Applications linéaires en dimension finie

Cours de ECG-2

Lycée Gerville Réache

Chapitre 7



Sommaire I

1. Applications linéaires
2. Théorème du rang
3. Composition et polynômes d'endomorphismes
4. Bilan et compétences attendues

Dans tout ce chapitre, E et F désignent des espaces vectoriels réels de dimension finie.

I. Applications linéaires

1. **Applications linéaires**
   - Définitions et généralités
   - Noyau et image d'une application linéaire
   - Injectivité, surjectivité et bijections
   - Image d'une base et dimension finie
2. Théorème du rang
3. Composition et polynômes d'endomorphismes
4. Bilan et compétences attendues

Définition 1 – Application linéaire et endomorphisme :

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est appelée application linéaire si :

- $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$

Définition 1 – Application linéaire et endomorphisme :

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est appelée application linéaire si :

- $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $\forall x \in \mathrm{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Définition 1 – Application linéaire et endomorphisme :

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est appelée application linéaire si :

- $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $\forall x \in \mathrm{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Méthode

Pour montrer que f est un endomorphisme de E, il suffit de :

- prouver que f est linéaire.
- vérifier que,

$$\forall\, x \in \mathrm{E},\ f(x) \in \mathrm{E}.$$

Définition 1 – Application linéaire et endomorphisme :

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est appelée application linéaire si :

- $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $\forall x \in \mathrm{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.
Vocabulaire : Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$, f est appelée un endomorphisme de E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Proposition 1 – Caractérisation pratique et image du vecteur nul :

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application.

1. f est linéaire si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Attention

La réciproque est fausse : $f(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{F}}$ est une condition nécessaire mais non suffisante.

Proposition 1 – Caractérisation pratique et image du vecteur nul :

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application.

1. f est linéaire si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

2. Si f est linéaire, alors $f(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{F}}$.

Exercice 1 :

Montrer que l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - 3z \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

est une application linéaire.

Attention

Ne pas confondre le vecteur X et sa coordonnée x.

Exercice 1 :

Montrer que l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - 3z \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

est une application linéaire.

Soient $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(\lambda \mathrm{X} + \mu \mathrm{Y}) = f \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\lambda x + \mu x') - 3(\lambda z + \mu z') \\ (\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') \end{pmatrix}$$

Attention

Ne pas confondre le vecteur X et sa coordonnée x.

Exercice 1 :

Montrer que l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - 3z \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

est une application linéaire.

Soient $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(\lambda \mathrm{X} + \mu \mathrm{Y}) = f \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\lambda x + \mu x') - 3(\lambda z + \mu z') \\ (\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda(2x - 3z) + \mu(2x' - 3z') \\ \lambda(x + y + z) + \mu(x' + y' + z') \end{pmatrix} = \lambda f(\mathrm{X}) + \mu f(\mathrm{Y})$$

Donc f est bien une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

Idée

Une application linéaire est une application compatible avec les combinaisons linéaires !

Proposition 2 – Conservation des combinaisons linéaires :

Pour toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tous vecteurs $x_1, \dots, x_k \in \mathrm{E}$ et tous scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i)$$

Exemples 1 – Exemples usuels d'applications linéaires :

- **L'application nulle :** $0_{\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})} : x \longmapsto 0_{\mathrm{F}}$ est linéaire.

Exemples 1 – Exemples usuels d'applications linéaires :

- **L'application nulle :** $0_{\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})} : x \longmapsto 0_{\mathrm{F}}$ est linéaire.
- **L'identité :** $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} : x \longmapsto x$ est un endomorphisme de E.

Exemples 1 – Exemples usuels d'applications linéaires :

- **L'application nulle :** $0_{\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})} : x \longmapsto 0_{\mathrm{F}}$ est linéaire.
- **L'identité :** $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} : x \longmapsto x$ est un endomorphisme de E.
- **L'homothétie vectorielle :** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $h_\lambda : x \longmapsto \lambda x$ est un endomorphisme de E.

Exemples 1 – Exemples usuels d'applications linéaires :

- **L'application nulle :** $0_{\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})} : x \longmapsto 0_{\mathrm{F}}$ est linéaire.
- **L'identité :** $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} : x \longmapsto x$ est un endomorphisme de E.
- **L'homothétie vectorielle :** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $h_\lambda : x \longmapsto \lambda x$ est un endomorphisme de E.
- **La dérivation dans** $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ **:** $\mathrm{D} : \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Exemples 1 – Exemples usuels d'applications linéaires :

- **L'application nulle :** $0_{\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})} : x \longmapsto 0_{\mathrm{F}}$ est linéaire.
- **L'identité :** $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} : x \longmapsto x$ est un endomorphisme de E.
- **L'homothétie vectorielle :** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $h_\lambda : x \longmapsto \lambda x$ est un endomorphisme de E.
- **La dérivation dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$:** $\mathrm{D} : \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
- **L'application matricielle canonique :** Pour $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $f_{\mathrm{A}} : \mathrm{X} \longmapsto \mathrm{AX}$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 2 – Une application linéaire est déterminée par l'image d'une base :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que $f(1,0) = (2,1)$ et $f(0,1) = (-1,3)$.

1. Calculer $f(3,-2)$.

Exercice 2 – Une application linéaire est déterminée par l'image d'une base :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que $f(1,0) = (2,1)$ et $f(0,1) = (-1,3)$.

1. Calculer $f(3,-2)$.

1. Comme $(3,-2) = 3\,(1,0) - 2\,(0,1)$, la linéarité donne

$$f(3,-2) = 3f(1,0) - 2f(0,1) = 3(2,1) - 2(-1,3) = (8,-3).$$

Exercice 2 – Une application linéaire est déterminée par l'image d'une base :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que $f(1,0) = (2,1)$ et $f(0,1) = (-1,3)$.

1. Calculer $f(3,-2)$.
2. Plus généralement, soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'expression de $f\,(x\,;y)$.

1. Comme $(3,-2) = 3\,(1,0) - 2\,(0,1)$, la linéarité donne

$$f(3,-2) = 3f(1,0) - 2f(0,1) = 3(2,1) - 2(-1,3) = (8,-3).$$

Exercice 2 – Une application linéaire est déterminée par l'image d'une base :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que $f(1,0) = (2,1)$ et $f(0,1) = (-1,3)$.

1. Calculer $f(3,-2)$.
2. Plus généralement, soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'expression de $f\,(x\,;y)$.

1. Comme $(3,-2) = 3\,(1,0) - 2\,(0,1)$, la linéarité donne

$$f(3,-2) = 3f(1,0) - 2f(0,1) = 3(2,1) - 2(-1,3) = (8,-3).$$

2. Plus généralement,

$$f(x,y) = x(2,1) + y(-1,3) = (2x - y,\ x + 3y).$$

Attention

Si f est linéaire alors $f(0) = 0$, mais la réciproque est fausse.
En particulier il ne sert à rien de montrer que $f(0) = 0$ pour justifier qu'une application est linéaire.
C'est une condition nécessaire non suffisante.

Méthode 1 – Montrer qu'une application n'est pas linéaire :

Pour prouver qu'une application f n'est pas linéaire, il suffit au choix de :

1. Vérifier que $f(0_{\mathrm{E}}) \neq 0_{\mathrm{F}}$.

Attention

Si f est linéaire alors $f(0) = 0$, mais la réciproque est fausse.
En particulier il ne sert à rien de montrer que $f(0) = 0$ pour justifier qu'une application est linéaire. C'est une condition nécessaire non suffisante.

Méthode 1 – Montrer qu'une application n'est pas linéaire :

Pour prouver qu'une application f n'est pas linéaire, il suffit au choix de :

1. Vérifier que $f(0_{\mathrm{E}}) \neq 0_{\mathrm{F}}$.
2. Exhiber un contre-exemple explicite d'échec de la linéarité (par exemple $f(\lambda x) \neq \lambda f(x)$).

Exercice 3 – Montrer qu'une application n'est pas linéaire :

Étudier la linéarité de $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = x + y + 1$ et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $h(x, y) = (x^2, y)$.

Exercice 3 – Montrer qu'une application n'est pas linéaire :

Étudier la linéarité de $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = x + y + 1$ et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $h(x, y) = (x^2, y)$.

- $g(0, 0) = 1 \neq 0$, donc g n'est pas linéaire.

Exercice 3 – Montrer qu'une application n'est pas linéaire :

Étudier la linéarité de $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = x + y + 1$ et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $h(x, y) = (x^2, y)$.

- $g(0, 0) = 1 \neq 0$, donc g n'est pas linéaire.
- $h(1, 0) = (1, 0)$, mais $h(2 \cdot (1, 0)) = h(2, 0) = (4, 0) \neq 2 \cdot h(1, 0) = (2, 0)$. Donc h n'est pas linéaire.

Exercice 4 – Un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ (esprit Ecricome) :

Montrer que l'application $\Psi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X],\ P \longmapsto (X^2-1)P'' + 5XP'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 4 – Un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ (esprit Ecricome) :

Montrer que l'application $\Psi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X],\ P \longmapsto (X^2-1)P'' + 5XP'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Linéarité. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de la dérivation :

$$\Psi(\lambda P + \mu Q) = (X^2-1)(\lambda P'' + \mu Q'') + 5X(\lambda P' + \mu Q') = \lambda\Psi(P) + \mu\Psi(Q)$$

Exercice 4 – Un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ (esprit Ecricome) :

Montrer que l'application $\Psi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X],\ P \longmapsto (X^2-1)P'' + 5XP'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Linéarité. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de la dérivation :

$$\Psi(\lambda P + \mu Q) = (X^2-1)(\lambda P'' + \mu Q'') + 5X(\lambda P' + \mu Q') = \lambda\Psi(P) + \mu\Psi(Q)$$

Stabilité. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. On a $P' = 2aX + b$ et $P'' = 2a$, donc :

$$\Psi(P) = 2a(X^2-1) + 5X(2aX+b) = 12aX^2 + 5bX - 2a \in \mathbb{R}_2[X]$$

Ainsi, $\Psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

Définition 2 – Noyau et Image :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

- Le noyau de f, noté $\ker(f)$, est l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est le vecteur nul 0_{F} :

$$\ker(f) = \{x \in \mathrm{E} \mid f(x) = 0_{\mathrm{F}}\}$$

Définition 2 – Noyau et Image :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

- Le noyau de f, noté $\ker(f)$, est l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est le vecteur nul 0_{F} :

$$\ker(f) = \{x \in \mathrm{E} \mid f(x) = 0_{\mathrm{F}}\}$$

- L'image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, est l'ensemble des images par f des vecteurs de E :

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathrm{E}\} = f(\mathrm{E})$$

Proposition 3 – Structure du noyau et de l'image :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

1. $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 3 – Structure du noyau et de l'image :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

1. $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 5 – Noyau d'une application linéaire :

Soit l'application linéaire f définie par

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x-2y+z+2t \\ 2y-t \end{pmatrix}. \end{array}$$

Déterminer le noyau de f.

Méthode

Pour déterminer le noyau d'une application linéaire, on résout un système homogène.

Exercice 5 – Noyau d'une application linéaire :

Soit l'application linéaire f définie par

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x-2y+z+2t \\ 2y-t \end{pmatrix}. \end{array}$$

Déterminer le noyau de f.

Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

$$\mathrm{X} \in \ker(f) \iff \begin{pmatrix} x-2y+z+2t \\ 2y-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x-2y+z+2t=0 \\ 2y-t=0 \end{cases}$$

Exercice 5 – Noyau d'une application linéaire :

$$\mathrm{X} \in \ker(f) \underset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rrrr} x & & +z+t=0 \\ & 2y & -t=0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x=-z-t \\ y=\dfrac{1}{2}\,t \end{array} \right.$$

Exercice 5 – Noyau d'une application linéaire :

$$\mathrm{X} \in \ker(f) \underset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}{\iff} \begin{cases} x \quad + z + t = 0 \\ 2y \quad - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z - t \\ y = \dfrac{1}{2}\, t \end{cases}$$

$$\iff \mathrm{X} = z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 – Noyau d'une application linéaire :

$$\mathrm{X} \in \ker(f) \underset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}{\iff} \begin{cases} x \quad + z + t = 0 \\ 2y \quad - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z - t \\ y = \dfrac{1}{2}\, t \end{cases}$$

$$\iff \mathrm{X} = z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc, } \ker(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 5 – Noyau d'une application linéaire :

Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$:

- engendre $\ker(f)$,

Rappel

Deux vecteurs sont libres si leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Exercice 5 – Noyau d'une application linéaire :

Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$:

- engendre $\ker(f)$,
- est libre, car elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires.

Rappel

Deux vecteurs sont libres si leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Exercice 5 – Noyau d'une application linéaire :

Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$:

- engendre $\ker(f)$,
- est libre, car elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires.

C'est donc une base de $\ker(f)$.

Exemple 2 – Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel grâce au noyau :

Montrons que $\mathrm{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2 – Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel grâce au noyau :

Montrons que $\mathrm{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

C'est le noyau de la forme linéaire $\ell : (x, y, z) \longmapsto x+y-z$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.



Théorème 4 – Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

- f est injective $\iff \ker(f) = \{0_{\mathrm{E}}\}$.

Théorème 4 – Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

- f est injective $\iff \ker(f) = \{0_{\mathrm{E}}\}$.
- f est surjective $\iff \mathrm{Im}(f) = \mathrm{F}$.

Idée

Le théorème du rang en dimension finie nous permettra souvent de ne montrer que l'une ou l'autre de ces propriétés.

Méthode 2 – Montrer qu'une application linéaire est injective :

Pour montrer qu'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est injective.

1. On considère un vecteur $x \in \mathrm{E}$: « Soit $x \in \mathrm{E}$ »

Idée

Le théorème du rang en dimension finie nous permettra souvent de ne montrer que l'une ou l'autre de ces propriétés.

Méthode 2 – Montrer qu'une application linéaire est injective :

Pour montrer qu'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est injective.

1. On considère un vecteur $x \in \mathrm{E}$: « Soit $x \in \mathrm{E}$ »
2. On résout l'équation $f(x) = 0_{\mathrm{F}}$ sous la forme d'un système linéaire.

Idée

Le théorème du rang en dimension finie nous permettra souvent de ne montrer que l'une ou l'autre de ces propriétés.

Méthode 2 – Montrer qu'une application linéaire est injective :

Pour montrer qu'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est injective.

1. On considère un vecteur $x \in \mathrm{E}$: « Soit $x \in \mathrm{E}$ »
2. On résout l'équation $f(x) = 0_{\mathrm{F}}$ sous la forme d'un système linéaire.
3. On démontre finalement que $f(x) = 0_{\mathrm{F}} \iff x = 0_{\mathrm{E}}$ *i.e.* que les seuls vecteurs envoyés par f sur le vecteur nul sont eux-mêmes nuls.

Méthode 3 – Montrer qu'une application linéaire est surjective :

Pour montrer qu'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est surjective.
Comme on a déjà $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{F}$, il ne reste qu'à montrer l'inclusion réciproque :

1. On considère un vecteur $y \in \mathrm{F}$: « Soit $y \in \mathrm{F}$ »

Méthode 3 – Montrer qu'une application linéaire est surjective :

Pour montrer qu'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est surjective.
Comme on a déjà $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{F}$, il ne reste qu'à montrer l'inclusion réciproque :

1. On considère un vecteur $y \in \mathrm{F}$: « Soit $y \in \mathrm{F}$ »
2. On résout l'équation $f(x) = y$ sous la forme d'un système linéaire d'inconnue le vecteur x

Méthode 3 – Montrer qu'une application linéaire est surjective :

Pour montrer qu'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est surjective.
Comme on a déjà $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{F}$, il ne reste qu'à montrer l'inclusion réciproque :

1. On considère un vecteur $y \in \mathrm{F}$: « Soit $y \in \mathrm{F}$ »
2. On résout l'équation $f(x) = y$ sous la forme d'un système linéaire d'inconnue le vecteur x
3. On démontre finalement que l'ensemble des solutions est non vide *i.e.* qu'il existe au moins un antécédent de y par f.

Exemple 3 – Symétrie :

Soit l'application linéaire définie par S : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-x,y). \end{array}$

Est-elle injective ? surjective ?

Exemple 3 – Symétrie :

Soit l'application linéaire définie par S : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-x,y). \end{array}$

Est-elle injective ? surjective ?

Noyau :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad (x,y)\in\ker\,\mathrm{S} \iff \mathrm{S}((x,y))=(0,0)$$

$$\iff \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x,y)=(0,0)$$

Donc, $\ker(\mathrm{S})=\{(0,0)\}$ et S est injective.

Exemple 3 – Symétrie :

Soit l'application linéaire définie par S : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-x,y). \end{array}$

Est-elle injective ? surjective ?

Noyau :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad (x,y)\in\ker\,\mathrm{S} \iff \mathrm{S}((x,y))=(0,0)$$

$$\iff \begin{pmatrix}-x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \iff (x,y)=(0,0)$$

Donc, $\ker(\mathrm{S})=\{(0,0)\}$ et S est injective.

Image : Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Il suffit de lui trouver un antécédent par S :
Comme $\mathrm{S}((-x,y))=(x,y)$, $(-x,y)$ est un antécédent de (x,y)
i.e. $\mathrm{Im}\,(\mathrm{S})=\mathbb{R}^2$.
L'application S est donc surjective.

Exemple 3 – Symétrie :

Soit l'application linéaire définie par S : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-x,y). \end{array}$

Est-elle injective ? surjective ?

Noyau :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad (x,y)\in\ker\mathrm{S} \iff \mathrm{S}((x,y))=(0,0)$$

$$\iff \begin{pmatrix}-x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \iff (x,y)=(0,0)$$

Donc, $\ker(\mathrm{S})=\{(0,0)\}$ et S est injective.

Image : Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Il suffit de lui trouver un antécédent par S :
Comme $\mathrm{S}((-x,y))=(x,y)$, $(-x,y)$ est un antécédent de (x,y)
i.e. $\mathrm{Im}(\mathrm{S})=\mathbb{R}^2$.
L'application S est donc surjective.

Conclusion : $\mathrm{S}\in\mathcal{G}l(\mathbb{R}^2)$.

Exemples 4 – Injective ? Surjective ?:

E1 ▪ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \longmapsto (x + y,\ x - y,\ 2y)$ est injective.

Exemples 4 – Injective ? Surjective ?:

E1 ▪ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \longmapsto (x + y,\ x - y,\ 2y)$ est injective.

Soit $(x, y) \in \ker(f)$.
Alors $x + y = 0$, $x - y = 0$ et $2y = 0$, d'où $y = 0$ puis $x = 0$.
Donc $\ker(f) = \{(0, 0)\}$.

Exemples 4 – Injective ? Surjective ?:

E1 ▪ $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (x + y,\ y + z)$ est surjective mais pas injective.

Exemples 4 – Injective ? Surjective ?:

E1

- $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (x + y,\ y + z)$ est surjective mais pas injective.
  - Surjective : pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $h(a, 0, b) = (a, b)$.

Exemples 4 – Injective ? Surjective ?:

E1

- $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (x + y,\ y + z)$ est surjective mais pas injective.
  - Surjective : pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $h(a, 0, b) = (a, b)$.
  - Pas injective : $h(1, -1, 1) = (0, 0)$ avec $(1, -1, 1) \neq (0, 0, 0)$.

Exemples 4 – Injective ? Surjective ?:

E1 ▪ $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (x + y,\ y + z)$ est surjective mais pas injective.

- Surjective : pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $h(a, 0, b) = (a, b)$.
- Pas injective : $h(1, -1, 1) = (0, 0)$ avec $(1, -1, 1) \neq (0, 0, 0)$.

E2 ▪ $g : \mathbb{R}[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}[\mathrm{X}],\ \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{XP}$ est injective non surjective.

Exemples 4 – Injective ? Surjective ?:

E1 ▪ $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (x + y,\ y + z)$ est surjective mais pas injective.

- Surjective : pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $h(a, 0, b) = (a, b)$.
- Pas injective : $h(1, -1, 1) = (0, 0)$ avec $(1, -1, 1) \neq (0, 0, 0)$.

E2 ▪ $g : \mathbb{R}[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}[\mathrm{X}],\ \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{XP}$ est injective non surjective.

- Injective : Si $\mathrm{XP} = 0$ alors $\mathrm{P} = 0$.

Exemples 4 – Injective ? Surjective ?:

E1 ▪ $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (x + y,\ y + z)$ est surjective mais pas injective.

- Surjective : pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $h(a, 0, b) = (a, b)$.
- Pas injective : $h(1, -1, 1) = (0, 0)$ avec $(1, -1, 1) \neq (0, 0, 0)$.

E2 ▪ $g : \mathbb{R}[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}[\mathrm{X}],\ \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{XP}$ est injective non surjective.

- Injective : Si $\mathrm{XP} = 0$ alors $\mathrm{P} = 0$.
- Pas surjective : 1 n'a pas d'antécédent (tout polynôme XP s'annule en 0).

Définition 3 – Isomorphismes et automorphismes :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

- Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme de E sur F.

Définition 3 – Isomorphismes et automorphismes :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

- Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme de E sur F.
- Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ et que f est bijective, on dit que f est un automorphisme de E.

Définition 3 – Isomorphismes et automorphismes :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

- Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme de E sur F.
- Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ et que f est bijective, on dit que f est un automorphisme de E.

Proposition 5 – Réciproque d'un isomorphisme :

Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est un isomorphisme, alors son application réciproque $f^{-1} : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ est également une application linéaire (et donc un isomorphisme de F sur E).

Exercice 6 – Injectivité et surjectivité dans les polynômes :

Soit $\theta : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\theta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que θ est un endomorphisme.

Exercice 6 – Injectivité et surjectivité dans les polynômes :

Soit $\theta : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\theta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que θ est un endomorphisme.

1. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\theta(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda\theta(P) + \mu\theta(Q).$$

De plus, $\deg(\theta(P)) \leqslant \deg(P) \leqslant 2$, donc $\theta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

Exercice 6 – Injectivité et surjectivité dans les polynômes :

Soit $\theta : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\theta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que θ est un endomorphisme.
2. Déterminer $\ker(\theta)$. L'application θ est-elle injective ?

1. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\theta(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda\theta(P) + \mu\theta(Q).$$

De plus, $\deg(\theta(P)) \leqslant \deg(P) \leqslant 2$, donc $\theta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

Exercice 6 – Injectivité et surjectivité dans les polynômes :

Soit $\theta : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\theta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que θ est un endomorphisme.
2. Déterminer $\ker(\theta)$. L'application θ est-elle injective ?

1. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\theta(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda\theta(P) + \mu\theta(Q).$$

De plus, $\deg(\theta(P)) \leqslant \deg(P) \leqslant 2$, donc $\theta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. $P \in \ker(\theta) \iff P(X+1) = P(X)$. Les seuls polynômes vérifiant cette propriété sont les polynômes constants.

Exercice 6 – Injectivité et surjectivité dans les polynômes :

Soit $\theta : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\theta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que θ est un endomorphisme.
2. Déterminer $\ker(\theta)$. L'application θ est-elle injective ?

1. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\theta(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda\theta(P) + \mu\theta(Q).$$

De plus, $\deg(\theta(P)) \leqslant \deg(P) \leqslant 2$, donc $\theta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. $P \in \ker(\theta) \iff P(X+1) = P(X)$. Les seuls polynômes vérifiant cette propriété sont les polynômes constants.
Ainsi, $\ker(\theta) = \mathbb{R}_0[X] = \text{Vect}(1) \neq \{0\}$ et θ n'est pas injective.

Théorème 6 – Transport de base par une application linéaire :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

1. $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Théorème 6 – Transport de base par une application linéaire :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

1. $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
2. f est injective $\iff$ $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre dans F.

Théorème 6 – Transport de base par une application linéaire :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

1. $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
2. f est injective $\iff$ $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre dans F.
3. f est surjective $\iff$ $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ engendre F.

Théorème 6 – Transport de base par une application linéaire :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

1. $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
2. f est injective $\iff$ $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre dans F.
3. f est surjective $\iff$ $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ engendre F.
4. f est bijective $\iff$ $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F.

Exemple 5 – Image d'un endomorphisme :

Déterminons une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ avec

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x+y+2z\,;x+z\,;-x-z)\,. \end{array}$$

Exemple 5 – Image d'un endomorphisme :

Déterminons une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ avec

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x+y+2z\,;x+z\,;-x-z)\,. \end{array}$$

Soit $\left(e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Elle est, en particulier, génératrice de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{Im}\,(f)=\mathrm{Vect}\,(f(e_1),f(e_2),f(e_3))$$

Exemple 5 – Image d'un endomorphisme :

Déterminons une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ avec

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x+y+2z\,;x+z\,;-x-z)\,. \end{array}$$

Soit $\left(e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Elle est, en particulier, génératrice de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,(f) &= \mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Exemple 5 – Image d'un endomorphisme :

Déterminons une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ avec

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x+y+2z\,;x+z\,;-x-z)\,. \end{array}$$

Soit $\left(e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Elle est, en particulier, génératrice de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,(f) &= \mathrm{Vect}\,(f(e_1),f(e_2),f(e_3)) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Exemple 5 – Image d'un endomorphisme :

Déterminons une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ avec

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x+y+2z\,;x+z\,;-x-z)\,. \end{array}$$

Soit $\left(e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Elle est, en particulier, génératrice de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,(f) &= \mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Les deux vecteurs étant non colinéaires, ils forment une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ qui est donc de dimension 2.

Exercice 7 – Image d'une application linéaire :

Démontrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$$

est linéaire et déterminer son image. Qu'en dire ?

Méthode

C'est une méthode efficace pour montrer que f est une application linéaire.

Exercice 7 – Image d'une application linéaire :

Démontrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$$

est linéaire et déterminer son image. Qu'en dire ?

- Posons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ de sorte que, pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Par linéarité à droite du produit matriciel, on en déduit que f est une application linéaire de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 7 – Image d'une application linéaire :

Pour $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ x-y \end{pmatrix}$, déterminer $\mathrm{Im}\,(f)$. Qu'en dire ?

Exercice 7 – Image d'une application linéaire :

Pour $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ x-y \end{pmatrix}$, déterminer $\text{Im}\,(f)$. Qu'en dire ?

- En considérant la base canonique $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on sait que :

$$\text{Im}\,(f) = \text{Vect}\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Or, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Conclusion, $\text{Im}\,(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Remarque

Pour montrer que f n'est pas surjective, on aurait pu aussi exhiber un vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui n'a pas d'antécédent par f : $(1\,;1\,;1)$ convient comme une infinité d'autres.

Exercice 7 – Image d'une application linéaire :

Pour $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\3x\\x-y\end{pmatrix}$, déterminer $\text{Im}\,(f)$. Qu'en dire ?

- En considérant la base canonique $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on sait que :

$$\text{Im}\,(f) = \text{Vect}\left(f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Or, $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Conclusion, $\text{Im}\,(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$.

- Comme $\dim(\text{Im}\,(f)) = 2$, alors $\text{Im}\,(f) \neq \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et f n'est pas surjective.

II. Théorème du rang

1 Applications linéaires

2 **Théorème du rang**
- Rang d'une application linéaire
- Le théorème du rang

3 Composition et polynômes d'endomorphismes

4 Bilan et compétences attendues

Définition 4 – Rang d'une application linéaire :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On appelle rang de f, noté $\mathrm{rg}\,(f)$, la dimension de son image :

$$\mathrm{rg}\,(f) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right)$$

Définition 4 – Rang d'une application linéaire :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On appelle rang de f, noté $\mathrm{rg}\,(f)$, la dimension de son image :

$$\mathrm{rg}\,(f) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right)$$

Proposition 7 – Inégalités sur le rang :

Pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$:

$$\mathrm{rg}\,(f) \leqslant \min(\dim \mathrm{E}, \dim \mathrm{F})$$

Définition 4 – Rang d'une application linéaire :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On appelle rang de f, noté $\mathrm{rg}\,(f)$, la dimension de son image :

$$\mathrm{rg}\,(f) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right)$$

Proposition 7 – Inégalités sur le rang :

Pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$:

$$\mathrm{rg}\,(f) \leqslant \min(\dim \mathrm{E}, \dim \mathrm{F})$$

De plus :

- f est injective $\iff$ $\mathrm{rg}\,(f) = \dim \mathrm{E}$.

Définition 4 – Rang d'une application linéaire :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On appelle rang de f, noté $\mathrm{rg}\,(f)$, la dimension de son image :

$$\mathrm{rg}\,(f) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right)$$

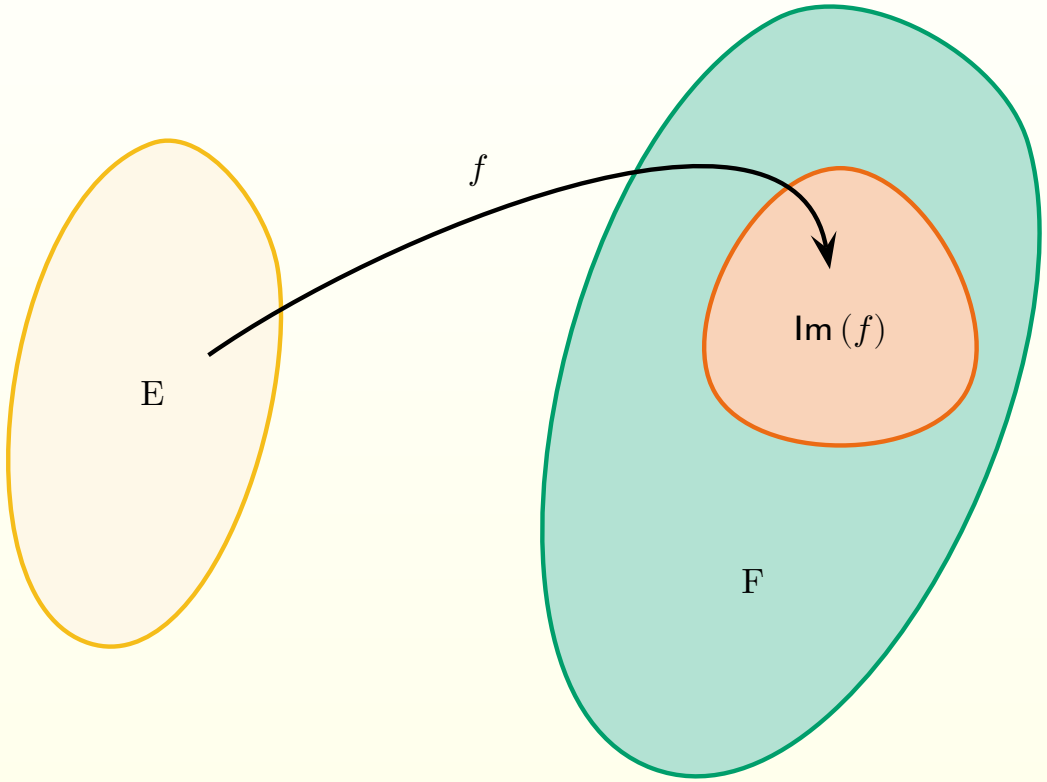
Proposition 7 – Inégalités sur le rang :

Pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$:

$$\mathrm{rg}\,(f) \leqslant \min(\dim \mathrm{E}, \dim \mathrm{F})$$

De plus :

- f est injective $\iff \mathrm{rg}\,(f) = \dim \mathrm{E}$.
- f est surjective $\iff \mathrm{rg}\,(f) = \dim \mathrm{F}$.



En général, une application ne peut que « contracter » son ensemble de définition.

Théorème 8 – Théorème du rang :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

$$\dim \mathrm{E} = \dim\left(\ker\left(f\right)\right) + \mathrm{rg}\left(f\right)$$

Théorème 8 – Théorème du rang :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

$$\dim \mathrm{E} = \dim\left(\ker\left(f\right)\right) + \mathrm{rg}\left(f\right)$$

Corollaire 9 – Caractérisation des isomorphismes en dimension égale :

Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie ($\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$) et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est bijective (isomorphisme).

Théorème 8 – Théorème du rang :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

$$\dim \mathrm{E} = \dim\left(\ker\left(f\right)\right) + \mathrm{rg}\left(f\right)$$

Corollaire 9 – Caractérisation des isomorphismes en dimension égale :

Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie ($\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$) et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est bijective (isomorphisme).
2. f est injective ($\ker\left(f\right) = \{0_{\mathrm{E}}\}$).

Théorème 8 – Théorème du rang :

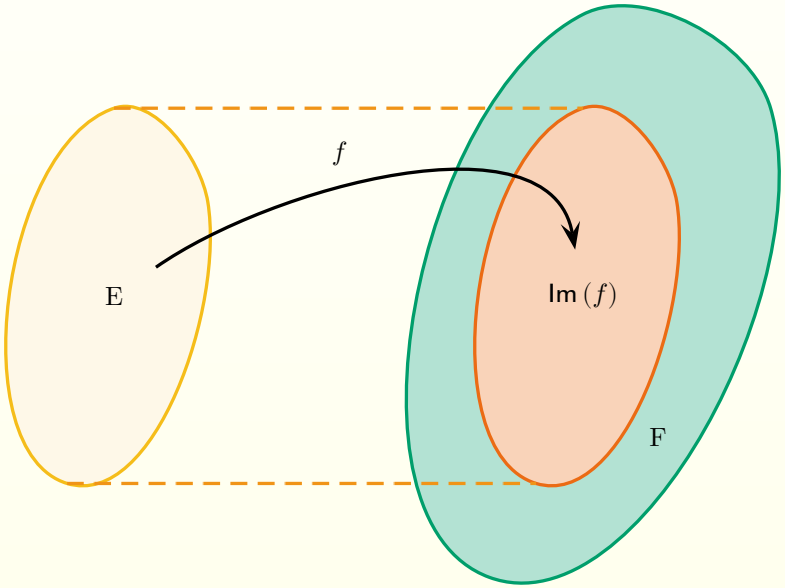
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

$$\dim \mathrm{E} = \dim\left(\ker\left(f\right)\right) + \mathrm{rg}\left(f\right)$$

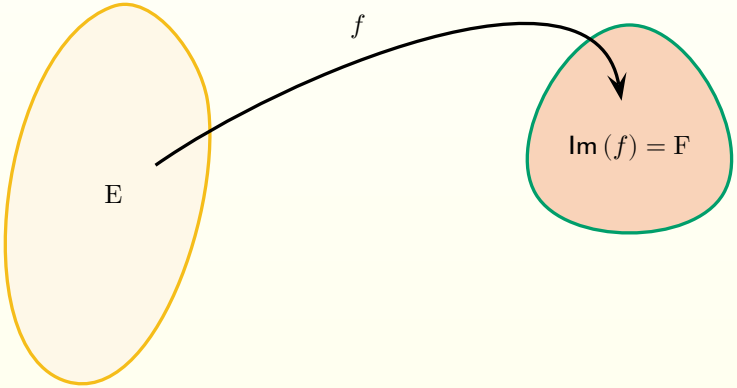
Corollaire 9 – Caractérisation des isomorphismes en dimension égale :

Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie ($\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$) et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est bijective (isomorphisme).
2. f est injective ($\ker\left(f\right) = \{0_{\mathrm{E}}\}$).
3. f est surjective ($\mathrm{rg}\left(f\right) = \dim \mathrm{F}$).



f est injective
si, et seulement si $\mathrm{rg}\,(f) = \dim\,(\mathrm{E})$.



f est surjective
si, et seulement si $\mathrm{rg}\,(f) = \dim\,(\mathrm{F})$.

Méthode 4 – Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$:

- **Pour déterminer $\ker(f)$:** On résout le système linéaire homogène $f(x) = 0_{\mathrm{F}}$.

Méthode 4 – Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$:

- **Pour déterminer $\ker(f)$:** On résout le système linéaire homogène $f(x) = 0_{\mathrm{F}}$.
- **Pour déterminer $\mathrm{Im}(f)$:**

Méthode 4 – Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$:

- **Pour déterminer $\ker(f)$:** On résout le système linéaire homogène $f(x) = 0_{\mathrm{F}}$.
- **Pour déterminer $\mathrm{Im}(f)$:**
  1. On calcule les images de la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de E :
     $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Méthode 4 – Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$:

- **Pour déterminer $\ker(f)$:** On résout le système linéaire homogène $f(x) = 0_{\mathrm{F}}$.
- **Pour déterminer $\mathrm{Im}(f)$:**
  1. On calcule les images de la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de E :
     $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
  2. On applique le théorème du rang pour connaître la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, puis on en extrait une famille libre de cardinal égal à $\mathrm{rg}(f)$.

Exemple 6 – Utiliser le théorème du rang pour éviter des calculs :

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z, t) \longmapsto (x - 2y + z + 2t,\ 2y - t)$ de l' exercice (5) .
Est-elle surjective ?

Exemple 6 – Utiliser le théorème du rang pour éviter des calculs :

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z, t) \longmapsto (x - 2y + z + 2t,\ 2y - t)$ de l' exercice (5) .
Est-elle surjective ?

On a trouvé $\ker(f) = \text{Vect}((-1, 0, 1, 0), (-2, 1, 0, 2))$ de dimension 2.
Le théorème du rang donne $\text{rg}(f) = 4 - 2 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, donc f est surjective, sans avoir calculé son image.

Exercice 8 – Application du théorème du rang (suite de l'exemple Ψ) :

Soit $\Psi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\Psi(aX^2 + bX + c) = 12aX^2 + 5bX - 2a$.
Déterminer $\ker(\Psi)$, $\mathrm{Im}(\Psi)$ et vérifier le théorème du rang.

Exercice 8 – Application du théorème du rang (suite de l'exemple Ψ) :

Soit $\Psi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\Psi(aX^2+bX+c) = 12aX^2+5bX-2a$.
Déterminer $\ker(\Psi)$, $\text{Im}(\Psi)$ et vérifier le théorème du rang.

- **Noyau :** $\Psi(P) = 0 \iff 12a = 0,\ 5b = 0,\ -2a = 0 \iff a = b = 0$.
  Ainsi, $\ker(\Psi) = \text{Vect}(1)$ et $\dim(\ker(\Psi)) = 1$.

Exercice 8 – Application du théorème du rang (suite de l'exemple Ψ) :

Soit $\Psi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\Psi(aX^2+bX+c) = 12aX^2+5bX-2a$.
Déterminer $\ker(\Psi)$, $\text{Im}(\Psi)$ et vérifier le théorème du rang.

- **Noyau :** $\Psi(P) = 0 \iff 12a = 0,\ 5b = 0,\ -2a = 0 \iff a = b = 0.$
  Ainsi, $\ker(\Psi) = \text{Vect}(1)$ et $\dim(\ker(\Psi)) = 1$.
- **Rang et Image :** D'après le théorème du rang :

$$\text{rg}(\Psi) = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim(\ker(\Psi)) = 3 - 1 = 2$$

Or
$\text{Im}(\Psi) = \text{Vect}(\Psi(1), \Psi(X), \Psi(X^2)) = \text{Vect}(-2, 5X, 12X^2-2) = \text{Vect}(X, 6X^2-1)$.
Les polynômes X et $6X^2-1$ ne sont pas colinéaires et appartiennent à $\text{Im}(\Psi)$.
Ils forment donc une base de $\text{Im}(\Psi)$.

Exercice 9 – Utilisation du théorème du rang pour prouver la surjection :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + z,\ 2x - z)$. f est-elle surjective ?

Exercice 9 – Utilisation du théorème du rang pour prouver la surjection :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + z,\ 2x - z)$. f est-elle surjective ?

Comme on est en dimension finie, on commence par déterminer le noyau de f :

$$(x, y, z) \in \ker(f) \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2x \\ y = -3x \end{cases}$$

Donc $\ker(f) = \text{Vect}((1, -3, 2))$. Ainsi $\dim(\ker(f)) = 1$.

Exercice 9 – Utilisation du théorème du rang pour prouver la surjection :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + z,\ 2x - z)$. f est-elle surjective ?

Comme on est en dimension finie, on commence par déterminer le noyau de f :

$$(x, y, z) \in \ker(f) \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2x \\ y = -3x \end{cases}$$

Donc $\ker(f) = \text{Vect}((1, -3, 2))$. Ainsi $\dim(\ker(f)) = 1$.

D'après le théorème du rang :

$$\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f)) = 3 - 1 = 2$$

Comme $\text{rg}(f) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, f est surjective.

III. Composition et polynômes d'endomorphismes

1. Applications linéaires
2. Théorème du rang
3. **Composition et polynômes d'endomorphismes**
   - Composition d'applications linéaires
   - Polynômes d'endomorphismes et annulateurs
4. Bilan et compétences attendues

Proposition 10 – Composée d'applications linéaires :

Soient $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.
La composée $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G *i.e.* $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{G})$.

Définition 5 – Puissances et polynômes d'un endomorphisme :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

- On pose $f^0 = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f \circ f^n$.

Attention

f^k signifie $f \circ f \circ \ldots \circ f$ et non $f \times f \times \ldots \times f$!

Définition 5 – Puissances et polynômes d'un endomorphisme :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

- On pose $f^0 = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f \circ f^n$.
- Soit $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On définit l'endomorphisme $\mathrm{P}(f) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ par :

$$\mathrm{P}(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k = a_0 \mathrm{Id}_\mathrm{E} + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_d f^d$$

Définition 6 – Polynôme annulateur :

Un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est dit annulateur de $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ si $\mathrm{P}(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

Définition 6 – Polynôme annulateur :

Un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est dit annulateur de $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ si $\mathrm{P}(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

Exemples 7 :

- Si $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \end{array}$ alors $u^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

  Le polynôme $\mathrm{X}^2 - 1 = (\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X} + 1)$ est annulateur de u.

Définition 6 – Polynôme annulateur :

Un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est dit annulateur de $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ si $\mathrm{P}(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

Exemples 7 :

- Si $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ alors $u^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

  Le polynôme $\mathrm{X}^2 - 1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)$ est annulateur de u.

- Si $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ alors $u^2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

  $u^2 = 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.
  Le polynôme $\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-2)$ est annulateur de u.

Exercice 10 – Polynôme annulateur et automorphisme :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.
Montrer que f est un automorphisme de E et exprimer f^{-1}.

Exercice 10 – Polynôme annulateur et automorphisme :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.
Montrer que f est un automorphisme de E et exprimer f^{-1}.

L'égalité s'écrit $3f - f^2 = 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}$, d'où :

$$f \circ \left(\frac{1}{2}(3\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)\right) = \mathrm{Id}_\mathrm{E} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{2}(3\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)\right) \circ f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$$

Exercice 10 – Polynôme annulateur et automorphisme :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.
Montrer que f est un automorphisme de E et exprimer f^{-1}.

L'égalité s'écrit $3f - f^2 = 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}$, d'où :

$$f \circ \left(\frac{1}{2}(3\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)\right) = \mathrm{Id}_\mathrm{E} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{2}(3\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)\right) \circ f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$$

Par conséquent, f est inversible (donc un automorphisme) et :

$$f^{-1} = \frac{1}{2}(3\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)$$

Exercice 11 – Étude d'un endomorphisme nilpotent :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

1. À l'aide du polynôme $(1-\mathrm{X})(1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2) = 1-\mathrm{X}^3$, montrer que $\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f$ est un automorphisme de E et exprimer son inverse.

Exercice 11 – Étude d'un endomorphisme nilpotent :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

1. À l'aide du polynôme $(1-\mathrm{X})(1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2) = 1-\mathrm{X}^3$, montrer que $\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f$ est un automorphisme de E et exprimer son inverse.

1. En appliquant le polynôme $1-\mathrm{X}^3$ à l'endomorphisme f on a :

$$(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f) \circ (\mathrm{Id}_\mathrm{E} + f + f^2) = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - f^3 = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$$

Donc $\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f$ est inversible et $(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)^{-1} = \mathrm{Id}_\mathrm{E} + f + f^2$.

Exercice 11 – Étude d'un endomorphisme nilpotent :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

2. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_{\mathrm{E}}$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est libre.

Exercice 11 – Étude d'un endomorphisme nilpotent :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

2. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_{\mathrm{E}}$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est libre.

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $ax_0 + bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0_{\mathrm{E}}$.

Exercice 11 – Étude d'un endomorphisme nilpotent :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

2. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est libre.

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $ax_0 + bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$.
   - En composant par f^2, on obtient $af^2(x_0) + bf^3(x_0) + cf^4(x_0) = 0_\mathrm{E} \implies af^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$. Comme $f^2(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$, on a $a = 0$.

Exercice 11 – Étude d'un endomorphisme nilpotent :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

2. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est libre.

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $ax_0 + bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$.
   - En composant par f^2, on obtient $af^2(x_0) + bf^3(x_0) + cf^4(x_0) = 0_\mathrm{E} \implies af^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$. Comme $f^2(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$, on a $a = 0$.
   - L'égalité devient $bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$. En composant par f, on obtient $bf^2(x_0) = 0_\mathrm{E} \implies b = 0$.

Exercice 11 – Étude d'un endomorphisme nilpotent :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

2. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est libre.

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $ax_0 + bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$.
   - En composant par f^2, on obtient $af^2(x_0) + bf^3(x_0) + cf^4(x_0) = 0_\mathrm{E} \implies af^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$. Comme $f^2(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$, on a $a = 0$.
   - L'égalité devient $bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$. En composant par f, on obtient $bf^2(x_0) = 0_\mathrm{E} \implies b = 0$.
   - Il reste $cf^2(x_0) = 0_\mathrm{E} \implies c = 0$.

Exercice 11 – Étude d'un endomorphisme nilpotent :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

2. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est libre.

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $ax_0 + bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$.
   - En composant par f^2, on obtient $af^2(x_0) + bf^3(x_0) + cf^4(x_0) = 0_\mathrm{E} \implies af^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$. Comme $f^2(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$, on a $a = 0$.
   - L'égalité devient $bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$. En composant par f, on obtient $bf^2(x_0) = 0_\mathrm{E} \implies b = 0$.
   - Il reste $cf^2(x_0) = 0_\mathrm{E} \implies c = 0$.

   La famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est donc libre.

IV. Bilan et compétences attendues

1. Applications linéaires
2. Théorème du rang
3. Composition et polynômes d'endomorphismes
4. **Bilan et compétences attendues**

IV. Bilan et compétences attendues

Les compétences attendues sur le chapitre « applications linéaires » sont les suivantes :

- savoir montrer qu'une application est linéaire (ou qu'elle ne l'est pas), et qu'un endomorphisme stabilise bien l'espace de départ.

IV. Bilan et compétences attendues

Les compétences attendues sur le chapitre « applications linéaires » sont les suivantes :

- savoir montrer qu'une application est linéaire (ou qu'elle ne l'est pas), et qu'un endomorphisme stabilise bien l'espace de départ.
- savoir déterminer le noyau (système homogène) et l'image (image d'une famille génératrice) d'une application linéaire, et en donner une base.

IV. Bilan et compétences attendues

Les compétences attendues sur le chapitre « applications linéaires » sont les suivantes :

- savoir montrer qu'une application est linéaire (ou qu'elle ne l'est pas), et qu'un endomorphisme stabilise bien l'espace de départ.
- savoir déterminer le noyau (système homogène) et l'image (image d'une famille génératrice) d'une application linéaire, et en donner une base.
- savoir caractériser l'injectivité (via $\ker(f)$) et la surjectivité (via $\mathrm{Im}(f)$ ou le rang).

IV. Bilan et compétences attendues

Les compétences attendues sur le chapitre « applications linéaires » sont les suivantes :

- savoir montrer qu'une application est linéaire (ou qu'elle ne l'est pas), et qu'un endomorphisme stabilise bien l'espace de départ.
- savoir déterminer le noyau (système homogène) et l'image (image d'une famille génératrice) d'une application linéaire, et en donner une base.
- savoir caractériser l'injectivité (via $\ker(f)$) et la surjectivité (via $\mathrm{Im}(f)$ ou le rang).
- connaître le théorème du rang et savoir l'utiliser, notamment en dimension égale pour passer de l'injectivité à la bijectivité.

IV. Bilan et compétences attendues

Les compétences attendues sur le chapitre « applications linéaires » sont les suivantes :

- savoir montrer qu'une application est linéaire (ou qu'elle ne l'est pas), et qu'un endomorphisme stabilise bien l'espace de départ.
- savoir déterminer le noyau (système homogène) et l'image (image d'une famille génératrice) d'une application linéaire, et en donner une base.
- savoir caractériser l'injectivité (via $\ker(f)$) et la surjectivité (via $\mathrm{Im}(f)$ ou le rang).
- connaître le théorème du rang et savoir l'utiliser, notamment en dimension égale pour passer de l'injectivité à la bijectivité.
- savoir manipuler les polynômes d'endomorphismes et utiliser un polynôme annulateur pour prouver qu'un endomorphisme est un automorphisme et calculer son inverse.