DM 8 Applications linéaires et matrices

Exercice 1 – (Un endomorphisme de l'espace des polynômes) :

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ & \mathrm{P} & \longmapsto & (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}'' + 5\mathrm{X}\mathrm{P}'. \end{array}$$

On rappelle que $\mathcal{C} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

Partie I – Étude de l'endomorphisme

1. Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
2. Pour $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $\Psi(\mathrm{P})$ en fonction de a, b et c.
3. Déterminer les images par Ψ des vecteurs de la base canonique $\mathcal{C}$.
4. En déduire la matrice M de Ψ dans la base $\mathcal{C}$.

Partie II – Noyau, image et rang

5. Déterminer $\ker(\Psi)$ et en donner une base.
6. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\Psi)$.
7. Déterminer le rang de Ψ et vérifier le théorème du rang.
8. L'endomorphisme Ψ est-il injectif ? Surjectif ? Automorphisme ? Justifier.

Partie III – Composition

9. Calculer $\Psi^2(1)$, $\Psi^2(\mathrm{X})$ et $\Psi^2(\mathrm{X}^2)$.
10. En déduire la matrice de Ψ^2 dans la base $\mathcal{C}$.
11. Déterminer, pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, l'expression de $\Psi^2(\mathrm{P})$.
12. L'application Ψ^2 est-elle nulle ? Comparer $\ker(\Psi)$ et $\ker(\Psi^2)$.