TD 5 Applications linéaires

I. Exemples d'applications linéaires, noyaux, images

Exercice V.1 – (Le minimum à savoir-faire) [Correction p. 5]

Pour les applications suivantes :

1. Montrer qu'elles sont linéaires.
2. Déterminer une base du noyau. Sont-elles injectives ?
3. Déterminer une base de l'image. Sont-elles surjectives ?

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x-5y. \end{array}$$

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y,3x+y). \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x+y,3x). \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,2y,-x+3y+z). \end{array}$$

$$f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x & 2x \\ 3x-y & -y \end{pmatrix}. \end{array}$$

$$f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{XP}'. \end{array}$$

$$f_7 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & (c,a+d,b-c,d). \end{array}$$

Exercice V.2 – (Pas linéaire !) [Correction p. 10]

Dans chaque cas, justifier que l'application f donnée n'est pas linéaire.

1. $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ et $f : (x,y) \longmapsto (x^2, x+y)$
2. $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ et $f : (x,y,z) \longmapsto (z,y,x+1)$
3. $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M}^2$

Exercice V.3 [Correction p. 10]

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 avec $\mathcal{B}_{\mathrm{E}} = (e_1, e_2, e_3)$.

On considère l'endomorphisme g de E défini par :

$$\begin{cases} g(e_1) = 2e_1 + e_2 \\ g(e_2) = e_1 + e_3 \\ g(e_3) = 4e_1 + e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

1. Calculer $g(e_1) + 2g(e_2)$. En déduire que g n'est pas bijectif.
2. Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ avec $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
   Calculer $g(u)$ puis déterminer une base de $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$.

Exercice V.4 – (En dimension infinie) [Correction p. 11]

1. On considère l'ensemble $\mathrm{E} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(0) = 0\}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{XP}'. \end{array}$

   a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

   b. Montrer que $f \in \mathcal{G}l(\mathrm{E})$.

2. On considère $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions d'une variable réelle définies et continues sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{T}: & \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ & f & \longmapsto & \forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

   a. Montrer que T est un endomorphisme injectif de E.

   b. Est-il surjectif ?

Exercice V.5 – ($\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas de dimension finie) [Correction p. 12]

On définit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}. \end{array}$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$.
2. Déterminer $\ker(f)$. f est-elle injective ?
3. Pour tout k entier naturel non nul, déterminer $\ker\left(f^k\right)$.
4. Montrer que f est surjective.
5. En déduire que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas de dimension finie.

Exercice V.6 – (Un isomorphisme remarquable) [Correction p. 13]

Soient a_1, a_2, a_3 trois réels distincts deux à deux.

On considère l'application $\mathrm{T} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \left(\mathrm{P}\left(a_1\right); \mathrm{P}\left(a_2\right); \mathrm{P}\left(a_3\right)\right). \end{array}$

1. Montrer que T est une application linéaire.
2. Montrer que T est injective puis bijective.
3. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, déterminer $\mathrm{T}^{-1}\left(e_i\right)$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

Exercice V.7 – (Avec des polynômes) [Correction p. 13]

On considère l'application L définie sur $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ par :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{L}: & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ & \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{XP}(\mathrm{X}+1) - (\mathrm{X}+1)\mathrm{P}(\mathrm{X}). \end{array}$$

1. Montrer que $\mathrm{L} \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]\right)$.
2. Déterminer $\ker(\mathrm{L})$.

3. Déterminer Im (L).

Exercice V.8 – (Avec des polynômes) [Correction p. 13]

Soit h l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} h : & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ & \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(2\mathrm{X}+1) - \mathrm{X}\mathrm{P}'(1-\mathrm{X}). \end{array}$$

1. Montrer que $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}])$.
2. Déterminer ker (h), une base et sa dimension.
3. Déterminer Im (h), une base et sa dimension.
4. h est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$?
5. L'équation $h(\mathrm{P}) = 2\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 3$ d'inconnue P admet-elle des solutions ?

Exercice V.9 – (Avec des suites) [Correction p. 14]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On considère l'ensemble F formé des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

On suppose que $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel réel dont on précisera la dimension.
2. On considère l'application Φ définie par :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1)\,. \end{array}$$

   Montrer que Φ est un isomorphisme.

Exercice V.10 – (Polynôme annulateur d'un endomorphisme) [Correction p. 14]

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (x+y, x-y)$.

1. Prouver que $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - 2$ est un polynôme annulateur de f.
2. En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et donner f^{-1}.

Exercice V.11 – (Changement de base) [Correction p. 14]

Considérons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall\, \mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(\mathrm{M}) = \mathrm{AMA}.$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

3. Déterminer le noyau de f. Que peut-on en conclure ?
4. En procédant autrement, démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer, pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'expression de $f^{-1}(\mathrm{M})$ en fonction de M.
5. Soit $\mathrm{E} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}\}$. Montrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.

Exercice V.12 – (Projecteur) [Correction p. 15]

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = f$.

Démontrer que, pour tout $y \in \mathrm{E}$: $y \in \mathrm{Im}\,(f) \iff f(y) = y$.

Exercice V.13 – (Un peu théorique) [Correction p. 16]

Soient E un espace vectoriel réel, f et g deux endomorphismes de E.

1. À propos du noyau :
   a. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.
   b. Démontrer que $\ker(f) = \ker(f^2) \iff \ker(f) \cap \mathrm{Im}\,(f) = \{0_\mathrm{E}\}$.
2. À propos de l'image :
   a. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f^2) \subset \mathrm{Im}\,(f)$.
   b. Montrer que $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})} \iff \mathrm{Im}\,(g) \subset \ker(f)$.

Exercice V.14 – (Endomorphisme nilpotent et famille libre particulière) [Correction p. 16]

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ où E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que f est nilpotent *i.e.* il existe un entier $p > 1$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

1. Donner un polynôme annulateur de f et montrer que f n'est pas bijective.
2. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$.
   Montrer que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille libre de E.
3. En déduire que $p \leqslant n$.

Corrigés

Correction de l'exercice V.1 : [Énoncé]

Attention
Ne pas confondre le vecteur $X \in \mathbb{R}^2$ et sa coordonnée $x \in \mathbb{R}$.

f_1 : 1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $X = (x\,;y) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = (x'\,;y') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f_1(\lambda \cdot X + Y) &= f_1((\lambda x + x'\,;\lambda y + y')) = 2(\lambda x + x') - 5(\lambda y + y') \\ &= \lambda(2x - 5y) + (2x' - 5y') = \lambda f_1((x\,;y)) + f_1((x'\,;y')) \\ &= \lambda \cdot f_1(X) + f_1(Y). \end{aligned}$$

Donc f_1 est linéaire. C'est même une forme linéaire.

2. Soit $X = (x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} X \in \ker(f_1) &\iff f_1(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ &\iff 2x - 5y = 0 \iff \begin{cases} x = x \\ y = \dfrac{2}{5}x \end{cases} \\ &\iff X = y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $\ker(f_1) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ *i.e.* f_1 n'est pas injective.

Remarque
C'est la droite d'équation réduite $y = \dfrac{2}{5}x$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ est non nul, il forme une base de $\ker(f_1)$ qui est donc de dimension 1.

3. On considère $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \text{Im}(f_1) &= \text{Vect}(f_1((1,0)), f_1((0,1))) = \text{Vect}(2,-5) \\ &= \text{Vect}(1) = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Comme 1 est non nul, il forme une base de $\text{Im}(f_1)$ qui est donc de rang 1. C'est la dimension de l'espace d'arrivée donc $\text{Im}(f_1) = \mathbb{R}$ et f_1 est surjective.

Attention
Ne pas confondre le vecteur $X \in \mathbb{R}^2$ et sa coordonnée $x \in \mathbb{R}$.

f_2 : 1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $X = (x\,;y) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = (x'\,;y') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f_2(\lambda \cdot X + Y) &= f_2((\lambda x + x'\,;\lambda y + y')) \\ &= ((\lambda x + x') - (\lambda y + y')\,;3(\lambda x + x') + (\lambda y + y')) \\ &= (\lambda(x - y) + (x' - y')\,;\lambda(3x + y) + (3x' + y')) \\ &= \lambda \cdot (x - y\,;3x + y) + (x' - y'\,;3x' + y') \\ &= \lambda f_2((x\,;y)) + f_2((x'\,;y')) \\ &= \lambda \cdot f_2(X) + f_2(Y). \end{aligned}$$

Donc f_2 est linéaire.

2. Soit $X = (x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} X \in \ker(f_2) &\iff f_2(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ &\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \begin{cases} x - y = 0 \\ 4x \quad = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\iff X = 0_{\mathbb{R}^2}. \end{aligned}$$

Donc $\ker(f_2) = 0_{\mathbb{R}^2}$ *i.e.* f_2 est injective.

3. Avec le théorème du rang, on sait déjà que $\dim(\mathrm{Im}(f_2)) = 2$ *i.e.* f_2 est surjective. Montrons-le à la main.
On considère $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$, la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f_2) &= \mathrm{Vect}\left(f_2((1,0)), f_2((0,1))\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)\\ &\underset{e_2'=e_2+e_1}{=} \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}\right) \underset{e_2'=\frac{1}{4}e_2}{=} \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\\ &\underset{e_1'=e_1-3e_2}{=} \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Les deux vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ étant non colinéaires, ils forment une base de $\mathrm{Im}(f_2)$ qui est donc de rang 2. C'est la dimension de l'espace d'arrivée donc $\mathrm{Im}(f_2) = \mathbb{R}^2$ et f_2 est surjective.

Attention
Ne pas confondre le vecteur $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^2$ et sa coordonnée $x \in \mathbb{R}$.

f_3 : 1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{X} = (x\,;y) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Y} = (x'\,;y') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}f_3(\lambda\cdot\mathrm{X}+\mathrm{Y}) &= f_3((\lambda x+x'\,;\lambda y+y'))\\ &= (\lambda y+y'\,;\lambda x+x'+\lambda y+y'\,;3(\lambda x+x'))\\ &= (\lambda y+y'\,;\lambda(x+y)+x'+y'\,;\lambda\times 3x+3x'))\\ &= \lambda\cdot(y\,;x+y\,;3x)+(y'\,;x'+y'\,;3y')\\ &= \lambda f_3((x\,;y))+f_3((x'\,;y'))\\ &= \lambda\cdot f_3(\mathrm{X})+f_3(\mathrm{Y}).\end{aligned}$$

Donc f_3 est linéaire.

2. Soit $\mathrm{X} = (x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\mathrm{X} \in \ker(f_3) &\iff f_3(\mathrm{X}) = 0_{\mathbb{R}^3}\\ &\iff \begin{cases} y = 0\\ x+y = 0\\ 3x = 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\\ &\iff \mathrm{X} = 0_{\mathbb{R}^2}.\end{aligned}$$

Donc $\ker(f_3) = 0_{\mathbb{R}^2}$ *i.e.* f_3 est injective.

3. Avec le théorème du rang, on sait déjà que $\dim(\mathrm{Im}(f_3)) = 2$ *i.e.* f_3 n'est pas surjective. Montrons-le à la main.
On considère $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$, la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$\mathrm{Im}(f_3) = \mathrm{Vect}\left(f_3((1,0)), f_3((0,1))\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

Les deux vecteurs $\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ étant non colinéaires, ils forment une base de $\mathrm{Im}(f_3)$ qui est donc de rang 2.

Attention
Ne pas confondre le vecteur $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^3$ et sa coordonnée $x \in \mathbb{R}$.

f_4 : 1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{X} = (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Y} = (x'\,;y'\,;z') \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} f_4(\lambda \cdot \mathrm{X} + \mathrm{Y}) &= f_4((\lambda x + x'\,;\lambda y + y'\,;\lambda z + z')) \\ &= (\lambda x + x'\,;2(\lambda x + x')\,;-(\lambda x + x') + 3(\lambda y + y') + (\lambda z + z')) \\ &= (\lambda x + x'\,;\lambda \times 2x + 2x'\,;\lambda(-x + 3y + z) - x' + 3y' + z') \\ &= \lambda \cdot (x\,;2x\,;-x + 3y + z) + (x'\,;2x'\,;-x' + 3y' + z') \\ &= \lambda f_4((x\,;y\,;z)) + f_4((x'\,;y'\,;z')) \\ &= \lambda \cdot f_4(\mathrm{X}) + f_4(\mathrm{Y}). \end{aligned}$$

Donc f_4 est linéaire.

2. Soit $\mathrm{X} = (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \mathrm{X} \in \ker(f_4) &\iff f_4(\mathrm{X}) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff \begin{cases} x & = 0 \\ 2y & = 0 \\ -x + 3y + z & = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ &\iff \mathrm{X} = 0_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned}$$

Donc $\ker(f_4) = 0_{\mathbb{R}^3}$ *i.e.* f_4 est injective.

3. Avec le théorème du rang, on sait déjà que $\dim(\mathrm{Im}(f_4)) = 3$ *i.e.* f_4 est surjective. Montrons-le à la main.

On considère $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\,;\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\,;\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f_4) &= \mathrm{Vect}(f_4((1\,;0\,;0))\,,f_4((0\,;1\,;0))\,,f_4((0\,;0\,;1))) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\,,\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\,,\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

La matrice de ces trois vecteurs est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux non nuls donc elle est inversible *i.e.* les trois vecteurs sont libres. Ils forment une base de $\mathrm{Im}(f_4)$ qui est donc de rang 3. C'est la dimension de l'espace d'arrivée donc $\mathrm{Im}(f_4) = \mathbb{R}^3$ et f_4 est surjective.

f_5 : 1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{X} = (x\,;y) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Y} = (x'\,;y') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f_5(\lambda \cdot \mathrm{X} + \mathrm{Y}) &= f_5((\lambda x + x'\,;\lambda y + y')) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x + x' & 2(\lambda x + x') \\ 3(\lambda x + x') - (\lambda y + y') & -(\lambda y + y') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x + x' & \lambda \times 2x + 2x' \\ \lambda(3x - y) + 3x' - y' & -\lambda y - y' \end{pmatrix} \\ &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} x & 2x \\ 3x - y & -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & 2x' \\ 3x' - y' & -y' \end{pmatrix} \\ &= \lambda f_5((x\,;y)) + f_5((x'\,;y')) \\ &= \lambda \cdot f_5(\mathrm{X}) + f_5(\mathrm{Y}). \end{aligned}$$

Donc f_5 est linéaire.

2. Soit $\mathrm{X} = (x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\mathrm{X} \in \ker(f_5) &\iff f_5(\mathrm{X}) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\\ &\iff \begin{pmatrix} x & 2x \\ 3x-y & -y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{cases} x &= 0\\ 2x &= 0\\ 3x-y &= 0\\ -y &= 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\\ &\iff \mathrm{X} = 0_{\mathbb{R}^2}.\end{aligned}$$

Donc $\ker(f_5) = 0_{\mathbb{R}^2}$ *i.e.* f_5 est injective.

3. Avec le théorème du rang, on sait déjà que $\dim(\mathrm{Im}(f_5)) = 2 \neq 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$ *i.e.* f_5 n'est pas surjective. Montrons-le à la main.
On considère $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$, la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f_5) &= \mathrm{Vect}\left(f_5((1\,;0)), f_5((0\,;1))\right)\\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\-1&-1\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Les deux vecteurs $\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&0\\-1&-1\end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne sont pas colinéaires donc ils sont libres et forment une base de $\mathrm{Im}(f_5)$ et $\dim(\mathrm{Im}(f_5)) = 2 \neq \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$. L'application f_5 n'est pas surjective.

$\mathbf{f_6}$: 1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

$$\begin{aligned}f_6(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q}) &= \mathrm{X}(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})' = \mathrm{X}(\lambda\mathrm{P}'+\mathrm{Q}')\\ &= \lambda\mathrm{X}\mathrm{P}' + \mathrm{X}\mathrm{Q}' = \lambda f_6(\mathrm{P}) + f_6(\mathrm{Q}).\end{aligned}$$

Donc f_6 est linéaire.

2. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

$$\mathrm{P} \in \ker(f_6) \iff \mathrm{X}\mathrm{P}' = 0_{\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]} \iff \mathrm{P}' = 0_{\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]} \iff \mathrm{P} \in \mathbb{R}_0[\mathrm{X}].$$

Donc $\ker(f_6) \neq 0_{\mathbb{R}[\mathrm{X}]}$ *i.e.* f_6 n'est pas injective et $\dim(\ker(f_6)) = 1$.

3. Avec le théorème du rang, on sait déjà que $\dim(\mathrm{Im}(f_6)) = 3-1 = 2 \neq \dim(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}])$ *i.e.* f_6 n'est pas surjective. Montrons-le à la main.
On considère $\mathcal{B} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$, la base canonique de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

$$\mathrm{Im}(f_6) = \mathrm{Vect}(f_6(1), f_6(\mathrm{X}), f_6(\mathrm{X}^2)) = \mathrm{Vect}(0, \mathrm{X}, 2\mathrm{X}^2) = \mathrm{Vect}(\mathrm{X}, \mathrm{X}^2).$$

Les deux vecteurs X et X^2 ne sont pas colinéaires donc ils sont libres et forment une base de $\mathrm{Im}(f_6)$ et $\dim(\mathrm{Im}(f_6)) = 2 \neq \dim(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]) = 3$. L'application f_6 n'est pas surjective.

f_7 : 1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} f_7(\lambda \mathrm{A} + \mathrm{A}') &= f_7\left(\begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda c + c' & \lambda d + d' \end{pmatrix}\right) \\ &= (\lambda c + c', \lambda a + a' + \lambda d + d', \lambda b + b' - \lambda c - c', \lambda d + d') \\ &= (\lambda c + c', \lambda(a+d) + a' + d', \lambda(b-c) + b' - c', \lambda d + d') \\ &= \lambda(c, a+d, b-c, d) + (c', a'+d', b'-c', d') \\ &= \lambda f_7(\mathrm{A}) + f_7(\mathrm{A}'). \end{aligned}$$

Donc f_7 est linéaire.

2. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \mathrm{A} \in \ker(f_7) &\iff f_7(\mathrm{A}) = 0_{\mathbb{R}^4} \\ &\iff (c, a+d, b-c, d) = (0,0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} c = 0 \\ a + d = 0 \\ b - c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \\ &\iff \mathrm{A} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Donc $\ker(f_7) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ *i.e.* f_7 est injective.

3. Avec le théorème du rang, on sait déjà que $\dim(\mathrm{Im}(f_7)) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ *i.e.* f_7 est surjective. Montrons-le à la main.

On considère $\mathcal{B} = \left\{ \mathrm{E}_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{E}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{E}_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{E}_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f_7) &= \mathrm{Vect}\left(f_7(\mathrm{E}_{1,1}), f_7(\mathrm{E}_{1,2}), f_7(\mathrm{E}_{2,1}), f_7(\mathrm{E}_{2,2})\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &\underset{\substack{e_3' = e_3 + e_2 \\ e_4' = e_4 - e_1}}{=} \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

La matrice des 4 vecteurs est clairement inversible donc ils forment une base de $\mathrm{Im}(f_7)$ et $\dim(\mathrm{Im}(f_7)) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$. L'application f_7 est surjective.

Remarque
C'est donc un isomorphisme.

Correction de l'exercice V.2 : [Énoncé]

Remarque
$f(0_E) = 0_F$ n'est qu'une condition nécessaire pour que f soit linéaire. Elle n'est pas suffisante.

1. Soient $x, x' \in (\mathbb{R}^*)^2$.

$$\begin{aligned} f((x,0)+(x',0)) = f((x+x',0)) &= ((x+x')^2, x+x') = (x^2,x)+(x'^2,x')+2(xx',0) \\ &= f((x,0))+f((x',0))+2(xx',0). \end{aligned}$$

Comme $xx' \neq 0$, $f((x,0)+(x',0)) \neq f((x,0))+f((x',0))$ et f n'est pas linéaire.

2. $f(0,0,0) = (0,0,1) \neq (0,0,0)$ donc f ne peut être linéaire.

3. On sait depuis longtemps que le carré n'est pas linéaire.
Par exemple, soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle,

$$f(\mathrm{M}+\mathrm{I}_n) = (\mathrm{M}+\mathrm{I}_n)^2 = \mathrm{M}^2+2\mathrm{M}+\mathrm{I}_n \neq f(\mathrm{M})+f(\mathrm{I}_n) = \mathrm{M}^2+\mathrm{I}_n.$$

Donc f n'est pas linéaire.

Correction de l'exercice V.3 : [Énoncé]

1. $\begin{aligned} g(e_1)+2g(e_2) &= 2e_1+e_2+2(e_1+e_3) \\ &= 4e_1+e_2+2e_3 = g(e_3). \end{aligned}$
Donc $g(e_3) = g(e_1)+2g(e_2) \in \mathrm{Vect}(g(e_1), g(e_2))$.
On a alors $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(g(e_1), g(e_2), g(e_3)) = \mathrm{Vect}(g(e_1), g(e_2))$ *i.e.* $\dim(\mathrm{Im}(g)) < 3 = \dim(\mathrm{E})$ donc $\mathrm{Im}(g) \neq \mathrm{E}$, g n'est pas surjectif donc pas bijectif.

2. On utilise la linéarité de g :

$$\begin{aligned} g(u) &= g(xe_1+ye_2+ze_3) \\ &= xg(e_1)+yg(e_2)+zg(e_3) \\ &= x(2e_1+e_2)+y(e_1+e_3)+z(4e_1+e_2+2e_3) \\ &= (2x+y+4z)e_1+(x+z)e_2+(y+2z)e_3. \end{aligned}$$

Soit $u = (x\,;y\,;z) \in \ker(g)$. Comme (e_1,e_2,e_3) est une base de E, par liberté on a :

$$\begin{aligned} g(u) = 0_E &\iff (2x+y+4z)e_1+(x+z)e_2+(y+2z)e_3 = 0_E \\ &\iff \begin{cases} 2x+y+4z=0 \\ x+z=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \\ &\underset{L_1 \leftarrow L_1-2L_2-L_3}{\iff} \begin{cases} 0=0 \\ x=-z \\ y=-2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x=-z \\ y=-2z \\ z=z \end{cases} \\ &\iff u = z\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $\ker(g) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Comme le vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul, il est libre et forme une base de $\ker(g) = \mathrm{Vect}(u_1)$.

Enfin, $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Vect}(g(e_1), g(e_2))$
$= \operatorname{Vect}(2e_1 + e_2, e_1 + e_3)$
$= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$

Les deux vecteurs étant non colinéaires, ils sont libres et forment donc une base de $\operatorname{Im}(g)$.

Méthode
On en profite pour vérifier le théorème du rang : $\dim(\ker(g)) + \dim(\operatorname{Im}(g)) = \dim(\mathrm{E})$.

Correction de l'exercice V.4 : [Énoncé]

1. a.

Rappel
Un sev est un sous-espace non vide d'un espace vectoriel stable par combinaisons linéaires.

— Par définition, $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ qui est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

— Le polynôme nul appartient clairement à E donc $\mathrm{E} \neq \varnothing$.

— Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{E}$. On a :

$$\begin{aligned}(\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q})(0) &= \lambda\mathrm{P}(0) + \mathrm{Q}(0) && \text{(lois de } \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\text{)}\\ &= 0 + 0 && (\mathrm{P} \text{ et } \mathrm{Q} \text{ sont éléments de } \mathrm{E})\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q} \in \mathrm{E}$ qui est stable par combinaisons linéaires.

Donc E est un sev de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

b. On a déjà montré que f était linéaire dans un autre exercice.

— Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$. $f(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et $f(\mathrm{P})(0) = (\mathrm{XP}')(0) = 0$ donc $f(\mathrm{P}) \in \mathrm{E}$. L'application linéaire f est donc bien définie.

Attention
On ne peut pas utiliser le théorème du rang en dimension infinie.

— Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$.

$$\mathrm{P} \in \ker(f) \iff f(\mathrm{P}) = 0_{\mathrm{E}} \iff \mathrm{XP}' = 0_{\mathrm{E}} \iff \mathrm{P}' = 0_{\mathrm{E}}.$$

Donc P est un polynôme constant vérifiant $\mathrm{P}(0) = 0$. C'est le polynôme nul et $\ker(f) = 0_{\mathrm{E}}$ *i.e.* f est injectif.

— Soit $\mathrm{Q} = \sum_{k=1}^{d} b_k \mathrm{X}^k \in \mathrm{E}$.

Remarque
$\mathrm{Q}(0) = 0 \implies b_0 = 0$

Cherchons s'il existe un antécédent $\mathrm{P} = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathrm{E}$ de Q par f :

$$\begin{aligned}f(\mathrm{P}) = \mathrm{Q} &\iff \mathrm{X}\sum_{k=1}^{n} k a_k \mathrm{X}^{k-1} = \sum_{k=1}^{d} b_k \mathrm{X}^k\\ &\iff \sum_{k=1}^{n} k a_k \mathrm{X}^k = \sum_{k=1}^{d} b_k \mathrm{X}^k && \text{(en particulier } n = d\text{)}\\ &\iff \forall\, k \in [\![1\,;d]\!]\,,\ a_k = \frac{1}{k} b_k.\end{aligned}$$

Le polynôme P de E défini par $\mathrm{P} = \sum_{k=1}^{d} \frac{b_k}{k} \mathrm{X}^k$ est un antécédent de Q par f qui est donc surjectif.

Remarque
Il est même unique donc f est bijectif.

En conclusion, f est un endomorphisme de E injectif et surjectif donc bijectif. C'est un automorphisme de E :

$$f \in \mathcal{G}l(\mathrm{E}).$$

2. a. — Comme f et $t \longmapsto e^{-t^2}$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, leur produit l'est aussi et, d'après le théorème fondamental de l'analyse, F est une fonction au moins continue sur $\mathbb{R}$ *i.e.* $\mathrm{F} \in \mathrm{E}$ et T est correctement défini.

— Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathrm{E}$.

$$\mathrm{T}(\lambda f + g) = \int_0^x (\lambda f + g)(t) e^{-t^2} \,\mathrm{d}t = \lambda \mathrm{T}(f) + \mathrm{T}(g).$$

Donc T est linéaire et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

— Soit $f \in \mathrm{E}$.

$$f \in \ker(\mathrm{T}) \iff \mathrm{T}(f) = 0_{\mathrm{E}} \iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ \int_0^x f(t) e^{-t^2} \,\mathrm{d}t = 0 \iff f(x) e^{-x^2} = 0$$
$$\iff f(x) = 0 \quad \text{car } \forall\, x \in \mathbb{R},\ e^{-x^2} \neq 0 \iff f = 0_{\mathrm{E}}.$$

Donc $\ker(\mathrm{T}) = 0_{\mathrm{E}}$ et T est injectif.

b. Montrons que T n'est pas surjectif *i.e.* trouvons une fonction de E qui n'admet pas d'antécédent par T.
D'après le théorème fondamental de l'analyse, $\mathrm{T}(f)$ est dérivable pour toute fonction de E.
Or, $x \longmapsto |x| \in \mathrm{E}$ mais n'est pas dérivable donc n'est pas dans $\mathrm{Im}(\mathrm{T})$.
Conclusion, $x \longmapsto |x| \in \mathrm{E}$ n'admet pas d'antécédent par T qui n'est pas surjectif.

Correction de l'exercice V.5 : [Énoncé]

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$$f\left(\lambda (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \left((\lambda u + v)_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda \left(u_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} + \left(v_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda f\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) + f\left((v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

Donc f est linéaire.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ker(f) \iff \left(u_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \iff \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 0_{\mathbb{R}} \iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda, 0, 0, ...),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Donc, $\ker(f) = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall\, n \geqslant 1, u_n = 0\right\}$ *i.e.* toute suite nulle à partir du rang 1 a pour image la suite nulle par f.
L'application f n'est pas injective.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Une récurrence rapide montre que

$$\begin{array}{rccc} f^k : & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}. \end{array}$$

Le même raisonnement qu'à la question précédente montre que :

$$\ker\left(f^k\right) = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall\, n \geqslant k, u_n = 0\right\}.$$

4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Posons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = v_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, v_0, v_1, v_2, ...)$ est une suite réelle et

$$f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Ainsi tout élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ admet un antécédent, donc f est surjective.

5. Si $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ était de dimension finie, le théorème du rang impliquerait que l'endomorphisme f surjectif soit injectif, ce qui contredirait la question 2.
Conclusion, l'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas de dimension finie.

Correction de l'exercice V.6 : [Énoncé]

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

$$\begin{aligned}\mathrm{T}(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q}) &= ((\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})(a_1);(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})(a_2);(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})(a_3))\\ &= \lambda(\mathrm{P}(a_1);\mathrm{P}(a_2);\mathrm{P}(a_3)) + (\mathrm{Q}(a_1);\mathrm{Q}(a_2);\mathrm{Q}(a_3)) = \lambda\mathrm{T}(\mathrm{P}) + \mathrm{T}(\mathrm{Q}).\end{aligned}$$

   Donc $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}], \mathbb{R}^3)$.

2. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

$$\mathrm{P} \in \ker(\mathrm{T}) \iff \mathrm{T}(\mathrm{P}) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \mathrm{P}(a_1) = \mathrm{P}(a_2) = \mathrm{P}(a_3) = 0$$

   Le polynôme P de degré 2 admet donc 3 racines distinctes. C'est le polynôme nul : $\mathrm{P} = 0_{\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]}$ et T est injectif.
   Comme $\dim(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, d'après le théorème du rang, T est également surjectif donc bijectif. C'est un isomorphisme.

3. Posons, pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $\mathrm{P}_i = \mathrm{T}^{-1}(e_i) \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *i.e.* l'unique polynôme de degré 2 tel que $\mathrm{P}_i(a_i) = 1$ et $\mathrm{P}_i(a_{j\neq i}) = 0$.
   On trouve :

$$\mathrm{P}_1 = \frac{(\mathrm{X}-a_2)(\mathrm{X}-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}, \quad \mathrm{P}_2 = \frac{(\mathrm{X}-a_3)(\mathrm{X}-a_1)}{(a_2-a_3)(a_2-a_1)} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_3 = \frac{(\mathrm{X}-a_1)(\mathrm{X}-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}.$$

   La base $(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ s'appelle la base de Lagrange de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

Correction de l'exercice V.7 : [Énoncé]

1. Soit $\mathrm{P} = ax^2 + b\mathrm{X} + c \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

$$\mathrm{L}(\mathrm{P}) = \mathrm{X}(a(\mathrm{X}+1)^2 + b(\mathrm{X}+1) + c) - (\mathrm{X}+1)(a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c) = a\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} - c.$$

   Ainsi, pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, on a $\mathrm{L}(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. L'application est donc bien définie et linéaire.

2. Soit $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

$$\mathrm{P} \in \ker(\mathrm{L}) \iff a\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} - c = 0 \iff \begin{cases} a = 0, \\ c = 0 \end{cases} \iff \mathrm{P} = b\mathrm{X}.$$

   Donc $\ker(\mathrm{L}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{X})$ et $\dim(\ker(\mathrm{L})) = 1$. L'application L n'est pas injective.

3. D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(\mathrm{L})) = \dim(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]) - \dim(\ker(\mathrm{L})) = 3 - 1 = 2$.

$$\mathrm{Im}(\mathrm{L}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{L}(1), \mathrm{L}(\mathrm{X}), \mathrm{L}(\mathrm{X}^2)) = \mathrm{Vect}(-1, 0, \mathrm{X}+\mathrm{X}^2) = \mathrm{Vect}(1, \mathrm{X}+\mathrm{X}^2).$$

   Les deux polynômes 1 et $\mathrm{X}+\mathrm{X}^2$ forment une base de $\mathrm{Im}(\mathrm{L})$. L'application n'est pas surjective.

Correction de l'exercice V.8 : [Énoncé]

1. Linéarité démontrée par calcul direct.

2. Soit $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. $h(\mathrm{P}) = 6a\mathrm{X}^2 + (2a+b)\mathrm{X} + (a+b+c)$.

$$\mathrm{P} \in \ker(h) \iff 6a = 0,\ 2a+b = 0,\ a+b+c = 0 \iff a = b = c = 0.$$

   Donc $\ker(h) = 0_{\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]}$ et h est injective.

3. Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(h)) = 3$, donc $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ (surjective).

4. h est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

5. En identifiant les coefficients de $h(\mathrm{P}) = 2\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 3$, on trouve l'unique solution :

$$\mathrm{P} = \frac{1}{3}\mathrm{X}^2 - \frac{5}{3}\mathrm{X} + \frac{13}{3}.$$

Correction de l'exercice V.9 : [Énoncé]

1. F est l'ensemble des suites récurrentes linéaires d'ordre deux d'équation caractéristique $x^2 - x - 2 = 0$ (racines -1 et 2).
   Elles sont de la forme générale $u_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$.
   Ainsi, $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\left(\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$. Ces deux suites forment une base de F, donc F est un espace vectoriel de dimension 2.

2. L'application Φ est clairement linéaire par propriété des suites.
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ker(\Phi)$. Alors $(u_0, u_1) = (0, 0)$.
   Par récurrence linéaire d'ordre deux, tous les termes suivants de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont nuls, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0_{\mathrm{F}}$.
   Ainsi $\ker(\Phi) = 0_{\mathrm{F}}$ et Φ est injective. Comme $\dim(\mathrm{F}) = \dim(\mathbb{R})^2 = 2$, le théorème du rang (ou l'égalité des dimensions en dimension finie) garantit que Φ est bijective, c'est donc un isomorphisme.

Correction de l'exercice V.10 : [Énoncé]

1. Calculons f^2 :

$$\begin{aligned}\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ f^2(x\,;y) &= f\left(f(x\,;y)\right)\\ &= f\left(\left(\underbrace{x+y}_{\mathrm{X}}\,;\underbrace{x-y}_{\mathrm{Y}}\right)\right)\\ &= (\mathrm{X}+\mathrm{Y}\,;\mathrm{X}-\mathrm{Y}) = (x+y+x-y\,;x+y-(x-y))\\ &= (2x\,;2y)\,.\end{aligned}$$

   Soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(f)(x\,;y) &= f^2(x\,;y) - 2(x\,;y)\\ &= (2x\,;2y) - 2(x\,;y)\\ &= (0\,;0) = 0_{\mathbb{R}^2}.\end{aligned}$$

   Donc $\mathrm{P}(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$ *i.e.* P est un polynôme annulateur de f.

2. Il suffit de factoriser :

$$f^2 - 2\mathrm{I}_{\mathbb{R}^2} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)} \iff f\circ\left(\frac{1}{2}f\right) = \left(\frac{1}{2}f\right)\circ f = \mathrm{I}_{\mathbb{R}^2}.$$

   On a donc trouvé une application linéaire $g = \frac{1}{2}f$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $f\circ g = g\circ f = \mathrm{I}_{\mathbb{R}^2}$ donc f est inversible d'inverse $f^{-1} = \frac{1}{2}f$ *i.e.* f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Attention
Ne pas employer la notation f^{-1} avant d'avoir prouver que f était inversible.

Correction de l'exercice V.11 : [Énoncé]

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{M}, \mathrm{M}' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Par distributivité du produit matriciel, on a :

$$\begin{aligned}f(\lambda\mathrm{M}+\mathrm{M}') &= \mathrm{A}(\lambda\mathrm{M}+\mathrm{M}')\mathrm{A}\\ &= \lambda\mathrm{AMA} + \mathrm{AM}'\mathrm{A}\\ &= \lambda f(\mathrm{M}) + f(\mathrm{M}').\end{aligned}$$

   Donc f est une application linéaire. C'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Après calcul, on trouve $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_2$ *i.e.* A est inversible d'inverse $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}$.

3. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in \ker(f) &\iff \mathrm{AMA} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \\ &\iff \mathrm{AM} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} && \text{(car A est inversible)} \\ &\iff \mathrm{M} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} && \text{(car A est inversible).} \end{aligned}$$

Donc $\ker(f) = \left\{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$ et f est injective donc bijective.
C'est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. Posons $\mathrm{N} = f(\mathrm{M}) = \mathrm{AMA}$.
Comme A est inversible, en composant par A^{-1} à gauche, on obtient :

$$\mathrm{A}^{-1}\mathrm{N} = \mathrm{MA}.$$

Puis, à droite,

$$\mathrm{A}^{-1}\mathrm{NA}^{-1} = \mathrm{M}.$$

En se rappelant que $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}$, $\mathrm{M} = \mathrm{ANA}$ *i.e.* $f^{-1}(\mathrm{N}) = \mathrm{ANA}$.
On retrouve $f = f^{-1}$ et f est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5. Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} f(\mathrm{M}) = \mathrm{M} &\iff \mathrm{AMA} = \mathrm{M} \\ &\iff \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a = d \\ b = c \end{cases} \\ &\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. En particulier, E est un espace vectoriel, sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont libres donc ils forment une base de E qui est de dimension 2.

Correction de l'exercice V.12 : [Énoncé]

Démonstration par double implication :

$\Longrightarrow$ Supposons que $y \in \mathrm{Im}(f)$. Par définition, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$.
En appliquant f à cette égalité et en utilisant l'hypothèse $f^2 = f$, on obtient :

$$f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = f(x) = y.$$

$\Longleftarrow$ Supposons que $f(y) = y$. On cherche un antécédent $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$.
Il suffit de choisir $x = y$ (puisque $f(y) = y$). P
ar conséquent, $y \in \mathrm{Im}(f)$.

Ainsi, $y \in \mathrm{Im}(f) \iff f(y) = y$.

Correction de l'exercice V.13 : [Énoncé]

1. a. Soit $x \in \ker(f)$. Alors $f(x) = 0_{\mathrm{E}}$. On calcule $f^2(x) = f(f(x)) = f(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{E}}$ (par linéarité de f). Donc $x \in \ker(f)^2$. Ainsi, $\ker(f) \subset \ker(f)^2$.

   b. Par double implication :

   $\Longrightarrow$ Supposons $\ker(f) = \ker(f)^2$. Soit $z \in \ker(f) \cap \operatorname{Im} f$.
   Puisque $z \in \operatorname{Im} f$, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $z = f(x)$.
   Puisque $z \in \ker(f)$, on a $f(z) = 0_{\mathrm{E}}$, c'est-à-dire $f(f(x)) = f^2(x) = 0_{\mathrm{E}}$.
   Par conséquent, $x \in \ker(f)^2$. Par hypothèse, $x \in \ker(f)$, ce qui implique $f(x) = 0_{\mathrm{E}}$, soit $z = 0_{\mathrm{E}}$.
   Ainsi, $\ker(f) \cap \operatorname{Im} f = \{0_{\mathrm{E}}\}$.

   $\Longleftarrow$ Supposons $\ker(f) \cap \operatorname{Im} f = \{0_{\mathrm{E}}\}$. On sait déjà que $\ker(f) \subset \ker(f)^2$. Montrons l'inclusion réciproque.
   Soit $x \in \ker(f)^2$. Alors $f^2(x) = f(f(x)) = 0_{\mathrm{E}}$, ce qui signifie que $f(x) \in \ker(f)$. De plus, par définition de l'image, $f(x) \in \operatorname{Im} f$.
   Ainsi, $f(x) \in \ker(f) \cap \operatorname{Im} f = \{0_{\mathrm{E}}\}$, d'où $f(x) = 0_{\mathrm{E}}$. Cela prouve que $x \in \ker(f)$, et donc $\ker(f)^2 \subset \ker(f)$.

2. a. Soit $y \in \operatorname{Im} f^2$.
   Par définition, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f^2(x) = f(f(x))$.
   En posant $z = f(x) \in \mathrm{E}$, on a $y = f(z)$, ce qui signifie que $y \in \operatorname{Im} f$. Donc $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.

   b. Par double implication :

   $\Longrightarrow$ Supposons $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$. Soit $y \in \operatorname{Im} g$. Il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = g(x)$.
   Alors $f(y) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) = 0_{\mathrm{E}}(x) = 0_{\mathrm{E}}$, donc $y \in \ker(f)$. Ainsi, $\operatorname{Im} g \subset \ker(f)$.

   $\Longleftarrow$ Supposons $\operatorname{Im} g \subset \ker(f)$. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a $g(x) \in \operatorname{Im} g \subset \ker(f)$, ce qui implique $f(g(x)) = 0_{\mathrm{E}}$.
   Autrement dit, $(f \circ g)(x) = 0_{\mathrm{E}}$ pour tout $x \in \mathrm{E}$, soit $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

Correction de l'exercice V.14 : [Énoncé]

1. Par définition, $f^p = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$, donc le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^p$ est un polynôme annulateur de f.
   Puisque $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$, il existe un vecteur $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_{\mathrm{E}}$.
   En appliquant f à ce vecteur, on obtient $f(f^{p-1}(x_0)) = f^p(x_0) = 0_{\mathrm{E}}(x_0) = 0_{\mathrm{E}}$.
   Ainsi, le vecteur nul 0_{E} admet au moins deux antécédents distincts par f (qui sont 0_{E} et $f^{p-1}(x_0)$), ce qui prouve que f n'est pas injective, et donc pas bijective.

2. Soient des scalaires $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ tels que :
   $$a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + a_2 f^2(x_0) + \cdots + a_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0_{\mathrm{E}}.$$
   Appliquons l'endomorphisme f^{p-1} à cette combinaison linéaire. Par linéarité :
   $$a_0 f^{p-1}(x_0) + a_1 f^p(x_0) + a_2 f^{p+1}(x_0) + \cdots + a_{p-1} f^{2p-2}(x_0) = 0_{\mathrm{E}}.$$
   Puisque f est nilpotente d'indice p, toutes les puissances supérieures ou égales à p sont nulles ($f^p = f^{p+1} = \cdots = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$). L'équation se simplifie donc en :
   $$a_0 f^{p-1}(x_0) = 0_{\mathrm{E}}.$$
   Comme $f^{p-1}(x_0) \neq 0_{\mathrm{E}}$, on en déduit nécessairement que $a_0 = 0$.
   La relation initiale devient alors :
   $$a_1 f(x_0) + a_2 f^2(x_0) + \cdots + a_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0_{\mathrm{E}}.$$

En composant cette fois par f^{p-2} (et en remarquant que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$ et $f^p = 0$), on obtient de même $a_1 = 0$.

En répétant cette démarche par compositions successives (par f^{p-3}, f^{p-4}, ..., jusqu'à $f^0 = \mathrm{I}_d$), on démontre de proche en proche que :

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{p-1} = 0.$$

La famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est donc une famille libre.

3. La famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre dans l'espace vectoriel E de dimension finie n.
Or, toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension n ne peut comporter plus de n vecteurs. Le cardinal de cette famille étant p, on en conclut que $p \leqslant n$.