Remédiation 30 — Applications linéaires : noyau, image, rang, matrice

Exercice VI.1 – (Théorème du rang en situation)

Dans chaque cas, conclure à l'aide du théorème du rang.

1. $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ est linéaire de rang 3. Que vaut $\dim \ker(f)$?
2. f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\ker(f) = \{0\}$. Que dire de f ?
3. Une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ peut-elle être surjective ?

Exercice VI.2 – (Une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y,\ y + z)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $\ker(f)$ et sa dimension.
3. En déduire le rang de f et $\mathrm{Im}(f)$.
4. Donner la matrice de f dans les bases canoniques.

Exercice VI.3 – (Un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)

Soit $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{tr}(\mathrm{M})\mathrm{I} - \mathrm{M}$, où I est la matrice identité. On note $\mathcal{B} = (\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_3, \mathrm{E}_4)$ la base canonique.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice A de φ dans $\mathcal{B}$.
3. Calculer A^2. En déduire que φ est bijectif et préciser φ^{-1}.

Exercice VI.4 – (L'application dérivation)

Soit $\mathrm{D} : \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ définie par $\mathrm{D}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'$.

1. Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
2. Déterminer $\ker(\mathrm{D})$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{D})$. Vérifier le théorème du rang.
3. Donner la matrice de D dans la base $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$.