TD 6 — Applications linéaires et représentation matricielle

I. Applications linéaires, noyaux, images et matrices associées

Exercice VI.1 – (Le minimum à savoir-faire)

Pour les applications suivantes :

1. Montrer qu'elles sont linéaires.
2. Déterminer une base du noyau et dire si elles sont injectives.
3. Déterminer une base de l'image et dire si elles sont surjectives.
4. Donner la matrice de l'application linéaire relativement aux bases canoniques.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x-5y. \end{array}$$

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y,3x+y). \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x+y,3x). \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,2y,-x+3y+z). \end{array}$$

$$f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{XP}'. \end{array}$$

$$f_6 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{AM}. \end{array} \quad \text{où } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice VI.2 – (Rang d'une matrice)

Déterminer le rang de chacune des matrices ci-dessous et préciser lorsqu'elle est carrée si elle est inversible :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice VI.3 – (Un isomorphisme remarquable (Lagrange))

Soient a_1, a_2, a_3 trois réels distincts deux à deux. On considère l'application

$$\mathrm{T} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \left(\mathrm{P}(a_1);\mathrm{P}(a_2);\mathrm{P}(a_3)\right). \end{array}$$

1. Montrer que T est une application linéaire.
2. Montrer que T est injective puis bijective.
3. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, déterminer $\mathrm{T}^{-1}(e_i)$, pour $i \in \{1,2,3\}$.

Exercice VI.4 – (Matrice associée et noyaux)

Soit u l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} u : & \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x+y-t \\ x+8y-9z-2t \\ x-2y+3z \end{pmatrix}. \end{array}$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker(u)$ et en donner une base.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(u)$ et en donner une base.
4. Donner la matrice de u relativement aux bases canoniques.

Exercice VI.5 – (Matrice d'un automorphisme sur $\mathbb{R}_2[X]$)

On considère l'application $\begin{array}{rccc} \mathrm{T} : & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ & \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}+\mathrm{P}'. \end{array}$

1. Montrer que T est une application linéaire.
2. Donner la matrice de T dans la base canonique puis en déduire que $\mathrm{T} \in \mathcal{G}l(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}])$.
3. Trouver T^{-1}.

Exercice VI.6 – (Polynôme annulateur d'une matrice et inversion)

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - 5\mathrm{X} + 4$ est un polynôme annulateur de A.
2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

II. Changements de base et matrices semblables

Exercice VI.7 – (EDHEC 2016 : Noyau d'un endomorphisme décalé)

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base de $\ker(f - 2\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3})$.

Exercice VI.8 – (Changement de base dans un espace de polynômes)

On note $\mathcal{B}_1 = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}_2 = (R_0, R_1, R_2)$ la famille définie par :

$$R_0(X) = 1, \quad R_1(X) = X - 1 \quad \text{et} \quad R_2(X) = (X-1)^2.$$

On considère le polynôme $T(X) = 2(X-1)^2 - 3(X-1) - 4$.

1. Quel est le vecteur colonne associé à T dans la base $\mathcal{B}_1$?
2. a. Démontrer que $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   b. Quel est le vecteur colonne associé à T dans la base $\mathcal{B}_2$?
3. a. Déterminer les matrices de passage P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ et Q de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$.
   b. Retrouver $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(T)$ à l'aide de la formule de changement de base connaissant $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(T)$.

Exercice VI.9 – (Changement de base pour un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (Triangularisation))

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer l'image du vecteur $u = e_1 + e_2 + 2e_3$ par f.
2. On pose $v = 3e_2 + 2e_3$ et $\mathcal{B}' = (u, v, e_3)$. Soit P la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
   a. Démontrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b. Calculer la matrice inverse de P.
   c. Déterminer la matrice T de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.

Exercice VI.10 – (Changement de base rectangulaire (EDHEC))

On considère l'application linéaire f : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+z, x-z) \end{array}$ ainsi que les familles

$$\mathcal{B} = ((1,1,-1),(-1,1,1),(1,-1,1)) \text{ de } \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = ((1,1),(-1,1)) \text{ de } \mathbb{R}^2.$$

1. Déterminer la matrice A associée à f relativement aux bases canoniques.
2. Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de leurs espaces respectifs.
3. Déterminer la matrice B associée à f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
4. En déduire le rang et une base de l'image et du noyau de f.