TD 6

Applications linéaires et représentation matricielle

I. Applications linéaires, noyaux, images et matrices associées

Exercice VI.1 – (Le minimum à savoir-faire) [Correction p. 4]

Pour les applications suivantes :

1. Montrer qu'elles sont linéaires.
2. Déterminer une base du noyau et dire si elles sont injectives.
3. Déterminer une base de l'image et dire si elles sont surjectives.
4. Donner la matrice de l'application linéaire relativement aux bases canoniques.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x-5y. \end{array}$$

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y,3x+y). \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x+y,3x). \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,2y,-x+3y+z). \end{array}$$

$$f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{XP}'. \end{array}$$

$$f_6 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{AM}. \end{array} \quad \text{où } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice VI.2 – (Rang d'une matrice) [Correction p. 5]

Déterminer le rang de chacune des matrices ci-dessous et préciser lorsqu'elle est carrée si elle est inversible :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice VI.3 – (Un isomorphisme remarquable (Lagrange)) [Correction p. 5]

Soient a_1, a_2, a_3 trois réels distincts deux à deux. On considère l'application

$$\mathrm{T} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \left(\mathrm{P}(a_1);\mathrm{P}(a_2);\mathrm{P}(a_3)\right). \end{array}$$

1. Montrer que T est une application linéaire.
2. Montrer que T est injective puis bijective.
3. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, déterminer $\mathrm{T}^{-1}(e_i)$, pour $i \in \{1,2,3\}$.

Exercice VI.4 – (Matrice associée et noyaux) [Correction p. 5]

Soit u l'application définie par :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x+y-t \\ x+8y-9z-2t \\ x-2y+3z \end{pmatrix}. \end{array}$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker(u)$ et en donner une base.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(u)$ et en donner une base.
4. Donner la matrice de u relativement aux bases canoniques.

Exercice VI.5 – (Matrice d'un automorphisme sur $\mathbb{R}_2[X]$) [Correction p. 6]

On considère l'application $\mathrm{T} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}+\mathrm{P}'. \end{array}$

1. Montrer que T est une application linéaire.
2. Donner la matrice de T dans la base canonique puis en déduire que $\mathrm{T} \in \mathcal{G}l(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}])$.
3. Trouver T^{-1}.

Exercice VI.6 – (Polynôme annulateur d'une matrice et inversion) [Correction p. 6]

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - 5\mathrm{X} + 4$ est un polynôme annulateur de A.
2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

II. Changements de base et matrices semblables

Exercice VI.7 – (EDHEC 2016 : Noyau d'un endomorphisme décalé) [Correction p. 7]

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base de $\ker(f - 2\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3})$.

Exercice VI.8 – (Changement de base dans un espace de polynômes) [Correction p. 7]

On note $\mathcal{B}_1 = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}_2 = (R_0, R_1, R_2)$ la famille définie par :

$$R_0(X) = 1, \quad R_1(X) = X - 1 \quad \text{et} \quad R_2(X) = (X-1)^2.$$

On considère le polynôme $T(X) = 2(X-1)^2 - 3(X-1) - 4$.

1. Quel est le vecteur colonne associé à T dans la base $\mathcal{B}_1$?
2. a. Démontrer que $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   b. Quel est le vecteur colonne associé à T dans la base $\mathcal{B}_2$?
3. a. Déterminer les matrices de passage P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ et Q de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$.
   b. Retrouver $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(T)$ à l'aide de la formule de changement de base connaissant $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(T)$.

Exercice VI.9 – (Changement de base pour un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (Triangularisation)) [Correction p. 8]

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer l'image du vecteur $u = e_1 + e_2 + 2e_3$ par f.
2. On pose $v = 3e_2 + 2e_3$ et $\mathcal{B}' = (u, v, e_3)$. Soit P la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
   a. Démontrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b. Calculer la matrice inverse de P.
   c. Déterminer la matrice T de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.

Exercice VI.10 – (Changement de base rectangulaire (EDHEC)) [Correction p. 8]

On considère l'application linéaire f : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+z, x-z) \end{array}$ ainsi que les familles

$$\mathcal{B} = ((1,1,-1),(-1,1,1),(1,-1,1)) \text{ de } \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = ((1,1),(-1,1)) \text{ de } \mathbb{R}^2.$$

1. Déterminer la matrice A associée à f relativement aux bases canoniques.
2. Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de leurs espaces respectifs.
3. Déterminer la matrice B associée à f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
4. En déduire le rang et une base de l'image et du noyau de f.

Corrigés

Correction de l'exercice VI.1 : [Énoncé]

Attention
Ne pas confondre le vecteur $X \in \mathbb{R}^2$ et sa coordonnée $x \in \mathbb{R}$.

f_1 :

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $X = (x\,;y) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = (x'\,;y') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f_1(\lambda \cdot X + Y) &= f_1((\lambda x + x'\,;\lambda y + y')) = 2(\lambda x + x') - 5(\lambda y + y') \\ &= \lambda(2x - 5y) + (2x' - 5y') = \lambda f_1((x\,;y)) + f_1((x'\,;y')) \\ &= \lambda \cdot f_1(X) + f_1(Y). \end{aligned}$$

Donc f_1 est linéaire. C'est une forme linéaire.

2. Soit $X = (x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

$$X \in \ker(f_1) \iff f_1(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff 2x - 5y = 0 \iff X = y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Donc $\ker(f_1) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ (f_1 n'est pas injective). Le vecteur $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ forme une base de $\ker(f_1)$ (dimension 1).

3. On considère la base canonique de $\mathbb{R}^2$. $\text{Im}(f_1) = \text{Vect}(2, -5) = \mathbb{R}$ (f_1 est surjective).

4. $\text{Mat}(f_1) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$.

f_2 :

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $X = (x\,;y) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = (x'\,;y') \in \mathbb{R}^2$. Par calcul direct, f_2 est linéaire.

2. $\ker(f_2) = 0_{\mathbb{R}^2}$ donc f_2 est injective.

3. $\text{Im}(f_2) = \mathbb{R}^2$ donc f_2 est surjective.

4. $\text{Mat}(f_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

f_3 :

1. Linéarité démontrée par calcul direct.

2. $\ker(f_3) = 0_{\mathbb{R}^2}$ donc f_3 est injective.

3. $\dim(\text{Im}(f_3)) = 2$ (non surjective). $\text{Im}(f_3) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

4. $\text{Mat}(f_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

f_4 :

1. Linéarité démontrée par calcul direct.

2. $\ker(f_4) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc f_4 est injective.

3. $\text{Im}(f_4) = \mathbb{R}^3$ donc f_4 est surjective.

4. $\text{Mat}(f_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

f_5 :

1. Linéarité de $P \longmapsto XP'$.

2. $\ker(f_5) = \mathbb{R}_0[X]$, $\dim(\ker(f_5)) = 1$ (non injective).

3. $\text{Im}(f_5) = \text{Vect}(X, X^2)$, non surjective.

4. $\text{Mat}(f_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

f_6 : 1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\text{M}, \text{M}' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$f_6(\lambda \text{M} + \text{M}') = \text{A}(\lambda \text{M} + \text{M}') = \lambda \text{AMA} + \text{AM}' = \lambda f_6(\text{M}) + f_6(\text{M}').$$

Donc f_6 est linéaire.

2. $\ker(f_6) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ donc f_6 est injective.
3. $\text{Im}(f_6) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc f_6 est surjective (isomorphisme).
4. $\text{Mat}(f_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice VI.2 : [Énoncé]

- Les matrices A, C, D et E ne sont pas carrées donc elles ne peuvent être inversibles.
- $\text{rg}(\text{A}) = 1$ car A est non nulle.
- Les vecteurs colonnes de B et D ne sont pas colinéaires donc libres et $\text{rg}(\text{B}) = \text{rg}(\text{D}) = 2$.
- Les vecteurs lignes de E ne sont pas colinéaires donc libres et $\text{rg}(\text{E}) = 2$.
- Les vecteurs colonnes de C sont liés donc $\text{rg}(\text{C}) = 1$.
- Pour F, en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes, on obtient trois pivots, donc $\text{rg}(\text{F}) = 3$. La matrice F est carrée de rang maximal, elle est donc inversible.

Correction de l'exercice VI.3 : [Énoncé]

1. Linéarité démontrée par calcul direct.
2. Un polynôme de degré 2 ayant 3 racines distinctes est nécessairement nul, donc $\ker(\text{T}) = 0_{\mathbb{R}_2[\text{X}]}$ (injectivité). Par le théorème du rang, T est bijective.
3. Les antécédents de la base canonique forment la base de Lagrange de $\mathbb{R}_2[\text{X}]$:

$$\text{P}_1 = \frac{(\text{X}-a_2)(\text{X}-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}, \quad \text{P}_2 = \frac{(\text{X}-a_3)(\text{X}-a_1)}{(a_2-a_3)(a_2-a_1)} \quad \text{et} \quad \text{P}_3 = \frac{(\text{X}-a_1)(\text{X}-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}.$$

Correction de l'exercice VI.4 : [Énoncé]

1. En écrivant $u(\text{X}) = \text{AX}$ avec $\text{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & -9 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, on en déduit immédiatement que u est linéaire.
2. Par résolution du système homogène $\text{AX} = 0$, on trouve :

$$\ker(u) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \right).$$

Ces deux vecteurs forment une base de $\ker(u)$ ($\dim(\ker(u)) = 2$).

3. Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}\,(u)) = 4-2 = 2$. En extrayant deux colonnes libres de A :

$$\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-9\\3\end{pmatrix}\right).$$

4. $\mathrm{Mat}(u) = \mathrm{A} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 8 & -9 & -2\\ 1 & -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice VI.5 : [Énoncé]

1. Linéarité immédiate par propriété de la dérivation.
2. Dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{T}) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

   Cette matrice est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux non nuls, donc elle est inversible : $\mathrm{T} \in \mathcal{G}l(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}])$.

3. Par inversion de la matrice ou par calcul direct, on trouve :

$$\begin{array}{rccc}\mathrm{T}^{-1}: & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]\\ & \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}-\mathrm{P}'+\mathrm{P}''.\end{array}$$

Correction de l'exercice VI.6 : [Énoncé]

1. Par simple calcul matriciel, on vérifie que :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^2 - 5\mathrm{A} + 4\mathrm{I}_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$

   Donc P est un polynôme annulateur de A.

2. En factorisant l'égalité précédente :

$$\mathrm{A}^2 - 5\mathrm{A} = -4\mathrm{I}_3 \iff \mathrm{A} \times \left(-\frac{1}{4}(\mathrm{A}-5\mathrm{I}_3)\right) = \mathrm{I}_3.$$

   On en déduit que A est inversible et que son inverse est :

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{4}(5\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice VI.7 : [Énoncé]

Soient $u \in \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} u \in \ker(f - 2\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3}) &\iff (f - 2\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff (\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3)\mathrm{X} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x - y + z = 0 \iff \mathrm{X} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ étant non colinéaires, ils forment une base de $\ker(f - 2\mathrm{I}_{\mathbb{R}^3})$ qui est de dimension 2.

Correction de l'exercice VI.8 : [Énoncé]

1. En développant, on a $\mathrm{T}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}^2 - 7\mathrm{X} + 1$.

   Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\mathrm{T}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. a. En étudiant une combinaison linéaire nulle $a\mathrm{R}_0 + b\mathrm{R}_1 + c\mathrm{R}_2 = 0_{\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]}$, on identifie les coefficients par degré pour obtenir un système triangulaire dont la seule solution est $a = b = c = 0$. La famille $\mathcal{B}_2$ est libre et forme une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

   b. Comme T est directement exprimé sous la forme de combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}_2$ ($\mathrm{T} = -4\mathrm{R}_0 - 3\mathrm{R}_1 + 2\mathrm{R}_2$), on a directement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\mathrm{T}) = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. a. La matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$ s'obtient en écrivant les coordonnées des polynômes de $\mathcal{B}_2$ dans $\mathcal{B}_1$:

   $$\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   La matrice inverse $\mathrm{Q} = \mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$ s'obtient par substitution directe :

   $$\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   b. D'après la formule de changement de base pour un vecteur :

   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\mathrm{T}) = \mathrm{P}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\mathrm{T}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice VI.9 : [Énoncé]

1. Le vecteur u est représenté dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, d'où :

$$f(u) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = u.$$

2. a. Montrons que la famille (u, v, e_3) est libre dans $\mathbb{R}^3$. Comme elle comporte trois vecteurs dans un espace de dimension 3, elle en forme une base.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$a\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = 0 \\ a + 3b = 0 \\ 2a + 2b + c = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Les trois vecteurs de la famille $\mathcal{B}'$ sont donc libres et forment une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Comme $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$, la matrice de passage $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible :

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

À l'aide de la matrice augmentée, on obtient :

$$\mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

c. D'après la formule de changement de base, on sait que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\mathrm{P}.$$

Donc :

$$\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a ainsi triangularisé la matrice de f.

Correction de l'exercice VI.10 : [Énoncé]

1. Par calcul des images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. La liberté de $\mathcal{B}'$ est immédiate (deux vecteurs non colinéaires). Pour $\mathcal{B}$, la résolution d'une combinaison linéaire nulle montre que les trois vecteurs sont libres, donc forment une base de $\mathbb{R}^3$.

3. En posant $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{B}}$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2},\mathcal{B}'}$, la formule de changement de base donne :

$$\mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. La matrice B permet de lire directement :
   - $\mathrm{rg}\,(f) = 2$.
   - $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}^2$ (l'application est surjective).
   - $\ker(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}$.