# Matrices et applications linéaires en dimension finie

Cours de ECG-2

Lycée Gerville Réache

Chapitre 8



# Sommaire I


1. Matrices et applications linéaires
2. Noyau, Image et Rang d'une matrice
3. Changement de bases et matrices semblables
4. Bilan et savoir-faire exigibles en ECG2

DANS le chapitre précédent, on a étudié les applications linéaires de manière abstraite : noyau, image, rang, théorème du rang...

Dans le chapitre précédent, on a étudié les applications linéaires de manière abstraite : noyau, image, rang, théorème du rang...

On sait aussi que les matrices permettent de calculer efficacement : résoudre un système, inverser, multiplier...

Dans le chapitre précédent, on a étudié les applications linéaires de manière abstraite : noyau, image, rang, théorème du rang...

On sait aussi que les matrices permettent de calculer efficacement : résoudre un système, inverser, multiplier...

Le but de ce chapitre est de réunir ces deux mondes : une fois des bases choisies, une application linéaire devient une matrice, et tout ce que l'on sait faire sur les matrices se traduit en information sur l'application.

Dans le chapitre précédent, on a étudié les applications linéaires de manière abstraite : noyau, image, rang, théorème du rang...

On sait aussi que les matrices permettent de calculer efficacement : résoudre un système, inverser, multiplier...

Le but de ce chapitre est de réunir ces deux mondes : une fois des bases choisies, une application linéaire devient une matrice, et tout ce que l'on sait faire sur les matrices se traduit en information sur l'application.

Au programme :

- Comment fabriquer la matrice d'un vecteur, d'une famille, d'une application linéaire.
- Comment lire sur la matrice le noyau, l'image, le rang, l'inversibilité.
- Que devient la matrice lorsque l'on change de base ? (Premier pas vers la diagonalisation...)

# I. Pour bien démarrer...

1. Produit d'une matrice par une colonne.

   Soient $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   Calculer $\mathrm{AX}$.

# I. Pour bien démarrer...

1. Produit d'une matrice par une colonne.

   Soient $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   Calculer $\mathrm{AX}$.

   - $\mathrm{AX} = \begin{pmatrix} 2x + 5y - 2z \\ -x + 2y + 3z \end{pmatrix}$.

2. Coordonnées dans une base.
   Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathrm{E}$.
   Que signifie : « $x$ a pour coordonnées $(1, -2, 3)$ dans $\mathcal{B}$ » ? Quelle est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ ?

2. Coordonnées dans une base.
   Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathrm{E}$.
   Que signifie : « $x$ a pour coordonnées $(1, -2, 3)$ dans $\mathcal{B}$ » ? Quelle est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ ?

   - $x = 1 \cdot e_1 - 2 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

# I. Pour bien démarrer...

Dans la suite, $\mathrm{E}$ et $\mathrm{F}$ sont deux espaces vectoriels de dimension finie $p$ et $n$ dont on a fixé des bases respectives $\mathcal{B}_{\mathrm{E}} = \left(e_1, e_2, \dots, e_p\right)$ et $\mathcal{B}_{\mathrm{F}} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

# II. Matrices et applications linéaires


1. **Matrices et applications linéaires**
   - Matrice associée à un vecteur et à une famille
   - Représentation matricielle d'une application linéaire
   - Composition, Isomorphismes et Inversion
2. Noyau, Image et Rang d'une matrice
3. Changement de bases et matrices semblables
4. Bilan et savoir-faire exigibles en ECG2

**Attention**

Les coordonnées et la matrice dépendent strictement de la base $\mathcal{B}$ choisie.

### Définition 1 – Matrice d'un vecteur et d'une famille :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $\mathrm{E}$.

- Pour $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathrm{E}$, la matrice de $x$ dans la base $\mathcal{B}$ est le vecteur colonne :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

**Attention**

Les coordonnées et la matrice dépendent strictement de la base $\mathcal{B}$ choisie.

### Définition 1 – Matrice d'un vecteur et d'une famille :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $\mathrm{E}$.

- Pour $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathrm{E}$, la matrice de $x$ dans la base $\mathcal{B}$ est le vecteur colonne :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

- Pour une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p) \in \mathrm{E}^p$, la matrice de la famille dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont la $j$-ième colonne est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j)$ :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \iff \forall j \in [\![1, p]\!],\ u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

**À retenir**

Une application linéaire est entièrement et uniquement déterminée par l'image d'une base.

**Proposition 1 – Détermination d'une application linéaire par une base :**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de $\mathrm{E}$ et $(f_1, \dots, f_p)$ une famille quelconque de $\mathrm{F}$.

Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ telle que :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad u(e_j) = f_j.$$

### Exemples 1 – Matrices d'une famille de polynômes :

- Dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$ :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \implies \mathrm{rg}\,(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = 2.$$

### Exemples 1 – Matrices d'une famille de polynômes :

- Dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$ :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \implies \mathrm{rg}\,(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = 2.$$

- Dans la base $\mathcal{B}_1 = (1, 1+\mathrm{X}, 1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$ :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \implies \mathrm{rg}\,(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = 2.$$

### Exemple 2 – Exemple d'utilisation de la matrice d'une application linéaire :

*Le noyau d'une application linéaire se lit souvent bien sur les coefficients de sa matrice.*

Soient $f$ un endomorphisme et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ sa matrice dans une base.

### Exemple 2 – Exemple d'utilisation de la matrice d'une application linéaire :

*Le noyau d'une application linéaire se lit souvent bien sur les coefficients de sa matrice.*

Soient $f$ un endomorphisme et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ sa matrice dans une base.

- Comme $\mathrm{C}_3 = \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2$, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(f)$.

### Exemple 2 – Exemple d'utilisation de la matrice d'une application linéaire :

*Le noyau d'une application linéaire se lit souvent bien sur les coefficients de sa matrice.*

Soient $f$ un endomorphisme et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ sa matrice dans une base.

- Comme $\mathrm{C}_3 = \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2$, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(f)$.
- Comme $\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 + \mathrm{C}_4 = 0$, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(f)$.

### Définition 2 – Matrice d'une application linéaire :

Soient $\mathrm{E}$ muni de la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathrm{F}$ muni de la base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$.
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.
On appelle matrice de $u$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, la matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont la $j$-ième colonne contient les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$ :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_1)) & \dots & \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_p)) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

### Méthode 1 – Déterminer la matrice d'un endomorphisme :

Pour construire $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ :

1. On calcule l'image par $f$ de chaque vecteur de la base $\mathcal{B}$.

### Méthode 1 – Déterminer la matrice d'un endomorphisme :

Pour construire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ :

1. On calcule l'image par $f$ de chaque vecteur de la base $\mathcal{B}$.
2. On décompose chaque image sur la base $\mathcal{B}$.

### Méthode 1 – Déterminer la matrice d'un endomorphisme :

Pour construire $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ :

1. On calcule l'image par $f$ de chaque vecteur de la base $\mathcal{B}$.
2. On décompose chaque image sur la base $\mathcal{B}$.
3. On place les coefficients obtenus en colonnes dans la matrice.

### Exercice 1 – Endomorphisme dans un espace de polynômes (Classique ECG2) :

Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$, on considère l'application

$$f : \mathrm{P} \longmapsto (\mathrm{X} - 1)\mathrm{P}' - \mathrm{P}.$$

1. Montrer que $f$ est linéaire.

Idée

Toujours s'efforcer de voir pourquoi ça marche et donner la raison avant tout calcul.

### Exercice 1 – Endomorphisme dans un espace de polynômes (Classique ECG2) :

Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$, on considère l'application

$$f : \mathrm{P} \longmapsto (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}' - \mathrm{P}.$$

1. Montrer que $f$ est linéaire.

$f$ est clairement linéaire par linéarité de la dérivation et du produit :
Soient $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_2[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q}) &= (\mathrm{X}-1)(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})' - (\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q}) && \text{(Attention au signe !)} \\ &= (\mathrm{X}-1)(\lambda\mathrm{P}'+\mathrm{Q}') - \lambda\mathrm{P} - \mathrm{Q} && \text{(par linéarité de la dérivation)} \\ &= \lambda((\mathrm{X}-1)\mathrm{P}' - \mathrm{P}) + (\mathrm{X}-1)\mathrm{Q}' - \mathrm{Q} \\ &= \lambda f(\mathrm{P}) + f(\mathrm{Q}). \end{aligned}$$

Idée

Toujours s'efforcer de voir pourquoi ça marche et donner la raison avant tout calcul.

### Exercice 1 – Endomorphisme dans un espace de polynômes (Classique ECG2) :

Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$, on considère l'application

$$f : \mathrm{P} \longmapsto (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}' - \mathrm{P}.$$

1. Montrer que $f$ est linéaire.

$f$ est clairement linéaire par linéarité de la dérivation et du produit :
Soient $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_2[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q}) &= (\mathrm{X}-1)(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})' - (\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q}) && \text{(Attention au signe !)} \\ &= (\mathrm{X}-1)(\lambda\mathrm{P}'+\mathrm{Q}') - \lambda\mathrm{P} - \mathrm{Q} && \text{(par linéarité de la dérivation)} \\ &= \lambda((\mathrm{X}-1)\mathrm{P}' - \mathrm{P}) + (\mathrm{X}-1)\mathrm{Q}' - \mathrm{Q} \\ &= \lambda f(\mathrm{P}) + f(\mathrm{Q}). \end{aligned}$$

Donc $f$ est linéaire. C'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

### Exercice 1 – Endomorphisme dans un espace de polynômes :

2. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

D'après la définition (2) , il suffit de calculer les images de chaque vecteur de la base canonique $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$ :

- $f(1) = (\mathrm{X}-1)\cdot 0 - 1 = -1 = -1\cdot 1 + 0\cdot \mathrm{X} + 0\cdot \mathrm{X}^2$.

## Exercice 1 – Endomorphisme dans un espace de polynômes :

2. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

D'après la définition (2) , il suffit de calculer les images de chaque vecteur de la base canonique $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$ :

- $f(1) = (\mathrm{X}-1)\cdot 0 - 1 = -1 = -1\cdot 1 + 0\cdot \mathrm{X} + 0\cdot \mathrm{X}^2$.
- $f(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-1)\cdot 1 - \mathrm{X} = -1 = -1\cdot 1 + 0\cdot \mathrm{X} + 0\cdot \mathrm{X}^2$.

## Exercice 1 – Endomorphisme dans un espace de polynômes :

2. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

D'après la définition (2) , il suffit de calculer les images de chaque vecteur de la base canonique $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$ :

- $f(1) = (\mathrm{X}-1)\cdot 0 - 1 = -1 = -1\cdot 1 + 0\cdot \mathrm{X} + 0\cdot \mathrm{X}^2$.
- $f(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-1)\cdot 1 - \mathrm{X} = -1 = -1\cdot 1 + 0\cdot \mathrm{X} + 0\cdot \mathrm{X}^2$.
- $f(\mathrm{X}^2) = (\mathrm{X}-1)\cdot(2\mathrm{X}) - \mathrm{X}^2 = \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} = 0\cdot 1 - 2\cdot \mathrm{X} + 1\cdot \mathrm{X}^2$.

## Exercice 1 – Endomorphisme dans un espace de polynômes :

2. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

D'après la définition (2) , il suffit de calculer les images de chaque vecteur de la base canonique $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$ :

- $f(1) = (\mathrm{X}-1)\cdot 0 - 1 = -1 = -1\cdot 1 + 0\cdot \mathrm{X} + 0\cdot \mathrm{X}^2$.
- $f(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-1)\cdot 1 - \mathrm{X} = -1 = -1\cdot 1 + 0\cdot \mathrm{X} + 0\cdot \mathrm{X}^2$.
- $f(\mathrm{X}^2) = (\mathrm{X}-1)\cdot(2\mathrm{X}) - \mathrm{X}^2 = \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} = 0\cdot 1 - 2\cdot \mathrm{X} + 1\cdot \mathrm{X}^2$.

On en déduit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2 – Endomorphisme dans un espace de matrices (Incontournable ECG2) :**

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On définit $\mathrm{T}$ : $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{AM} - \mathrm{MA}. \end{array}$

Déterminer la matrice de $\mathrm{T}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (\mathrm{E}_{1,1}, \mathrm{E}_{1,2}, \mathrm{E}_{2,1}, \mathrm{E}_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

## Exercice 2 – Endomorphisme dans un espace de matrices :

Après calcul direct des commutateurs pour chaque matrice élémentaire :

- $\mathrm{T}(\mathrm{E}_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{E}_{1,2}$.

## Exercice 2 – Endomorphisme dans un espace de matrices :

Après calcul direct des commutateurs pour chaque matrice élémentaire :

- $\mathrm{T}(\mathrm{E}_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{E}_{1,2}$.
- $\mathrm{T}(\mathrm{E}_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

## Exercice 2 – Endomorphisme dans un espace de matrices :

Après calcul direct des commutateurs pour chaque matrice élémentaire :

- $\mathrm{T}(\mathrm{E}_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{E}_{1,2}$.
- $\mathrm{T}(\mathrm{E}_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.
- $\mathrm{T}(\mathrm{E}_{2,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}_{1,1} - \mathrm{E}_{2,2}$.



## Exercice 2 – Endomorphisme dans un espace de matrices :

Après calcul direct des commutateurs pour chaque matrice élémentaire :

- $\mathrm{T}(\mathrm{E}_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{E}_{1,2}$.
- $\mathrm{T}(\mathrm{E}_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.
- $\mathrm{T}(\mathrm{E}_{2,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}_{1,1} - \mathrm{E}_{2,2}$.
- $\mathrm{T}(\mathrm{E}_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{E}_{1,2}$.

**Exercice 2 – Endomorphisme dans un espace de matrices :**

D'où la matrice associée :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{T}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Théorème 2 – Isomorphisme de représentation :**

Soient $\mathrm{E}$ muni d'une base $\mathcal{B}$ de taille $p$ et $\mathrm{F}$ muni d'une base $\mathcal{C}$ de taille $n$.
L'application $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{C}} : f \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

### Méthode 2 – Déterminer l'endomorphisme associé à une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ :

Pour déterminer $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ :

1. On considère un vecteur $\mathrm{X} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.



### Méthode 2 – Déterminer l'endomorphisme associé à une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ :

Pour déterminer $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ :

1. On considère un vecteur $\mathrm{X} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. On calcule $\mathrm{AX}$ qui donne un vecteur $\mathrm{Y} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, c'est l'image de $(x\,;y\,;z)$ par $f$.

**Méthode 2 – Déterminer l'endomorphisme associé à une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ :**

Pour déterminer $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ :

1. On considère un vecteur $\mathrm{X} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. On calcule $\mathrm{AX}$ qui donne un vecteur $\mathrm{Y} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, c'est l'image de $(x\,;y\,;z)$ par $f$.
3. On écrit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x'\,;y'\,;z') \end{array} \quad \text{ou} \quad f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \end{array}$$

**Exercice 3 :**

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer l'expression de $f$ l'endomorphisme associé à $\mathrm{A}$ (dans les bases canoniques).

**Exercice 3 :**

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer l'expression de $f$ l'endomorphisme associé à $\mathrm{A}$ (dans les bases canoniques).

Soit $\mathrm{X}\,(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$.
Par calcul matriciel, on a :

$$\mathrm{AX} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+5y-2z \\ -x+2y+3z \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3 :**

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer l'expression de $f$ l'endomorphisme associé à $\mathrm{A}$ (dans les bases canoniques).

Soit $\mathrm{X}\,(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$.
Par calcul matriciel, on a :

$$\mathrm{AX} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+5y-2z \\ -x+2y+3z \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (2x+5y-2z\,;-x+2y+3z) \end{array}$$

**Exercice 3 :**

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer l'expression de $f$ l'endomorphisme associé à $\mathrm{A}$ (dans les bases canoniques).

Soit $\mathrm{X}\,(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$.

Par calcul matriciel, on a :

$$\mathrm{AX} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+5y-2z \\ -x+2y+3z \end{pmatrix}.$$

ou

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x+5y-2z \\ -x+2y+3z \end{pmatrix}. \end{array}$$

**Théorème 3 – Calcul de l'image d'un vecteur :**

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$.
Pour tout $x \in \mathrm{E}$, en posant $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(x))$ :

$$\mathrm{Y} = \mathrm{AX}.$$

**Théorème 4 – Matrice d'une composée :**

Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ trois espaces vectoriels munis des bases respectives $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$.
Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

**Théorème 5 – Matrice d'un automorphisme :**

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est un automorphisme (bijectif) si et seulement si sa matrice $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible.

**Théorème 5 – Matrice d'un automorphisme :**

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est un automorphisme (bijectif) si et seulement si sa matrice $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible.

Dans ce cas :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1} = \mathrm{A}^{-1}.$$

**Exercice 4 – Un automorphisme :**

Montrer que l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-z \\ 2x+y+z \end{pmatrix}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

**Exercice 4 – Un automorphisme :**

Montrer que l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-z \\ 2x+y+z \end{pmatrix}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

D'après le théorème (5) , il suffit de montrer que la matrice de $f$ est inversible.

**Exercice 4 – Un automorphisme :**

Montrer que l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-z \\ 2x+y+z \end{pmatrix}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

D'après le théorème (5) , il suffit de montrer que la matrice de $f$ est inversible.

- Posons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de sorte que pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *i.e.* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{A}$.

  D'après le théorème (2) , $f$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

**Méthode**

On peut aussi montrer que les 3 vecteurs colonnes $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ sont libres dans une espace de dimension 3.

### Exercice 4 – Un automorphisme :

Montrer que l'application $f : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}x+y+z\\x-z\\2x+y+z\end{pmatrix}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Montrons que $A$ est inversible :
  Par la matrice augmentée, on a :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&0&-1&0&1&0\\2&1&1&0&0&1\end{array}\right)$$

**Exercice 4 – Un automorphisme :**

Montrer que l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-z \\ 2x+y+z \end{pmatrix}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Montrons que $A$ est inversible :
  Par la matrice augmentée, on a :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Idée

Au passage, on récupère la matrice donc l'expression de $f^{-1}$ avec $\mathrm{A}^{-1}$.

## Exercice 4 – Un automorphisme :

Montrer que l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-z \\ 2x+y+z \end{pmatrix}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Montrons que $\mathrm{A}$ est inversible :
  Par la matrice augmentée, on a :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

  La matrice $\mathrm{A}$ est donc inversible. L'endomorphisme associé $f$ est donc bijectif *i.e.* c'est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

# III. Noyau, Image et Rang d'une matrice


1. Matrices et applications linéaires
2. **Noyau, Image et Rang d'une matrice**
3. Changement de bases et matrices semblables
4. Bilan et savoir-faire exigibles en ECG2

**Définition 3 – Noyau, Image et Rang d'une matrice :**

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Le noyau de $\mathrm{A}$ est l'espace des solutions du système homogène $\mathrm{AX} = 0$ :

$$\ker(\mathrm{A}) = \{\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{AX} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}.$$

**À retenir**

Le rang d'une matrice est égal au rang de la famille formée par ses vecteurs colonnes.

## Définition 3 – Noyau, Image et Rang d'une matrice :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Le noyau de $\mathrm{A}$ est l'espace des solutions du système homogène $\mathrm{AX} = 0$ :

$$\ker(\mathrm{A}) = \{\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{AX} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}.$$

- L'image de $\mathrm{A}$ est le sous-espace de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les colonnes $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_p$ de $\mathrm{A}$ :

$$\mathrm{Im}(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_p).$$

**À retenir**

Le rang d'une matrice est égal au rang de la famille formée par ses vecteurs colonnes.

## Définition 3 – Noyau, Image et Rang d'une matrice :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Le noyau de $\mathrm{A}$ est l'espace des solutions du système homogène $\mathrm{AX} = 0$ :

$$\ker(\mathrm{A}) = \{\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{AX} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}.$$

- L'image de $\mathrm{A}$ est le sous-espace de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les colonnes $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_p$ de $\mathrm{A}$ :

$$\mathrm{Im}(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_p).$$

- Le rang de $\mathrm{A}$, noté $\mathrm{rg}(\mathrm{A})$, est la dimension de $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$.

# III. Noyau, Image et Rang d'une matrice

**Exemple 3 – Rang d'une matrice à partir de ses vecteurs colonnes :**

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

**Exemple 3 – Rang d'une matrice à partir de ses vecteurs colonnes :**

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = 2$. En particulier, $\mathrm{A}$ n'est pas inversible et $f$ n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

# III. Noyau, Image et Rang d'une matrice

**Exemple 4 – Image d'une matrice :**

Plus directement,

$$\mathrm{Im}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

**Exemple 4 – Image d'une matrice :**

Plus directement,

$$\text{Im}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

En particulier, $\text{rg}\,(\text{A}) = 2$.

**Théorème 6 – Théorème du rang pour une matrice :**

Pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ :

$$\dim(\ker \mathrm{A}) + \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = p \quad \text{(nombre de colonnes de A)}.$$

# III. Noyau, Image et Rang d'une matrice

**Exemple 5 – Un automorphisme :**

L'application $f$ : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y,-x+y,z) \end{array}$ est canoniquement associée à

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exemple 5 – Un automorphisme :**

L'application $f$ : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y,-x+y,z) \end{array}$ est canoniquement associée à

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{rg}\,(f) = 3 \implies f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^3.$$

# III. Noyau, Image et Rang d'une matrice

**Exercice 5 – Méthode classique de détermination de $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ en ECG-2 :**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\ker(A)$ et de $\mathrm{Im}(A)$.

# III. Noyau, Image et Rang d'une matrice

**Exercice 5 – Méthode classique de détermination de $\ker(\mathrm{A})$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$ en ECG-2 :**

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\ker(\mathrm{A})$ et de $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$.

**Recherche du noyau :**

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(\mathrm{A}) \iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 8z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

# III. Noyau, Image et Rang d'une matrice

**Exercice 5 – Méthode classique de détermination de $\ker(\mathrm{A})$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$ en ECG-2 :**

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\ker(\mathrm{A})$ et de $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$.

**Recherche du noyau :**

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(\mathrm{A}) \iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 8z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Par pivot de Gauss sur le système :

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ -3y + 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2z \\ x = -3z \end{cases}$$

**Exercice 5 – Méthode classique de détermination de $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ en ECG-2 :**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\ker(A)$ et de $\mathrm{Im}(A)$.

**Recherche du noyau :** Ainsi, $\ker(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. C'est une droite vectorielle ($\dim \ker(A) = 1$).

# III. Noyau, Image et Rang d'une matrice

**Exercice 5 – Méthode classique de détermination de $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ en ECG-2 :**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\ker(A)$ et de $\mathrm{Im}(A)$.

**Recherche du rang et de l'image :** Par le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(A) = 3 - \dim(\ker(A)) = 3 - 1 = 2.$$

L'image $\mathrm{Im}(A)$ est de dimension $2$.

**Exercice 5 – Méthode classique de détermination de $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ en ECG-2 :**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\ker(A)$ et de $\mathrm{Im}(A)$.

**Recherche du rang et de l'image :** Par le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(A) = 3 - \dim(\ker(A)) = 3 - 1 = 2.$$

L'image $\mathrm{Im}(A)$ est de dimension $2$.

Il suffit d'extraire deux colonnes non colinéaires de $A$.

**Exercice 5 – Méthode classique de détermination de $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ en ECG-2 :**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\ker(A)$ et de $\mathrm{Im}(A)$.

**Recherche du rang et de l'image :** Les deux premières colonnes $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnelles, donc :

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

# IV. Changement de bases et matrices semblables


1. Matrices et applications linéaires
2. Noyau, Image et Rang d'une matrice
3. **Changement de bases et matrices semblables**
   - Matrice de passage et changement de coordonnées
   - Changement de base pour un endomorphisme et matrices semblables
4. Bilan et savoir-faire exigibles en ECG2

**Définition 4 – Matrice de passage :**

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de $\mathrm{E}$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, notée $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, est la matrice des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ exprimés dans l'ancienne base $\mathcal{B}$ :

$$\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}).$$

### Exercice 6 – Changement de base dans $\mathbb{R}_3[X]$ :

Soit $\mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
Déterminer $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

### Exercice 6 – Changement de base dans $\mathbb{R}_3[X]$ :

Soit $\mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
Déterminer $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(X-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

### Exercice 6 – Changement de base dans $\mathbb{R}_3[X]$ :

Soit $\mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
Déterminer $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(X-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}((X-1)^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}((X-1)^3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Remarque**

On pourra vérifier que $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est inversible.

### Exercice 6 – Changement de base dans $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ :

Soit $\mathcal{B}' = (1, \mathrm{X}-1, (\mathrm{X}-1)^2, (\mathrm{X}-1)^3)$ une base de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.
Déterminer $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.

Donc, $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Proposition 7 – Formule de changement de base pour un vecteur :**

Soit $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $\mathrm{X}' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$. Si $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, alors :

$$\mathrm{X} = \mathrm{P}\mathrm{X}' \quad \text{et} \quad \mathrm{X}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}.$$

**Proposition 7 – Formule de changement de base pour un vecteur :**

Soit $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $\mathrm{X}' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$. Si $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, alors :

$$\mathrm{X} = \mathrm{P}\mathrm{X}' \quad \text{et} \quad \mathrm{X}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}.$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E}, \mathcal{B} & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}} & \mathrm{E}, \mathcal{B}' \\ & \xrightarrow[\mathrm{P}^{-1}]{} & \\ \mathrm{X} & & \mathrm{X}' \end{array}$$

**À retenir**

On a aussi $A = PA'P^{-1}$.

**Théorème 8 – Formule de changement de base pour un endomorphisme :**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $E$, $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage.
Si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$, alors :

$$A' = P^{-1}AP.$$

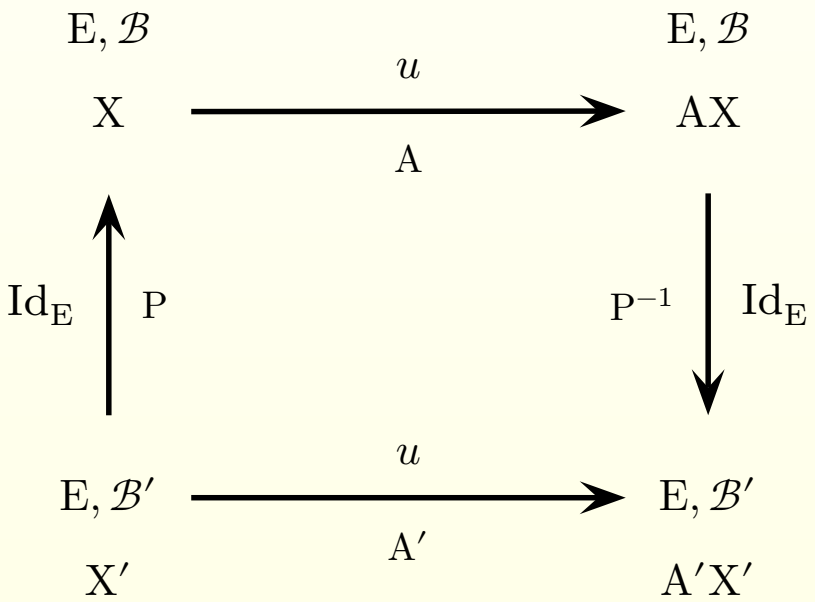
**À retenir**

On a aussi $A = PA'P^{-1}$.

**Théorème 8 – Formule de changement de base pour un endomorphisme :**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $E$, $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage.
Si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$, alors :

$$A' = P^{-1}AP.$$



**Exercice 7 – Matrice d'une application linéaire dans une nouvelle base :**

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (10x-y-z\,;-6x+9y-3z\,;-2x-y+11z) \end{array}$$

Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1\,;3\,;1)\,;(1\,;0\,;-2)\,;(0\,;1\,;-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de $f$ dans cette base.

Idée

On peut aussi montrer directement que les 3 vecteurs sont libres à partir d'une combinaison linéaire nulle. C'est au choix !

### Exercice 7 – Matrice d'une application linéaire dans une nouvelle base :

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (10x-y-z\,;-6x+9y-3z\,;-2x-y+11z) \end{array}$$

Montrer que la famille $\mathcal{B}=((1\,;3\,;1)\,;(1\,;0\,;-2)\,;(0\,;1\,;-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de $f$ dans cette base.

Notons $\mathrm{P}=\mathrm{P}_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$ où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Idée

On peut aussi montrer directement que les 3 vecteurs sont libres à partir d'une combinaison linéaire nulle. C'est au choix !

### Exercice 7 – Matrice d'une application linéaire dans une nouvelle base :

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (10x-y-z\,;-6x+9y-3z\,;-2x-y+11z) \end{array}$$

Montrer que la famille $\mathcal{B}=((1\,;3\,;1)\,;(1\,;0\,;-2)\,;(0\,;1\,;-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de $f$ dans cette base.

Notons $\mathrm{P}=\mathrm{P}_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$ où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On a :

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 7 – Matrice d'une application linéaire dans une nouvelle base :

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (10x-y-z\,;-6x+9y-3z\,;-2x-y+11z) \end{array}$$

Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1\,;3\,;1)\,;(1\,;0\,;-2)\,;(0\,;1\,;-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de $f$ dans cette base.

On applique la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{\mathcal{L}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

### Exercice 7 – Matrice d'une application linéaire dans une nouvelle base :

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (10x-y-z\,;-6x+9y-3z\,;-2x-y+11z) \end{array}$$

Montrer que la famille $\mathcal{B}=((1\,;3\,;1)\,;(1\,;0\,;-2)\,;(0\,;1\,;-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de $f$ dans cette base.

On applique la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{\mathcal{L}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Donc, $\mathrm{P} \sim_{\mathcal{L}} \mathrm{I}_n$ *i.e.* $\mathrm{P}$ est inversible et $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

### Exercice 7 – Matrice d'une application linéaire dans une nouvelle base :

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (10x-y-z\,;-6x+9y-3z\,;-2x-y+11z) \end{array}$$

Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1\,;3\,;1)\,;(1\,;0\,;-2)\,;(0\,;1\,;-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de $f$ dans cette base.

De plus, $\mathrm{P}^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ se lit dans le membre de droite de la matrice augmentée.

### Exercice 7 – Matrice d'une application linéaire dans une nouvelle base :

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (10x-y-z\,;-6x+9y-3z\,;-2x-y+11z) \end{array}$$

Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1\,;3\,;1)\,;(1\,;0\,;-2)\,;(0\,;1\,;-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de $f$ dans cette base.

Reste à trouver la matrice de $f$ dans $\mathcal{B}$.

### Exercice 7 – Matrice d'une application linéaire dans une nouvelle base :

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (10x-y-z\,;-6x+9y-3z\,;-2x-y+11z) \end{array}$$

Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1\,;3\,;1)\,;(1\,;0\,;-2)\,;(0\,;1\,;-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de $f$ dans cette base.

Reste à trouver la matrice de $f$ dans $\mathcal{B}$.

On a déjà $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -6 & 9 & -3 \\ -2 & -1 & 11 \end{pmatrix}$.

### Exercice 7 – Matrice d'une application linéaire dans une nouvelle base :

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (10x-y-z\,;-6x+9y-3z\,;-2x-y+11z) \end{array}$$

Montrer que la famille $\mathcal{B}=((1\,;3\,;1)\,;(1\,;0\,;-2)\,;(0\,;1\,;-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de $f$ dans cette base.

Reste à trouver la matrice de $f$ dans $\mathcal{B}$.

On a déjà $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)=\begin{pmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -6 & 9 & -3 \\ -2 & -1 & 11 \end{pmatrix}$.

On utilise la formule de changement de base : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)\mathrm{P}$.

**Remarque**

On dit que l'on a diagonalisé $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)$.

### Exercice 7 – Matrice d'une application linéaire dans une nouvelle base :

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (10x-y-z\,;-6x+9y-3z\,;-2x-y+11z) \end{array}$$

Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1\,;3\,;1)\,;(1\,;0\,;-2)\,;(0\,;1\,;-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de $f$ dans cette base.

Ainsi, après calcul, on obtient :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

**Définition 5 – Matrices semblables :**

Deux matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

**Définition 5 – Matrices semblables :**

Deux matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

**Remarque :** Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

En particulier, elles ont

**Définition 5 – Matrices semblables :**

Deux matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

**Remarque :** Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

En particulier, elles ont

- le même rang,

**Définition 5 – Matrices semblables :**

Deux matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

**Remarque :** Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

En particulier, elles ont

- le même rang,
- les mêmes polynômes annulateurs

**Définition 5 – Matrices semblables :**

Deux matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

**Remarque :** Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

En particulier, elles ont

- le même rang,
- les mêmes polynômes annulateurs
- et les mêmes valeurs propres (on verra cela plus tard).

### Exemple 6 – Matrices semblables :

Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f$ : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (-3x-2y-4z\,;4x+3y+5z\,;2z)\,. \end{array}$

et posons $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

### Exemple 6 – Matrices semblables :

Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f$ : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (-3x-2y-4z\,;4x+3y+5z\,;2z)\,. \end{array}$

et posons $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Les matrices $\mathrm{A}$ et $\mathrm{A}'$ sont donc semblables.

# V. Bilan et savoir-faire exigibles en ECG2


1. Matrices et applications linéaires
2. Noyau, Image et Rang d'une matrice
3. Changement de bases et matrices semblables
4. **Bilan et savoir-faire exigibles en ECG2**

# V. Bilan et savoir-faire exigibles en ECG2

À l'issue de ce chapitre, l'étudiant doit savoir parfaitement :

- **Construire la matrice d'un endomorphisme** dans une base donnée.

# V. Bilan et savoir-faire exigibles en ECG2

À l'issue de ce chapitre, l'étudiant doit savoir parfaitement :

- **Construire la matrice d'un endomorphisme** dans une base donnée.
- **Déterminer le noyau** $\ker(A)$ par la résolution d'un système linéaire.

# V. Bilan et savoir-faire exigibles en ECG2

À l'issue de ce chapitre, l'étudiant doit savoir parfaitement :

- **Construire la matrice d'un endomorphisme** dans une base donnée.
- **Déterminer le noyau** $\ker(A)$ par la résolution d'un système linéaire.
- **Déterminer l'image** $\mathrm{Im}(A)$ **et le rang** $\mathrm{rg}(A)$ à l'aide du théorème du rang.

# V. Bilan et savoir-faire exigibles en ECG2

À l'issue de ce chapitre, l'étudiant doit savoir parfaitement :

- **Construire la matrice d'un endomorphisme** dans une base donnée.
- **Déterminer le noyau** $\ker(A)$ par la résolution d'un système linéaire.
- **Déterminer l'image** $\mathrm{Im}(A)$ **et le rang** $\mathrm{rg}(A)$ à l'aide du théorème du rang.
- **Appliquer les formules de changement de base** ($X = PX'$ et $A' = P^{-1}AP$).

# V. Bilan et savoir-faire exigibles en ECG2

À l'issue de ce chapitre, l'étudiant doit savoir parfaitement :

- **Construire la matrice d'un endomorphisme** dans une base donnée.
- **Déterminer le noyau** $\ker(A)$ par la résolution d'un système linéaire.
- **Déterminer l'image** $\mathrm{Im}(A)$ **et le rang** $\mathrm{rg}(A)$ à l'aide du théorème du rang.
- **Appliquer les formules de changement de base** ($X = PX'$ et $A' = P^{-1}AP$).
- **Démontrer qu'une matrice est inversible** en étudiant son noyau ou son rang.