\ 2y-t \end{pmatrix}. \end{array}$$

Méthode
Pour déterminer le noyau d'une application linéaire, on résout un système homogène.

Déterminer le noyau de f.

Exemple 2 – Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel grâce au noyau :

$\mathrm{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$: c'est le noyau de la forme linéaire $\ell : (x, y, z) \longmapsto x + y - z$.

I.3 – Injectivité, surjectivité et bijections

Théorème 4 – Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

— f est *injective* $\iff \ker(f) = \{0_\mathrm{E}\}$.

— f est *surjective* $\iff \mathrm{Im}(f) = \mathrm{F}$.

Méthode 2 – Montrer qu'une application linéaire est injective :

Pour montrer qu'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est injective.

1. On considère un vecteur $x \in \mathrm{E}$: « Soit $x \in \mathrm{E}$ »
2. On résout l'équation $f(x) = 0_\mathrm{F}$ sous la forme d'un système linéaire.
3. On démontre finalement que $f(x) = 0_\mathrm{F} \iff x = 0_\mathrm{E}$ *i.e.* que les seuls vecteurs envoyés par f sur le vecteur nul sont eux-mêmes nuls.

Idée

Le théorème du rang en dimension finie nous permettra souvent de ne montrer que l'une ou l'autre de ces propriétés.

Méthode 3 – Montrer qu'une application linéaire est surjective :

Pour montrer qu'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est surjective.

Comme on a déjà $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{F}$, il ne reste qu'à montre l'inclusion réciproque :

1. On considère un vecteur $y \in \mathrm{F}$: « Soit $y \in \mathrm{F}$ »
2. On résout l'équation $f(x) = y$ sous la forme d'un système linéaire d'inconnue le vecteur x
3. On démontre finalement que l'ensemble des solutions est non vide *i.e.* qu'il existe au moins un antécédent de y par f.

Exemple 3 – Symétrie :

Soit l'application linéaire définie par

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{S} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (-x,y). \end{array}$$

Noyau : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \in \ker \mathrm{S} \iff \mathrm{S}((x,y)) = (0,0)$.

$$\iff \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff (x,y) = (0,0)$$

Donc, $\ker(\mathrm{S}) = \{(0,0)\}$ et S est injective.

Image : De plus, soit $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Il suffit de lui trouver un antécédent par S :

Comme $\mathrm{S}((-x,y)) = (x,y)$, $(-x,y)$ est un antécédent de (x,y) *i.e.* $\mathrm{Im}(\mathrm{S}) = \mathbb{R}^2$.

L'application S est donc surjective.

Conclusion : $\mathrm{S} \in \mathcal{G}l(\mathbb{R}^2)$.

Exemples 4 – Injective ? Surjective ?:

E1 • $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \longmapsto (x + y,\ x - y,\ 2y)$ est injective.
Soit $(x, y) \in \ker(f)$.
Alors $x + y = 0$, $x - y = 0$ et $2y = 0$, d'où $y = 0$ puis $x = 0$.
Donc $\ker(f) = \{(0, 0)\}$.

E2 • $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (x + y,\ y + z)$ est surjective mais pas injective.

— Surjective : pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $h(a, 0, b) = (a, b)$.

— Pas injective : $h(1, -1, 1) = (0, 0)$ avec $(1, -1, 1) \neq (0, 0, 0)$.

E3 • $g : \mathbb{R}[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}[\mathrm{X}],\ \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{XP}$ est injective non surjective.

— Injective : Si $\mathrm{XP} = 0$ alors $\mathrm{P} = 0$.

— Pas surjective : 1 n'a pas d'antécédent (tout polynôme XP s'annule en 0).

Définition 3 – Isomorphismes et automorphismes :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

— Si f est bijective, on dit que f est un *isomorphisme* de E sur F.

— Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ et que f est bijective, on dit que f est un *automorphisme* de E.

Proposition 5 – Réciproque d'un isomorphisme :

Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est un isomorphisme, alors son application réciproque $f^{-1} : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ est également une application linéaire (et donc un isomorphisme de F sur E).

Exercice VI.6 – (Injectivité et surjectivité dans les polynômes)

Soit $\theta : \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ définie par $\theta(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} + 1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$.

1. Montrer que θ est un endomorphisme.
2. Déterminer $\ker(\theta)$. L'application θ est-elle injective ?

I.4 – Image d'une base et dimension finie

Théorème 6 – Transport de base par une application linéaire :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

1. $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
2. f est injective $\iff$ $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre dans F.
3. f est surjective $\iff$ $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ engendre F.
4. f est bijective $\iff$ $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F.

Exemple 5 – Image d'un endomorphisme :

Déterminons une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ avec

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y+2z \\ x+z \\ -x-z \end{pmatrix}. \end{array}$$

Exercice VI.7 – (Image d'une application linéaire)

Démonter que l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$$

est linéaire et déterminer son image. Qu'en dire ?

II. Théorème du rang

II.1 – Rang d'une application linéaire

Définition 4 – Rang d'une application linéaire :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On appelle *rang* de f, noté $\mathrm{rg}\,(f)$, la dimension de son image :

$$\mathrm{rg}\,(f) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right)$$

Proposition 7 – Inégalités sur le rang :

Pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$:

$$\mathrm{rg}\,(f) \leqslant \min(\dim \mathrm{E}, \dim \mathrm{F})$$

De plus :

— f est injective $\iff \mathrm{rg}\,(f) = \dim \mathrm{E}$.

— f est surjective $\iff \mathrm{rg}\,(f) = \dim \mathrm{F}$.

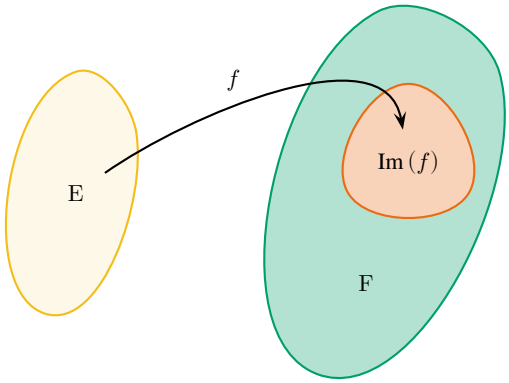


FIGURE VI.1 : En général, une application ne peut que « contracter » son ensemble de définition.

II.2 – Le Théorème du rang

Théorème 8 – Théorème du rang :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

$$\dim \mathrm{E} = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$$

Corollaire 9 – Caractérisation des isomorphismes en dimension égale :

Soient E et F deux espaces vectoriels de *même dimension finie* ($\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$) et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est bijective (isomorphisme).

(ii) f est injective ($\ker(f) = \{0_\mathrm{E}\}$).

(iii) f est surjective ($\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{F})$).

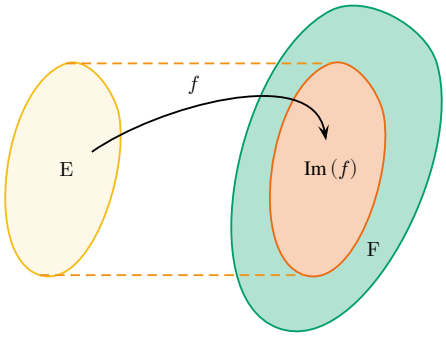


FIGURE VI.2 : f est injective si, et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{E})$.

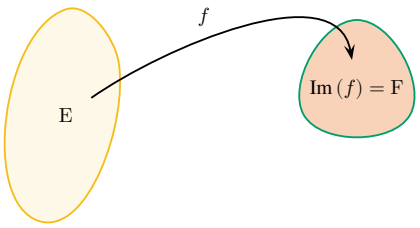


FIGURE VI.3 : f est surjective si, et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{F})$.

Méthode 4 – Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$:

— **Pour déterminer** $\ker(f)$ **:** On résout le système linéaire homogène $f(x) = 0_{\mathrm{F}}$.

— **Pour déterminer** $\mathrm{Im}(f)$ **:**

1. On calcule les images de la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de E : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
2. On applique le théorème du rang pour connaître la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, puis on en extrait une famille libre de cardinal égal à $\mathrm{rg}(f)$.

Exemple 6 – Utiliser le théorème du rang pour éviter des calculs :

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z, t) \longmapsto (x - 2y + z + 2t,\ 2y - t)$ de l' exercice (VI.5) .

On a trouvé $\ker(f) = \mathrm{Vect}\big((-1, 0, 1, 0), (-2, 1, 0, 2)\big)$ de dimension 2.

Le théorème du rang donne $\mathrm{rg}(f) = 4 - 2 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, donc f est surjective, sans avoir calculé son image.

Exercice VI.8 – (Application du théorème du rang (suite de l'exemple Ψ))

Soit $\Psi : \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ définie par $\Psi(a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c) = 12a\mathrm{X}^2 + 5b\mathrm{X} - 2a$.

Déterminer $\ker(\Psi)$, $\mathrm{Im}(\Psi)$ et vérifier le théorème du rang.

Exercice VI.9 – (Utilisation du théorème du rang pour prouver la surjection)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + z,\ 2x - z)$. f est-elle surjective ?

III. Composition et polynômes d'endomorphismes

III.1 – Composition d'applications linéaires

Proposition 10 – Composée d'applications linéaires :

Soient $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$.

La composée $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G *i.e.* $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{G})$.

III.2 – Polynômes d'endomorphismes et annulateurs

Définition 5 – Puissances et polynômes d'un endomorphisme :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

— On pose $f^0 = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f \circ f^n$.

— Soit $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On définit l'endomorphisme $\mathrm{P}(f) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ par :

$$\mathrm{P}(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k = a_0 \mathrm{Id}_\mathrm{E} + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_d f^d$$

Attention
f^k signifie $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$ et non $\underbrace{f \times f \times \ldots \times f}_{k \text{ fois}}$!

Définition 6 – Polynôme annulateur :

Un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est dit *annulateur* de $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ si $\mathrm{P}(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

Exemples 7 :

— Si u : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \end{array}$ alors $u^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

Le polynôme $\mathrm{X}^2 - 1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)$ est annulateur de u.

— Si u : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$ alors u^2 : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \end{array}$ et $u^2 = 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

Le polynôme $\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-2)$ est annulateur de u.

Exercice VI.10 – (Polynôme annulateur et automorphisme)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

Montrer que f est un automorphisme de E et exprimer f^{-1}.

Exercice VI.11 – (Étude d'un endomorphisme nilpotent)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

1. À l'aide du polynôme $(1-\mathrm{X})(1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2) = 1-\mathrm{X}^3$, montrer que $\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f$ est un automorphisme de E et exprimer son inverse.
2. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est libre.

IV. Bilan et compétences attendues

Les compétences attendues sur le chapitre « applications linéaires » sont les suivantes :

— savoir montrer qu'une application est linéaire (ou qu'elle ne l'est pas), et qu'un endomorphisme stabilise bien l'espace de départ.

— savoir déterminer le noyau (système homogène) et l'image (image d'une famille génératrice) d'une application linéaire, et en donner une base.

— savoir caractériser l'injectivité (via $\ker(f)$) et la surjectivité (via $\mathrm{Im}\,(f)$ ou le rang).

— connaître le théorème du rang et savoir l'utiliser, notamment en dimension égale pour passer de l'injectivité à la bijectivité.

— savoir manipuler les polynômes d'endomorphismes et utiliser un polynôme annulateur pour prouver qu'un endomorphisme est un automorphisme et calculer son inverse.