VII

Matrices et Applications linéaires en dimension finie

Dans le chapitre précédent, on a étudié les applications linéaires de manière abstraite : noyau, image, rang, théorème du rang…

On sait aussi que les matrices permettent de calculer efficacement : résoudre un système, inverser, multiplier…

Le but de ce chapitre est de réunir ces deux mondes : *une fois des bases choisies, une application linéaire devient une matrice*, et tout ce que l'on sait faire sur les matrices se traduit en information sur l'application.

Au programme :

— Comment *fabriquer la matrice* d'un vecteur, d'une famille, d'une application linéaire.

— Comment *lire* sur la matrice le noyau, l'image, le rang, l'inversibilité.

— Que devient la matrice lorsque l'on *change de base* ? (Premier pas vers la diagonalisation…)

Plan du chapitre

I Matrices et applications linéaires 2
I.1 Matrice associée à un vecteur et à une famille 2
I.2 Représentation matricielle d'une application linéaire 4
I.3 Composition, Isomorphismes et Inversion 7
II Noyau, Image et Rang d'une matrice 8
III Changement de bases et matrices semblables 10
III.1 Matrice de passage et changement de coordonnées 10
III.2 Changement de base pour un endomorphisme et matrices semblables 11
IV Bilan et savoir-faire exigibles en ECG2 13

Dans tout ce chapitre, les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

Pour bien démarrer...

1. Produit d'une matrice par une colonne.

   Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   Calculer AX.

2. Coordonnées dans une base.

   Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

   Que signifie : « x a pour coordonnées $(1, -2, 3)$ dans $\mathcal{B}$ » ? Quelle est la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$?

I. Matrices et applications linéaires

Dans la suite, E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie p et n dont on a fixé des bases respectives $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

I.1 – Matrice associée à un vecteur et à une famille

Définition 1 – Matrice d'un vecteur et d'une famille :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

— Pour $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \in E$, la *matrice de x dans la base $\mathcal{B}$* est le vecteur colonne :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

— Pour une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p) \in E^p$, la *matrice de la famille dans la base $\mathcal{B}$* est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont la j-ième colonne est $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j)$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \iff \forall j \in [\![1, p]\!],\ u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

Attention
Les coordonnées et la matrice dépendent strictement de la base $\mathcal{B}$ choisie.

À retenir
Une application linéaire est entièrement et uniquement déterminée par l'image d'une base.

Proposition 1 – Détermination d'une application linéaire par une base :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_p)$ une famille quelconque de F.

Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ telle que :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad u(e_j) = f_j.$$

Exemple 1 – Matrices d'une famille de polynômes :

— Dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$, les polynômes $\mathrm{P} = 1 + 2\mathrm{X} + 3\mathrm{X}^2$ et $\mathrm{Q} = 4 + 3\mathrm{X} + 2\mathrm{X}^2$ ont pour représentation matricielle dans cette base :

— Dans la base $\mathcal{B}_1 = (1, 1 + \mathrm{X}, 1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$, ces mêmes polynômes s'écrivent :

Exemple 2 – Exemple d'utilisation de la matrice d'une application linéaire :

Le noyau d'une application linéaire se lit souvent bien sur les coefficients de sa matrice.

Soient f un endomorphisme et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ sa matrice dans une base.

Attention
Assurez-vous que vous comprenez parfaitement cet exemple. Ça vous aidera par la suite

— En notant $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3, \mathrm{C}_4$ les colonnes de A et (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de $\mathbb{R}^4$, on a :

$$\mathrm{C}_3 = \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 \iff \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_3 = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

Par définition, $f(e_1)+f(e_2)-f(e_3)=0_{\mathbb{R}^4}$ et par linéarité de f :

$$f(e_1+e_2-e_3)=0_{\mathbb{R}^4}.$$

Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est donc dans $\ker(f)$.

— De même, $C_1+C_2+C_3+C_4=0_{\mathbb{R}^4}$, donc $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\in\ker(f)$.

I.2 – Représentation matricielle d'une application linéaire

Définition 2 – Matrice d'une application linéaire :

Soient E muni de la base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$ et F muni de la base $\mathcal{C}=(f_1,\dots,f_n)$.

Soit $u\in\mathcal{L}(E,F)$.

On appelle *matrice de* u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, la matrice $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont la j-ième colonne contient les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)=\Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_1))\quad\dots\quad\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_p))\Big)\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

Méthode 1 – Déterminer la matrice d'un endomorphisme :

Pour construire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$:

1. On calcule l'image par f de chaque vecteur de la base $\mathcal{B}$.
2. On décompose chaque image sur la base $\mathcal{B}$.
3. On place les coefficients obtenus en colonnes dans la matrice.

Exercice VII.1 – (Endomorphisme dans un espace de polynômes (Classique ECG2))

Dans $E=\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$, on considère l'application

$$f : P\longmapsto (X-1)P'-P.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Exercice VII.2 – (Endomorphisme dans un espace de matrices (Incontournable ECG2))

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On définit $T : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA. \end{array}$

Déterminer la matrice de T dans la base canonique $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Théorème 2 – Isomorphisme de représentation :

Soient E muni d'une base $\mathcal{B}$ de taille p et F muni d'une base $\mathcal{C}$ de taille n.

L'application $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{C}} : f \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{L}(\text{E},\text{F})$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Méthode 2 – Déterminer l'endomorphisme associée à une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

Pour déterminer $f \in \mathcal{L}(\text{E})$ tel que $\text{A} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$:

1. On considère un vecteur $\text{X} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. On calcule AX qui donne un vecteur $\text{Y} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, c'est l'image de $(x\,;y\,;z)$ par f.
3. On écrit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x'\,;y'\,;z') \end{array} \quad \text{ou} \quad f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \end{array}$$

Exercice VII.3

Soit $\text{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer l'expression de f l'endomorphisme associé à A (dans les bases canoniques).

Théorème 3 – Calcul de l'image d'un vecteur :

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$.

Pour tout $x \in \mathrm{E}$, en posant $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(x))$:

$$\mathrm{Y} = \mathrm{AX}.$$

I.3 – Composition, Isomorphismes et Inversion

Théorème 4 – Matrice d'une composée :

Soient $\mathrm{E},\mathrm{F},\mathrm{G}$ trois espaces vectoriels munis des bases respectives $\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}$.

Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

Théorème 5 – Matrice d'un automorphisme :

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est un automorphisme (bijectif) si et seulement si sa matrice $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible.

Dans ce cas :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1} = \mathrm{A}^{-1}.$$

Exercice VII.4 – (Un automorphisme)

Montrer que l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-z \\ 2x+y+z \end{pmatrix}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

II. Noyau, Image et Rang d'une matrice

Définition 3 – Noyau, Image et Rang d'une matrice :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

— Le *noyau de* A est l'espace des solutions du système homogène $AX = 0$:

$$\ker(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}.$$

— L'*image de* A est le sous-espace de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les colonnes $C_1, \dots, C_p$ de A :

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p).$$

— Le *rang de* A, noté $\text{rg}(A)$, est la dimension de $\text{Im}(A)$ (nombre maximum de colonnes linéairement indépendantes).

À retenir
Le rang d'une matrice est égal au rang de la famille formée par ses vecteurs colonnes.

Exemple 3 – Rang d'une matrice à partir de ses vecteurs colonnes :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exemple 4 – Image d'une matrice :

Théorème 6 – Théorème du rang pour une matrice :

Pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$\dim(\ker \mathrm{A}) + \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = p \quad \text{(nombre de colonnes de A)}.$$

Exemple 5 – Un automorphisme :

L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y,-x+y,z) \end{array}$ est canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dont les vecteurs colonnes sont clairement libres.

On en déduit que f est de rang 3 donc surjective, donc bijective : f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice VII.5 – (Méthode classique de détermination de $\ker(\mathrm{A})$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$ en ECG-2)

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base de $\ker(A)$ et de $\mathrm{Im}(A)$.

III. Changement de bases et matrices semblables

III.1 – Matrice de passage et changement de coordonnées

Définition 4 – Matrice de passage :

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. La *matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$*, notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, est la matrice des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ exprimés dans l'ancienne base $\mathcal{B}$:

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E).$$

Exercice VII.6 – (Changement de base dans $\mathbb{R}_3[X]$)

Soit $\mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Déterminer $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Proposition 7 – Formule de changement de base pour un vecteur :

Soit $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $\mathrm{X}' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$. Si $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, alors :

$$\mathrm{X} = \mathrm{PX}' \quad \text{et} \quad \mathrm{X}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}.$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E}, \mathcal{B} & \xrightarrow{Id_{\mathrm{E}}} & \mathrm{E}, \mathcal{B}' \\ & \xleftarrow{\mathrm{P}^{-1}} & \\ \mathrm{X} & & \mathrm{X}' \end{array}$$

III.2 – Changement de base pour un endomorphisme et matrices semblables

Théorème 8 – Formule de changement de base pour un endomorphisme :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage.

Si $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathrm{A}' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$, alors :

$$\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

À retenir

On a aussi

$$\mathrm{A} = \mathrm{PA}'\mathrm{P}^{-1}.$$

Exercice VII.7 – (Matrice d'une application linéaire dans une nouvelle base)

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (10x-y-z\,;-6x+9y-3z\,;-2x-y+11z) \end{array}$$

Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1\,;3\,;1)\,;(1\,;0\,;-2)\,;(0\,;1\,;-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de f dans cette base.

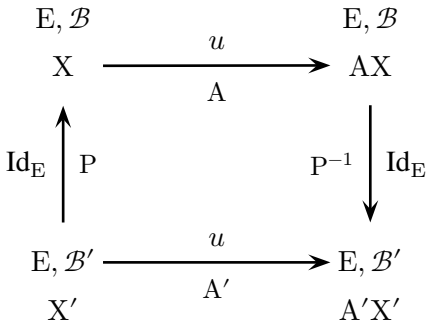


FIGURE VII.1 : Diagramme de changement de bases pour un endomorphisme

Définition 5 – Matrices semblables :

Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$B = P^{-1}AP.$$

Remarque : Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

En particulier, deux matrices semblables ont :

— le même rang,

— le même ensemble de polynômes annulateurs,

— les mêmes valeurs propres (notion abordée au chapitre suivant : *Réduction des matrices*).

Exemple 6 – Matrices semblables :

Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (-3x-2y-4z\,;4x+3y+5z\,;2z)\,. \end{array}$

et posons $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

IV. Bilan et savoir-faire exigibles en ECG2

À l'issue de ce chapitre, l'étudiant doit savoir parfaitement :

— **Construire la matrice d'un endomorphisme** dans une base donnée (en particulier dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).

— **Déterminer le noyau** $\ker(A)$ par la résolution d'un système linéaire $AX = 0$.

— **Déterminer l'image** $\mathrm{Im}(A)$ **et le rang** $\mathrm{rg}(A)$ à l'aide du théorème du rang et du choix de colonnes libres.

— **Appliquer les formules de changement de base** ($X = PX'$ et $A' = P^{-1}AP$).

— **Démontrer qu'une matrice est inversible** en étudiant son noyau ou son rang.