DM 7 Applications linéaires et matrices

Exercice 1 – (Modélisation d'un transfert entre trois postes) :

On considère un système constitué de trois postes successifs. À chaque étape, l'état du système est décrit par un vecteur

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

où x, y et z représentent les quantités présentes respectivement sur les trois postes.

On suppose qu'au cours d'une étape, la quantité du deuxième poste passe sur le premier, celle du troisième passe sur le deuxième, tandis que le premier poste est vidé. Le nouvel état du système est donc donné par l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Partie I – Étude de l'application linéaire

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les images par f des vecteurs e_1, e_2 et e_3.
   En déduire la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$.
3. Calculer $f^2(x, y, z)$ puis $f^3(x, y, z)$. En déduire les matrices A^2 et A^3.
4. Montrer que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ mais que $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$. On dit que f est un endomorphisme nilpotent.

Partie II – Noyau, image et rang

5. Déterminer le noyau de f. On donnera une base de $\ker(f)$ ainsi que sa dimension.
6. Déterminer l'image de f. On donnera une base de $\mathrm{Im}(f)$ ainsi que sa dimension.
7. Vérifier le théorème du rang pour f.
8. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Justifier les réponses.
9. Déterminer, en fonction de a, b et c, les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

admette au moins une solution. Lorsque c'est le cas, déterminer l'ensemble de ses solutions.

Partie III – Polynômes d'endomorphismes et automorphismes

10. On note Id l'identité de $\mathbb{R}^3$.
    a. Développer $(\mathrm{Id} - f) \circ (\mathrm{Id} + f + f^2)$.
    b. En déduire que $\mathrm{Id} - f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et exprimer $(\mathrm{Id} - f)^{-1}$ en fonction de Id, f et f^2.
11. En déduire une expression explicite de l'application $(\mathrm{Id} - f)^{-1}$.
12. Déterminer la matrice de $(\mathrm{Id} - f)^{-1}$ dans la base canonique. Vérifier le résultat en calculant le produit de cette matrice par $\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}$.

Partie IV – Changement de base et matrices semblables

On considère la famille

$$\mathcal{B}' = (e_3, e_2, e_1).$$

13. Justifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
14. Déterminer P^{-1}. Que remarque-t-on ?
15. Calculer directement les coordonnées de $f(e_3)$, $f(e_2)$ et $f(e_1)$ dans la base $\mathcal{B}'$.
    En déduire la matrice A' de f dans cette base.
16. Vérifier que l'on retrouve le résultat précédent en utilisant la formule de changement de base

$$\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

17. Que peut-on dire des matrices A et A' ? Citer deux propriétés communes à ces deux matrices.