TD 5 Applications linéaires

I. Exemples d'applications linéaires, noyaux, images

Exercice V.1 – (Le minimum à savoir-faire)

Pour les applications suivantes :

1. Montrer qu'elles sont linéaires.
2. Déterminer une base du noyau. Sont-elles injectives ?
3. Déterminer une base de l'image. Sont-elles surjectives ?

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x-5y. \end{array}$$

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y,3x+y). \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x+y,3x). \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,2y,-x+3y+z). \end{array}$$

$$f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x & 2x \\ 3x-y & -y \end{pmatrix}. \end{array}$$

$$f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{XP}'. \end{array}$$

$$f_7 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & (c,a+d,b-c,d). \end{array}$$

Exercice V.2 – (Pas linéaire !)

Dans chaque cas, justifier que l'application f donnée n'est pas linéaire.

1. $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ et $f : (x,y) \longmapsto (x^2, x+y)$
2. $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ et $f : (x,y,z) \longmapsto (z,y,x+1)$
3. $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M}^2$

Exercice V.3

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 avec $\mathcal{B}_{\mathrm{E}} = (e_1, e_2, e_3)$.

On considère l'endomorphisme g de E défini par :

$$\begin{cases} g(e_1) = 2e_1 + e_2 \\ g(e_2) = e_1 + e_3 \\ g(e_3) = 4e_1 + e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

1. Calculer $g(e_1) + 2g(e_2)$. En déduire que g n'est pas bijectif.
2. Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ avec $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
   Calculer $g(u)$ puis déterminer une base de $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$.

Exercice V.4 – (En dimension infinie)

1. On considère l'ensemble $\mathrm{E} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(0) = 0\}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{XP}'. \end{array}$

   a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

   b. Montrer que $f \in \mathcal{G}l(\mathrm{E})$.

2. On considère $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions d'une variable réelle définies et continues sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{T}: & \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ & f & \longmapsto & \forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

   a. Montrer que T est un endomorphisme injectif de E.

   b. Est-il surjectif ?

Exercice V.5 – ($\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas de dimension finie)

On définit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}. \end{array}$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$.
2. Déterminer $\ker(f)$. f est-elle injective ?
3. Pour tout k entier naturel non nul, déterminer $\ker\left(f^k\right)$.
4. Montrer que f est surjective.
5. En déduire que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas de dimension finie.

Exercice V.6 – (Un isomorphisme remarquable)

Soient a_1, a_2, a_3 trois réels distincts deux à deux.

On considère l'application $\mathrm{T} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \left(\mathrm{P}\left(a_1\right); \mathrm{P}\left(a_2\right); \mathrm{P}\left(a_3\right)\right). \end{array}$

1. Montrer que T est une application linéaire.
2. Montrer que T est injective puis bijective.
3. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, déterminer $\mathrm{T}^{-1}\left(e_i\right)$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

Exercice V.7 – (Avec des polynômes)

On considère l'application L définie sur $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ par :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{L}: & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ & \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{XP}(\mathrm{X}+1) - (\mathrm{X}+1)\mathrm{P}(\mathrm{X}). \end{array}$$

1. Montrer que $\mathrm{L} \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]\right)$.
2. Déterminer $\ker(\mathrm{L})$.

3. Déterminer Im (L).

Exercice V.8 – (Avec des polynômes)

Soit h l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} h : & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ & \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(2\mathrm{X}+1) - \mathrm{XP}'(1-\mathrm{X}). \end{array}$$

1. Montrer que $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}])$.
2. Déterminer ker (h), une base et sa dimension.
3. Déterminer Im (h), une base et sa dimension.
4. h est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$?
5. L'équation $h(\mathrm{P}) = 2\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 3$ d'inconnue P admet-elle des solutions ?

Exercice V.9 – (Avec des suites)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On considère l'ensemble F formé des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

On suppose que $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel réel dont on précisera la dimension.
2. On considère l'application Φ définie par :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1)\,. \end{array}$$

   Montrer que Φ est un isomorphisme.

Exercice V.10 – (Polynôme annulateur d'un endomorphisme)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (x+y, x-y)$.

1. Prouver que $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - 2$ est un polynôme annulateur de f.
2. En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et donner f^{-1}.

Exercice V.11 – (Changement de base)

Considérons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall\, \mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(\mathrm{M}) = \mathrm{AMA}.$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

3. Déterminer le noyau de f. Que peut-on en conclure ?
4. En procédant autrement, démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer, pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'expression de $f^{-1}(\mathrm{M})$ en fonction de M.
5. Soit $\mathrm{E} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}\}$. Montrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.

Exercice V.12 – (Projecteur)

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = f$.

Démontrer que, pour tout $y \in \mathrm{E}$: $y \in \mathrm{Im}\,(f) \iff f(y) = y$.

Exercice V.13 – (Un peu théorique)

Soient E un espace vectoriel réel, f et g deux endomorphismes de E.

1. À propos du noyau :
   a. Montrer que $\ker(f) \subset \ker\left(f^2\right)$.
   b. Démontrer que $\ker(f) = \ker\left(f^2\right) \iff \ker(f) \cap \mathrm{Im}\,(f) = \{0_\mathrm{E}\}$.
2. À propos de l'image :
   a. Montrer que $\mathrm{Im}\left(f^2\right) \subset \mathrm{Im}\,(f)$.
   b. Montrer que $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})} \iff \mathrm{Im}\,(g) \subset \ker(f)$.

Exercice V.14 – (Endomorphisme nilpotent et famille libre particulière)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ où E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que f est nilpotent *i.e.* il existe un entier $p > 1$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

1. Donner un polynôme annulateur de f et montrer que f n'est pas bijective.
2. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$.
   Montrer que $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\right)$ est une famille libre de E.
3. En déduire que $p \leqslant n$.