VII

Matrices et Applications linéaires en dimension finie

Dans le chapitre précédent, on a étudié les applications linéaires de manière abstraite : noyau, image, rang, théorème du rang…

On sait aussi que les matrices permettent de calculer efficacement : résoudre un système, inverser, multiplier…

Le but de ce chapitre est de réunir ces deux mondes : *une fois des bases choisies, une application linéaire devient une matrice*, et tout ce que l'on sait faire sur les matrices se traduit en information sur l'application.

Au programme :

— Comment *fabriquer la matrice* d'un vecteur, d'une famille, d'une application linéaire.

— Comment *lire* sur la matrice le noyau, l'image, le rang, l'inversibilité.

— Que devient la matrice lorsque l'on *change de base* ? (Premier pas vers la diagonalisation…)

Plan du chapitre

I Matrices et applications linéaires **2**
- I.1 Matrice associée à un vecteur et à une famille 2
- I.2 Représentation matricielle d'une application linéaire 4
- I.3 Composition, Isomorphismes et Inversion 7

II Noyau, Image et Rang d'une matrice **8**

III Changement de bases et matrices semblables **11**
- III.1 Matrice de passage et changement de coordonnées 11
- III.2 Changement de base pour un endomorphisme et matrices semblables 12

IV Bilan et savoir-faire exigibles en ECG2 ..... **14**

Index **15**

Dans tout ce chapitre, les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

Pour bien démarrer...

1. Produit d'une matrice par une colonne.

   Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   Calculer AX.

   $$AX = \begin{pmatrix} 2x + 5y - 2z \\ -x + 2y + 3z \end{pmatrix}.$$

2. Coordonnées dans une base.

   Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

   Que signifie : « x a pour coordonnées $(1, -2, 3)$ dans $\mathcal{B}$ » ? Quelle est la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$?

   $$x = 1 \cdot e_1 - 2 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

I. Matrices et applications linéaires

Dans la suite, E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie p et n dont on a fixé des bases respectives $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

I.1 – Matrice associée à un vecteur et à une famille

Définition 1 – Matrice d'un vecteur et d'une famille :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

— Pour $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in E$, la *matrice de x dans la base $\mathcal{B}$* est le vecteur colonne :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Attention
Les coordonnées et la matrice dépendent strictement de la base $\mathcal{B}$ choisie.

— Pour une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p) \in \mathrm{E}^p$, la *matrice de la famille dans la base* $\mathcal{B}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont la j-ième colonne est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \iff \forall j \in [\![1,p]\!],\ u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

Proposition 1 – Détermination d'une application linéaire par une base :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_p)$ une famille de F.

Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ telle que :

$$\forall j \in [\![1,p]\!], \quad u(e_j) = f_j$$

À retenir
Une application linéaire est entièrement et uniquement déterminée par l'image d'une base.

Exemple 1 – Matrices d'une famille de polynômes :

— Dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$, les polynômes $\mathrm{P} = 1 + 2\mathrm{X} + 3\mathrm{X}^2$ et $\mathrm{Q} = 4 + 3\mathrm{X} + 2\mathrm{X}^2$ ont pour représentation matricielle dans cette base :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme les deux vecteurs colonnes ne sont pas proportionnels alors ils sont libres et

$$\mathrm{rg}\,(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = 2.$$

— Dans la base $\mathcal{B}_1 = (1, 1+\mathrm{X}, 1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$, ces mêmes polynômes s'écrivent :

$$\mathrm{P} = -1 - (1+\mathrm{X}) + 3(1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{Q} = 1 + (1+\mathrm{X}) + 2(1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2),$$

donc ils ont pour représentation matricielle dans cette base :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

À retenir
Le rang ne dépend pas de la base.

Comme les deux vecteurs colonnes ne sont pas proportionnels alors

$$\mathrm{rg}\,(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right) = 2.$$

On retrouve encore $\mathrm{rg}\,(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = 2$.

Exemple 2 – Exemple d'utilisation de la matrice d'une application linéaire :

Le noyau d'une application linéaire se lit souvent bien sur les coefficients de sa matrice.

Soient f un endomorphisme et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ sa matrice dans une base.

Attention
Assurez-vous que vous comprenez parfaitement cet exemple. Ça vous aidera par la suite

En notant $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3, \mathrm{C}_4$ les colonnes de A et (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de $\mathbb{R}^4$, on a :

$$\mathrm{C}_3 = \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 \iff \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_3 = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

Par définition, $f(e_1) + f(e_2) - f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^4}$ et par linéarité de f :

$$f(e_1 + e_2 - e_3) = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est donc dans $\ker(f)$.

— De même, $\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 + \mathrm{C}_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(f)$.

I.2 – Représentation matricielle d'une application linéaire

Définition 2 – Matrice d'une application linéaire :

Soient E muni de la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et F muni de la base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

On appelle *matrice de* u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, la matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont la j-ième colonne contient les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_1)) \quad \dots \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_p))\Big) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

Méthode 1 – Déterminer la matrice d'un endomorphisme :

Pour construire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$:

1. On calcule l'image par f de chaque vecteur de la base $\mathcal{B}$.
2. On décompose chaque image sur la base $\mathcal{B}$.
3. On place les coefficients obtenus en colonnes dans la matrice.

Exercice VII.1 – (Endomorphisme dans un espace de polynômes (Classique ECG2))

Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$, on considère l'application

$$f : \mathrm{P} \longmapsto (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}' - \mathrm{P}.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Idée
Toujours s'efforcer de voir pourquoi ça marche et donner la raison avant tout calcul.

1. f est clairement linéaire par linéarité de la dérivation et du produit :
   Soient $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_2[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q}) &= (\mathrm{X}-1)(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})' - (\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q}) && \text{Attention au signe !)} \\ &= (\mathrm{X}-1)(\lambda\mathrm{P}'+\mathrm{Q}'-\lambda\mathrm{P}-\mathrm{Q} && \text{(par linéarité de la dérivation)} \\ &= \lambda((\mathrm{X}-1)\mathrm{P}'-\mathrm{P}) + (\mathrm{X}-1)\mathrm{Q}' - \mathrm{Q} \\ &= \lambda f(\mathrm{P}) + f(\mathrm{Q}). \end{aligned}$$

   Donc f est linéaire. C'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

2. D'après la définition (2) , il suffit de calculer les images de chaque vecteur de la base canonique $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$:
   - $f(1) = (\mathrm{X}-1)\cdot 0 - 1 = -1 = -1\cdot 1 + 0\cdot \mathrm{X} + 0\cdot \mathrm{X}^2$.
   - $f(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-1)\cdot 1 - \mathrm{X} = -1 = -1\cdot 1 + 0\cdot \mathrm{X} + 0\cdot \mathrm{X}^2$.
   - $f(\mathrm{X}^2) = (\mathrm{X}-1)\cdot(2\mathrm{X}) - \mathrm{X}^2 = \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} = 0\cdot 1 - 2\cdot \mathrm{X} + 1\cdot \mathrm{X}^2$.

   On en déduit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice VII.2 – (Endomorphisme dans un espace de matrices (Incontournable ECG2))

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On définit T : $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{AM}-\mathrm{MA}. \end{array}$

Déterminer la matrice de T dans la base canonique $\mathcal{B} = (\mathrm{E}_{1,1}, \mathrm{E}_{1,2}, \mathrm{E}_{2,1}, \mathrm{E}_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Après calcul direct des commutateurs pour chaque matrice élémentaire :

- $\mathrm{T}(\mathrm{E}_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{E}_{1,2}$.
- $\mathrm{T}(\mathrm{E}_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.
- $\mathrm{T}(\mathrm{E}_{2,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}_{1,1} - \mathrm{E}_{2,2}$.

— $\mathrm{T}(\mathrm{E}_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{E}_{1,2}$.

D'où la matrice associée :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{T}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème 2 – Isomorphisme de représentation :

Soient E muni d'une base $\mathcal{B}$ de taille p et F muni d'une base $\mathcal{C}$ de taille n.

L'application $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{C}} : f \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Méthode 2 – Déterminer l'endomorphisme associée à une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

Pour déterminer $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$:

1. On considère un vecteur $\mathrm{X}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. On calcule AX qui donne un vecteur $\mathrm{Y}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, c'est l'image de $(x\,;y\,;z)$ par f.
3. On écrit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x'\,;y'\,;z') \end{array} \quad \text{ou} \quad f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \end{array}.$$

Exercice VII.3

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer l'expression de f l'endomorphisme associé à A (dans les bases canoniques).

Soit $\mathrm{X}\,(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$.

Par calcul matriciel, on a :

$$\mathrm{AX} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+5y-2z \\ -x+2y+3z \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (2x+5y-2z\,;-x+2y+3z) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rccc} f : & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x+5y-2z \\ -x+2y+3z \end{pmatrix} \end{array}$$

Théorème 3 – Calcul de l'image d'un vecteur :

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$.

Pour tout $x \in \mathrm{E}$, en posant $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(x))$:

$$\mathrm{Y} = \mathrm{AX}.$$

Preuve : Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$. Soit $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$, de sorte que $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_p \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

Par linéarité de u :

$$u(x) = u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j\right) f_i.$$

La i-ième coordonnée de $u(x)$ dans $\mathcal{C}$ est $\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$, ce qui correspond exactement au coefficient de la i-ième ligne du produit matriciel AX. Donc $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$. ☑

I.3 – Composition, Isomorphismes et Inversion

Théorème 4 – Matrice d'une composée :

Soient E, F, G trois espaces vectoriels munis des bases respectives $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$.

Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

Preuve : Soit $x \in \mathrm{E}$. Posons $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $\mathrm{Y} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x))$ et $\mathrm{Z} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}((g \circ f)(x))$.

D'après le théorème précédent, $\mathrm{Y} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\mathrm{X}$ et $\mathrm{Z} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\mathrm{Y}$.

Par associativité du produit matriciel :

$$\mathrm{Z} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\mathrm{X}\right) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\right)\mathrm{X}.$$

Comme cette relation est vraie pour tout X, l'unicité de la matrice représentative donne le résultat. ☑

Théorème 5 – Matrice d'un automorphisme :

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est un automorphisme (bijectif) si et seulement si sa matrice $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible.

Dans ce cas :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1} = \mathrm{A}^{-1}.$$

Preuve : Si f est bijectif, $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$. En passant aux matrices :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{I}_n.$$

Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible et son inverse est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$.

Réciproquement, si $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible, posons g l'endomorphisme dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A^{-1}.

On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g) = \mathrm{A}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$, d'où $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$, ce qui prouve la bijectivité de f. ☑

Exercice VII.4 – (Un automorphisme)

Montrer que l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-z \\ 2x+y+z \end{pmatrix}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

D'après le théorème (5) , il suffit de montrer que la matrice de f est inversible.

— Posons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de sorte que pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *i.e.* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{A}$.

D'après le théorème (2) , f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

— A est inversible :

Méthode

On peut aussi montrer que les 3 vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont libres dans une espace de dimension 3.

Par la matrice augmentée, on a :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \end{matrix}$$

$$\underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

La matrice A est donc inversible. L'endomorphisme associé f est donc bijectif *i.e.* c'est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Idée
Au passage, on récupère la matrice donc l'expression de f^{-1} avec A^{-1}.

II. Noyau, Image et Rang d'une matrice

Définition 3 – Noyau, Image et Rang d'une matrice :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

— Le *noyau de* A est l'espace des solutions du système homogène $AX = 0$:

$$\ker(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}.$$

— L'*image de* A est le sous-espace de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les colonnes $C_1, \dots, C_p$ de A :

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p).$$

À retenir
Le rang d'une matrice est égal au rang de la famille formée par ses vecteurs colonnes.

— Le *rang de* A, noté $\mathrm{rg}(A)$, est la dimension de $\mathrm{Im}(A)$ (nombre maximum de colonnes linéairement indépendantes).

Exemple 3 – Rang d'une matrice à partir de ses vecteurs colonnes :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

La somme des deux premières colonnes C_1 et C_2 est égale à $-C_3$, par conséquent les vecteurs colonnes de A sont liés et

$$\mathrm{rg}(A) \leqslant 2.$$

De plus les colonnes C_1 et C_2 ne sont pas proportionnelles. Les vecteurs colonnes C_1 et C_2 sont donc libres *i.e.* on en déduit que

$$\mathrm{rg}(A) \geqslant 2.$$

Finalement, $\mathrm{rg}(A) = 2$ ce qui signifie, en particulier, que A n'est pas inversible et f n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 4 – Image d'une matrice :

Plus directement,

$$\mathrm{Im}\begin{pmatrix}1&2&4&0\\1&-1&0&1\\2&1&4&1\end{pmatrix} \underset{\substack{C_2\leftarrow 2C_1-C_2\\C_3\leftarrow 4C_1-C_3}}{=} \mathrm{Im}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&3&4&1\\2&3&4&1\end{pmatrix} = \mathrm{Im}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\2&1\end{pmatrix}$$

$$\underset{C_1\leftarrow C_1-C_2}{=} \mathrm{Im}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

En particulier, $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = 2$.

Théorème 6 – Théorème du rang pour une matrice :

Pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$\dim(\ker \mathrm{A}) + \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = p \quad \text{(nombre de colonnes de A)}.$$

Exemple 5 – Un automorphisme :

L'application $f : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\(x,y,z) & \longmapsto & (x+y,-x+y,z)\end{array}$ est canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ dont les vecteurs colonnes sont clairement libres.

On en déduit que f est de rang 3 donc surjective, donc bijective : f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice VII.5 – (Méthode classique de détermination de $\ker(\mathrm{A})$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$ en ECG-2)

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-1&8\\1&1&1\end{pmatrix}$.

Déterminer une base de $\ker(\mathrm{A})$ et de $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$.

Recherche du noyau :

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \ker(\mathrm{A}) \iff \begin{cases}x+2y-z=0\\2x-y+8z=0\\x+y+z=0\end{cases}$$

Par pivot de Gauss sur le système :

$$\iff \begin{cases}x+y+z=0\\y-2z=0\\-3y+6z=0\end{cases} \iff \begin{cases}y=2z\\x=-3z\end{cases}$$

Ainsi, $\ker(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}\right)$. C'est une droite vectorielle (dim ker $A = 1$).

Recherche du rang et de l'image : Par le théorème du rang,

$$\text{rg}(A) = 3 - \dim(\ker(A)) = 3 - 1 = 2.$$

L'image $\text{Im}(A)$ est de dimension 2.
Il suffit d'extraire deux colonnes non colinéaires de A.
Les deux premières colonnes $C_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnelles, donc :

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right).$$

III. Changement de bases et matrices semblables

III.1 – Matrice de passage et changement de coordonnées

Définition 4 – Matrice de passage :

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. La *matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$*, notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, est la matrice des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ exprimés dans l'ancienne base $\mathcal{B}$:

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_E).$$

Exercice VII.6 – (Changement de base dans $\mathbb{R}_3[X]$)

Soit $\mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Déterminer $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(1) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(X-1) = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}((X-1)^2) = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}((X-1)^3) = \begin{pmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{pmatrix}.$$

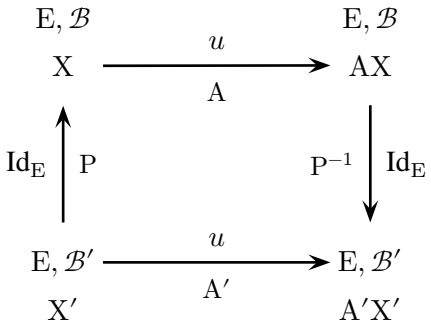


FIGURE VII.1 : Diagramme de changement de bases pour un endomorphisme

Donc, $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque
On pourra vérifier que $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est inversible.

Proposition 7 – Formule de changement de base pour un vecteur :

Soit $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $\mathrm{X}' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$. Si $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, alors :

$$\mathrm{X} = \mathrm{PX}' \quad \text{et} \quad \mathrm{X}' = \mathrm{P^{-1}X}.$$

$$\mathrm{E}, \mathcal{B} \xrightarrow[\mathrm{P^{-1}}]{\mathrm{Id_E}} \mathrm{E}, \mathcal{B}'$$
$$\mathrm{X} \qquad\qquad \mathrm{X}'$$

Preuve : On a $\mathrm{PX}' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E}) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E}(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \mathrm{X}$.

En multipliant à gauche par $\mathrm{P^{-1}}$, on obtient $\mathrm{X}' = \mathrm{P^{-1}X}$. ☑

III.2 – Changement de base pour un endomorphisme et matrices semblables

Théorème 8 – Formule de changement de base pour un endomorphisme :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage.

Si $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathrm{A}' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$, alors :

$$\mathrm{A}' = \mathrm{P^{-1}AP}.$$

Preuve : Soient $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $\mathrm{X}' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$.

D'une part, la matrice de $f(x)$ dans $\mathcal{B}'$ est $\mathrm{Y}' = \mathrm{A'X'}$.

D'autre part, en passant par la base $\mathcal{B}$:

$$Y' = P^{-1}Y = P^{-1}(AX) = P^{-1}A(PX') = (P^{-1}AP)X'.$$

Comme cette égalité vaut pour tout vecteur X', on en déduit $A' = P^{-1}AP$. ☑

Exercice VII.7 – (Matrice d'une application linéaire dans une nouvelle base)

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (10x-y-z\,;-6x+9y-3z\,;-2x-y+11z) \end{array}$$

Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1\,;3\,;1)\,;(1\,;0\,;-2)\,;(0\,;1\,;-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de f dans cette base.

Notons $P = P^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_c} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$ où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Idée On peut aussi montrer directement que les 3 vecteurs sont libres à partir d'une combinaison linéaire nulle. C'est au choix.

On a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On applique la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{\mathcal{L}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Donc, $P \sim_{\mathcal{L}} I_n$ *i.e.* P est inversible et $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

De plus, $P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ se lit dans le membre de droite de la matrice augmentée.

Reste à trouver la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

On a déjà $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -6 & 9 & -3 \\ -2 & -1 & 11 \end{pmatrix}$.

On utilise la formule de changement de base : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)P$.

Ainsi, après calcul, on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Remarque On dit que l'on a diagonalisé $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)$.

Définition 5 – Matrices semblables :

Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$B = P^{-1}AP.$$

Remarque : Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

En particulier, deux matrices semblables ont :

— le même rang,

— le même ensemble de polynômes annulateurs,

— les mêmes valeurs propres (notion abordée au chapitre suivant : *Réduction des matrices*).

Exemple 6 – Matrices semblables :

Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (-3x-2y-4z\,;4x+3y+5z\,;2z)\,. \end{array}$

et posons $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice canoniquement associée à f est $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice P est inversible d'inverse $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on a :

$$\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarque
La matrice A' est diagonale ce qui rendra certains calculs beaucoup plus simples.

Les matrices A et A' sont semblables.

IV. Bilan et savoir-faire exigibles en ECG2

À l'issue de ce chapitre, l'étudiant doit savoir parfaitement :

— **Construire la matrice d'un endomorphisme** dans une base donnée (en particulier dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).

— **Déterminer le noyau** $\ker(\mathrm{A})$ par la résolution d'un système linéaire $\mathrm{AX} = 0$.

— **Déterminer l'image** $\mathrm{Im}\,(\mathrm{A})$ **et le rang** $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A})$ à l'aide du théorème du rang et du choix de colonnes libres.

— **Appliquer les formules de changement de base** ($\mathrm{X} = \mathrm{PX}'$ et $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$).

— **Démontrer qu'une matrice est inversible** en étudiant son noyau ou son rang.

Index

Application
linéaire, 3

Base, 2

Formule
de changement de base, 11, 12

Image
d'un vecteur, 7
d'une matrice, 8, 9
Isomorphisme
entre $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\mathcal{M}_{n,p}$, 6

Matrice
Composée, 7
d'un vecteur, 2
d'une application linéaire, 4
d'une famille, 2
de passage, 11
Endomorphisme, 5
Inverse, 7
semblables, 13

Noyau
d'une application linéaire, 3
d'une matrice, 8

Polynôme
Endomorphisme, 4
Matrice de passage, 11

Rang
d'une matrice, 8

Théorème
du rang, 9