Sujet 1 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Énoncer le théorème de transfert pour une variable aléatoire $\mathbb{Z} = g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ dans le cas fini, puis préciser la condition d'existence (sommabilité) dans le cas infini.

Exercice 1 – Espérance d'un produit par transfert (cas fini) :

Soit $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=i] \cap [\mathbb{Y}=j]) = \frac{4ij}{n^2(n+1)^2}$$

1. Vérifier que la somme des probabilités conjointes vaut 1.
2. En utilisant le théorème de transfert, calculer l'espérance $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$ de la variable $\mathbb{Z} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$.

1. On calcule la somme double des probabilités :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{4ij}{n^2(n+1)^2} = \frac{4}{n^2(n+1)^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right)$$

Comme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}([\mathbb{X}=i] \cap [\mathbb{Y}=j]) = \frac{4}{n^2(n+1)^2} \times \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 1$$

2. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont à support fini, donc $\mathbb{Z} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$ admet une espérance. Par le théorème de transfert :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (ij)\cdot \mathbf{P}([\mathbb{X}=i] \cap [\mathbb{Y}=j]) = \frac{4}{n^2(n+1)^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right)$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, d'où :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Z}) = \frac{4}{n^2(n+1)^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^2 = \frac{(2n+1)^2}{9}$$

Exercice 2 – Forme linéaire sur $\mathbb{R}_2[X]$, noyau et supplémentaire :

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \varphi(P) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que φ est une application linéaire (forme linéaire sur $\mathbb{R}_2[X]$).

2. Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et en déduire $\dim \ker(\varphi)$ à l'aide du théorème du rang.
3. Déterminer une base de $\ker(\varphi)$ et montrer que $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}] = \ker(\varphi) \oplus \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$.

1. Par linéarité de l'intégrale, pour tous $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:
$$\varphi(\lambda \mathrm{P} + \mu \mathrm{Q}) = \int_0^1 (\lambda \mathrm{P}(t) + \mu \mathrm{Q}(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_0^1 \mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\varphi(\mathrm{P}) + \mu\varphi(\mathrm{Q})$$
Donc $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}], \mathbb{R})$.
2. On a $\varphi(1) = \displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1 \neq 0$, donc $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel non nul de $\mathbb{R}$ (qui est de dimension 1) : ainsi $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$. Par le théorème du rang, $\dim \ker(\varphi) = \dim \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] - \mathrm{rg}(\varphi) = 3 - 1 = 2$.
3. Soit $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. On a :
$$\mathrm{P} \in \ker(\varphi) \iff \int_0^1 (at^2 + bt + c)\,\mathrm{d}t = 0 \iff \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0 \iff c = -\frac{a}{3} - \frac{b}{2}$$
Ainsi, $\mathrm{P} = a\left(\mathrm{X}^2 - \dfrac{1}{3}\right) + b\left(\mathrm{X} - \dfrac{1}{2}\right)$. Les polynômes $\mathrm{P}_1 = 3\mathrm{X}^2 - 1$ et $\mathrm{P}_2 = 2\mathrm{X} - 1$ n'étant pas colinéaires, $(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ est une base de $\ker(\varphi)$.
Soit $\mathrm{P} \in \ker(\varphi) \cap \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$. Alors $\mathrm{P} = c$ est constant et $\varphi(\mathrm{P}) = c = 0$, d'où $\mathrm{P} = 0$. De plus, $\dim \ker(\varphi) + \dim \mathbb{R}_0[\mathrm{X}] = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. Par conséquent, $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}] = \ker(\varphi) \oplus \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$.

Sujet 2 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Définir une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Rappeler la caractérisation pratique avec $\lambda x + \mu y$.

Exercice 1 – Transfert dans le cas infini et sommabilité :

Considérons deux variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall\,(j,k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=j] \cap [\mathbb{Y}=k]) = \frac{j+k}{e\,2^{j+k}\,j!\,k!}$$

Justifier que la variable aléatoire $\mathbb{Z} = 2^{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}$ admet une espérance et la déterminer.

D'après le théorème de transfert, $2^{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}$ admet une espérance si et seulement si la série double $\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} 2^{j+k}\mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k])$ est absolument convergente, c'est-à-dire convergente car elle est à termes positifs.
Soient $j \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} 2^{j+k}\mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k]) = \frac{1}{e\,j!}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{j+k}{k!} = \frac{1}{e\,j!}\left(j\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{(k-1)!}\right)$$

Par reconnaissance de la série exponentielle $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} = e$, la série en k converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{j+k}\mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k]) = \frac{1}{e\,j!}(je+e) = \frac{j+1}{j!}$$

Ensuite, la série $\sum_{j\geqslant 0}\frac{j+1}{j!} = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j}{j!} + \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}$ est convergente de somme $e+e=2e$.
Ainsi, $2^{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}$ admet une espérance et $\mathbf{E}(2^{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}) = 2e$.

Exercice 2 – Sommabilité et espérance d'une fonction d'un couple infini :

Soient $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. On considère deux variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall\,(j,k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k]) = p^2q^{j+k}$$

pour tout $(j,k) \in \mathbb{N}^2$.)

1. Vérifier que l'on définit bien une loi de probabilité conjointe sur $\mathbb{N}^2$ et montrer que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes.
2. Montrer que la variable aléatoire $\mathbb{Z} = \dfrac{1}{\mathbb{X}+\mathbb{Y}+1}$ admet une espérance et calculer $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$ en fonction de p et q.

1. Les probabilités sont positives. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série géométrique $\sum_{k\geqslant 0} p^2q^{j+k} = p^2q^j\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = p^2q^j\frac{1}{1-q} = pq^j$ converge. Ensuite, $\sum_{j=0}^{+\infty} pq^j = p\frac{1}{1-q} = 1$. La famille est donc sommable de somme 1.

   De plus, les lois marginales sont $\mathbf{P}(\mathbb{X} = j) = pq^j$ et $\mathbf{P}(\mathbb{Y} = k) = pq^k$, d'où $\mathbf{P}([\mathbb{X} = j] \cap [\mathbb{Y} = k]) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = j)\mathbf{P}(\mathbb{Y} = k)$: $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes.

2. Par le théorème de transfert, comme tous les termes sont positifs, $\mathbb{Z}$ admet une espérance si et seulement si la série double $\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} \frac{p^2q^{j+k}}{j+k+1}$ converge.

   Regroupons les termes selon la valeur $n = j + k \in \mathbb{N}$ (pour un n fixé, il y a exactement $n + 1$ couples $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ tels que $j + k = n$) :

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\sum_{j+k=n}\frac{p^2q^{j+k}}{j+k+1} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}}(n+1)\frac{p^2q^n}{n+1} = p^2\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} q^n$$

   Comme $|q| < 1$, cette série géométrique converge lorsque $\mathrm{N} \to +\infty$ vers :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Z}) = p^2 \times \frac{1}{1-q} = \frac{p^2}{p} = p$$

Exercice 3 – Image d'une base, rang et construction d'une application linéaire :

Soient $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et $\mathrm{F} = \mathbb{R}^3$. On cherche s'il existe une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant :

$$f(1,1,0) = (1,2,3), \quad f(0,1,1) = (2,1,4) \quad \text{et} \quad f(1,0,-1) = (-1,1,-1)$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ et $u_3 = (1, 0, -1)$ est liée, et en déduire que la condition est compatible.
2. Déterminer alors une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant ces relations telle que $\mathrm{rg}(f) = 2$, et donner son expression analytique $f(x, y, z)$.

1. On remarque que $u_1 - u_2 = (1, 1, 0) - (0, 1, 1) = (1, 0, -1) = u_3$, donc $\mathcal{F}$ est liée. Par linéarité, toute application linéaire f vérifiant les deux premières conditions doit satisfaire :

$$f(u_3) = f(u_1 - u_2) = f(u_1) - f(u_2) = (1,2,3) - (2,1,4) = (-1,1,-1)$$

   La troisième égalité est donc bien cohérente avec la linéarité.

2. La famille (u_1, u_2) est libre (vecteurs non colinéaires). Complétons-la en une base de $\mathbb{R}^3$ avec $e_3 = (0, 0, 1)$:

$$\alpha(1,1,0)+\beta(0,1,1)+\gamma(0,0,1) = (0,0,0) \iff \alpha = 0,\ \alpha+\beta = 0,\ \beta+\gamma = 0 \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$$

   Pour imposer $\mathrm{rg}(f) = 2$, il suffit de choisir $f(e_3) = (0, 0, 0)$ (puisque $f(u_1)$ et $f(u_2)$ sont déjà non colinéaires). Comme $e_2 = u_2 - e_3$ et $e_1 = u_1 - e_2 = u_1 - u_2 + e_3$, on en déduit :

   — $f(e_3) = (0, 0, 0)$

   — $f(e_2) = f(u_2) - f(e_3) = (2, 1, 4)$

   — $f(e_1) = f(u_1) - f(e_2) = (1, 2, 3) - (2, 1, 4) = (-1, 1, -1)$

Ainsi, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(x,y,z) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = (-x+2y,\ x+y,\ -x+4y)$$

On a bien $\text{Im}(f) = \text{Vect}\big((-1,1,-1),(2,1,4)\big)$, de dimension 2.

Sujet 3 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Énoncer la formule de $\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y})$ dans le cas général, puis dans le cas de n variables mutuellement indépendantes. En déduire la variance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Exercice 1 – Covariance, corrélation et non-indépendance :

Soient $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3$ trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$. On pose $\mathbb{Y} = \mathbb{X}_1\mathbb{X}_2$ et $\mathbb{Z} = \mathbb{X}_2\mathbb{X}_3$.

1. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$, $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{Y}\mathbb{Z})$.
2. En déduire $\mathrm{Cov}(\mathbb{Y},\mathbb{Z})$. Les variables $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{Z}$ sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(\mathbb{Y},\mathbb{Z})$.

1. Par indépendance de $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$, $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}_1)\mathbf{E}(\mathbb{X}_2) = p^2$. De même, $\mathbf{E}(\mathbb{Z}) = p^2$.
   On a $\mathbb{Y}\mathbb{Z} = \mathbb{X}_1\mathbb{X}_2^2\mathbb{X}_3$. Or $\mathbb{X}_2(\Omega) = \{0,1\}$, donc $\mathbb{X}_2^2 = \mathbb{X}_2$. Par indépendance mutuelle de $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3$:
$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}\mathbb{Z}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}_1\mathbb{X}_2\mathbb{X}_3) = \mathbf{E}(\mathbb{X}_1)\mathbf{E}(\mathbb{X}_2)\mathbf{E}(\mathbb{X}_3) = p^3$$
2. Par la formule de Koenig-Huygens :
$$\mathrm{Cov}(\mathbb{Y},\mathbb{Z}) = \mathbf{E}(\mathbb{Y}\mathbb{Z}) - \mathbf{E}(\mathbb{Y})\mathbf{E}(\mathbb{Z}) = p^3 - p^4 = p^3(1-p)$$
   Comme $p \in]0,1[$, on a $\mathrm{Cov}(\mathbb{Y},\mathbb{Z}) \neq 0$. Par contraposée de la propriété sur les variables indépendantes, $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas indépendantes.
3. On remarque que $\mathbb{Y} \sim \mathcal{B}(p^2)$ et $\mathbb{Z} \sim \mathcal{B}(p^2)$ (car produit de deux Bernoulli indépendantes), donc $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{Z}) = p^2(1-p^2)$. Ainsi :
$$\rho(\mathbb{Y},\mathbb{Z}) = \frac{\mathrm{Cov}(\mathbb{Y},\mathbb{Z})}{\sigma(\mathbb{Y})\sigma(\mathbb{Z})} = \frac{p^3(1-p)}{p^2(1-p^2)} = \frac{p}{1+p}$$

Exercice 2 – Espérance du minimum et du maximum de deux lois géométriques :

Soient $\mathbb{X} \sim \mathcal{G}(p_1)$ et $\mathbb{Y} \sim \mathcal{G}(p_2)$ deux variables aléatoires indépendantes, avec $(p_1,p_2) \in]0,1[^2$. On pose $q_1 = 1-p_1$, $q_2 = 1-p_2$, $\mathbb{U} = \min(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ et $\mathbb{V} = \max(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

1. Déterminer la loi de $\mathbb{U}$, son espérance $\mathbf{E}(\mathbb{U})$ et sa variance $\mathbf{V}(\mathbb{U})$.
2. Exprimer $\mathbb{U}+\mathbb{V}$ et $\mathbb{U}\mathbb{V}$ en fonction de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.
3. En déduire que $\mathbb{V}$ admet une espérance et calculer $\mathbf{E}(\mathbb{V})$, puis $\mathrm{Cov}(\mathbb{U},\mathbb{V})$.

1. $\mathbb{U}(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$:
$$\mathbf{P}(\mathbb{U} > n) = \mathbf{P}([\mathbb{X} > n] \cap [\mathbb{Y} > n]) = \mathbf{P}(\mathbb{X} > n)\mathbf{P}(\mathbb{Y} > n) = q_1^n q_2^n = (q_1q_2)^n$$

D'où $\mathbf{P}(\mathbb{U}=n)=\mathbf{P}(\mathbb{U}>n-1)-\mathbf{P}(\mathbb{U}>n)=(q_1q_2)^{n-1}(1-q_1q_2)$. Ainsi, $\mathbb{U}\sim\mathcal{G}(1-q_1q_2)$, avec $1-q_1q_2=p_1+p_2-p_1p_2$. On en déduit $\mathbf{E}(\mathbb{U})=\dfrac{1}{1-q_1q_2}$ et $\mathbf{V}(\mathbb{U})=\dfrac{q_1q_2}{(1-q_1q_2)^2}$.

2. Pour tout couple de réels, $\min(\mathbb{X},\mathbb{Y})+\max(\mathbb{X},\mathbb{Y})=\mathbb{X}+\mathbb{Y}$, soit $\mathbb{U}+\mathbb{V}=\mathbb{X}+\mathbb{Y}$, et $\mathbb{U}\mathbb{V}=\mathbb{X}\mathbb{Y}$.
3. Comme $\mathbb{V}=\mathbb{X}+\mathbb{Y}-\mathbb{U}$ et que $\mathbb{X},\mathbb{Y},\mathbb{U}$ admettent une espérance, par linéarité :

$$\mathbf{E}(\mathbb{V})=\mathbf{E}(\mathbb{X})+\mathbf{E}(\mathbb{Y})-\mathbf{E}(\mathbb{U})=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{1-q_1q_2}$$

De même, $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes et admettent une espérance, donc $\mathbb{U}\mathbb{V}=\mathbb{X}\mathbb{Y}$ admet une espérance égale à $\mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y})=\dfrac{1}{p_1p_2}$. Par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{U},\mathbb{V})=\mathbf{E}(\mathbb{U}\mathbb{V})-\mathbf{E}(\mathbb{U})\mathbf{E}(\mathbb{V})=\frac{1}{p_1p_2}-\frac{1}{1-q_1q_2}\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{1-q_1q_2}\right)$$

Exercice 3 :

Soit ϕ : $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ \mathrm{P} & \longmapsto & (\mathrm{P}(1),\mathrm{P}'(1))\end{array}$

Montrer que ϕ est linéaire.

Déterminer $\ker\phi$ et $\mathrm{Im}\,\phi$.

Sujet 4 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Énoncer les propriétés de la covariance : symétrie, bilinéarité, covariance avec une constante et lien avec l'indépendance (en précisant bien le sens de l'implication).

Exercice 1 – Non corrélation n'implique pas indépendance :

On choisit au hasard et de façon équiprobable un point dans le plan parmi $(0,1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ et $(0,-1)$. On note $\mathbb{X}$ l'abscisse du point et $\mathbb{Y}$ son ordonnée.

1. Déterminer les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$, ainsi que leurs espérances.
2. Calculer $\text{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles corrélées ?
3. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles indépendantes ?

1. Par équiprobabilité (chaque point a pour probabilité $1/4$) :
$$\mathbf{P}(\mathbb{X}=-1)=\frac{1}{4},\quad \mathbf{P}(\mathbb{X}=0)=\frac{1}{2},\quad \mathbf{P}(\mathbb{X}=1)=\frac{1}{4}$$
Par symétrie, $\mathbb{Y}$ suit la même loi. On en déduit $\mathbf{E}(\mathbb{X})=0$ et $\mathbf{E}(\mathbb{Y})=0$.
2. Pour chacun des quatre points possibles, le produit de l'abscisse par l'ordonnée est nul, donc $\mathbb{X}\mathbb{Y}=0$ presque sûrement et $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})=0$.
D'après la formule de Koenig-Huygens :
$$\text{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})=\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})-\mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y})=0-0=0$$
Ainsi, $\rho(\mathbb{X},\mathbb{Y})=0$: $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont non corrélées.
3. On a $\mathbf{P}([\mathbb{X}=0]\cap[\mathbb{Y}=0])=0$ (l'origine ne fait pas partie des points), alors que $\mathbf{P}(\mathbb{X}=0)\mathbf{P}(\mathbb{Y}=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\neq 0$.
Donc $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes.

Exercice 2 – Tirages dans une urne et covariance via variance d'une somme :

Une urne contient n boules blanches et n boules noires ($n\geqslant 2$). On effectue k tirages successifs sans remise ($1\leqslant k\leqslant 2n$). Pour tout $i\in[\![1,k]\!]$, on note $\mathbb{X}_i$ la variable aléatoire de Bernoulli valant 1 si la i-ème boule tirée est blanche, et 0 sinon. On pose $\mathbb{S}_k=\sum_{i=1}^{k}\mathbb{X}_i$.

1. Déterminer la loi de $\mathbb{X}_i$ pour tout $i\in[\![1,k]\!]$, ainsi que $\mathbf{E}(\mathbb{X}_i)$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}_i)$.
2. Calculer $\text{Cov}(\mathbb{X}_i,\mathbb{X}_j)$ pour $1\leqslant i\neq j\leqslant k$.
3. En déduire $\mathbf{E}(\mathbb{S}_k)$ et $\mathbf{V}(\mathbb{S}_k)$. Que vaut $\mathbf{V}(\mathbb{S}_{2n})$? Commenter.

1. Par symétrie des tirages (ou par la formule des probabilités totales), à chaque rang i, la probabilité de tirer une boule blanche est $\dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\mathbb{X}_i \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, d'où $\mathbf{E}(\mathbb{X}_i) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}_i) = \dfrac{1}{4}$.
2. Pour $i \neq j$, $\mathbb{X}_i\mathbb{X}_j$ est une variable de Bernoulli qui vaut 1 si et seulement si les boules tirées aux rangs i et j sont toutes deux blanches. Par symétrie (équivalence avec les deux premiers tirages) :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}_i\mathbb{X}_j) = \mathbf{P}([\mathbb{X}_i = 1] \cap [\mathbb{X}_j = 1]) = \frac{n}{2n} \times \frac{n-1}{2n-1} = \frac{n-1}{2(2n-1)}$$

   Par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j) = \frac{n-1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4} = \frac{2(n-1)-(2n-1)}{4(2n-1)} = -\frac{1}{4(2n-1)}$$

3. Par linéarité de l'espérance : $\mathbf{E}(\mathbb{S}_k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}(\mathbb{X}_i) = \frac{k}{2}$. Pour la variance d'une somme générale :

$$\mathbf{V}(\mathbb{S}_k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{V}(\mathbb{X}_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \mathrm{Cov}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j) = \frac{k}{4} + 2\binom{k}{2}\left(-\frac{1}{4(2n-1)}\right) = \frac{k}{4}\left(1 - \frac{k-1}{2n-1}\right) = \frac{k(2n-k)}{4(2n-1)}$$

   Pour $k = 2n$, on obtient $\mathbf{V}(\mathbb{S}_{2n}) = 0$: en tirant toutes les boules de l'urne, le nombre total de boules blanches tirées est déterministe et égal à n.

Sujet 5 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Définir le rang d'une application linéaire $\mathrm{rg}(f)$, énoncer le théorème du rang ainsi que son corollaire en dimension égale ($\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$).

Exercice 1 – Variance d'une somme et symétrie min / max :

On lance deux dés équilibrés à 3 faces et on note $\mathbb{Z}_1$ et $\mathbb{Z}_2$ les résultats obtenus. On pose $\mathbb{X} = \min(\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2)$ et $\mathbb{Y} = \max(\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2)$.

1. Exprimer $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$ en fonction de $\mathbb{Z}_1$ et $\mathbb{Z}_2$.
2. En déduire sans calcul de loi conjointe la variance $\mathbf{V}(\mathbb{X} + \mathbb{Y})$.
3. Sachant que $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \dfrac{38}{81}$, déterminer $\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

1. Pour tout couple de réels, la somme du minimum et du maximum est égale à la somme des deux nombres : $\mathbb{X} + \mathbb{Y} = \mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_2$.
2. $\mathbb{Z}_1$ et $\mathbb{Z}_2$ sont indépendantes et suivent la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, 3 \rrbracket)$, donc $\mathbf{V}(\mathbb{Z}_1) = \mathbf{V}(\mathbb{Z}_2) = \dfrac{3^2 - 1}{12} = \dfrac{2}{3}$. Par indépendance :
$$\mathbf{V}(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_2) = \mathbf{V}(\mathbb{Z}_1) + \mathbf{V}(\mathbb{Z}_2) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$
3. On utilise la relation $\mathbf{V}(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y}) + 2\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$:
$$\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{V}(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) - \mathbf{V}(\mathbb{X}) - \mathbf{V}(\mathbb{Y})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} - \frac{38}{81} - \frac{38}{81}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{108 - 76}{81}\right) = \frac{16}{81}$$

Exercice 2 – Bilinéarité de la covariance et corrélation linéaire :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2, de même variance $\sigma^2 > 0$. On pose $\mathbb{U} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$ et $\mathbb{V} = \mathbb{X} - \mathbb{Y}$.

1. Calculer $\mathrm{Cov}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$. Les variables $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ sont-elles corrélées ?
2. Sont-elles nécessairement indépendantes ? Illustrer par un contre-exemple simple.
3. Exprimer $\rho(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ lorsque $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \sigma_1^2$ et $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \sigma_2^2$ sont quelconques (non nulles), avec $\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = r$.

1. Par bilinéarité et symétrie de la covariance :
$$\mathrm{Cov}(\mathbb{U}, \mathbb{V}) = \mathrm{Cov}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}, \mathbb{X}-\mathbb{Y}) = \mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{X}) - \mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) + \mathrm{Cov}(\mathbb{Y}, \mathbb{X}) - \mathrm{Cov}(\mathbb{Y}, \mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) - \mathbf{V}(\mathbb{Y})$$
Comme $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \sigma^2$, on obtient $\mathrm{Cov}(\mathbb{U}, \mathbb{V}) = 0$. Ainsi $\rho(\mathbb{U}, \mathbb{V}) = 0$: $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ sont non corrélées.

2. Non, elles ne sont pas nécessairement indépendantes. Par exemple, si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variables indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$, elles ont même variance $1/4$, donc $\mathbb{U} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$ et $\mathbb{V} = \mathbb{X} - \mathbb{Y}$ sont non corrélées. Pourtant :

$$\mathbf{P}([\mathbb{U} = 2] \cap [\mathbb{V} = 1]) = 0 \neq \mathbf{P}(\mathbb{U} = 2)\mathbf{P}(\mathbb{V} = 1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Elles ne sont donc pas indépendantes.

3. Dans le cas général, $\text{Cov}(\mathbb{U}, \mathbb{V}) = \sigma_1^2 - \sigma_2^2$. De plus :

$$\mathbf{V}(\mathbb{U}) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{V}) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2r\sigma_1\sigma_2$$

On en déduit (sous réserve que $\mathbf{V}(\mathbb{U}) > 0$ et $\mathbf{V}(\mathbb{V}) > 0$, soit $|r| < 1$ ou $\sigma_1 \neq \sigma_2$) :

$$\rho(\mathbb{U}, \mathbb{V}) = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 - 4r^2\sigma_1^2\sigma_2^2}}$$

Exercice 3 – Endomorphisme de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, noyau et image :

On considère l'application $f : \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ définie par :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}], \quad f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}) - \mathrm{P}(\mathrm{X} - 1)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$ et en déduire $\text{rg}(f)$.
3. Déterminer explicitement l'image $\text{Im}(f)$ et vérifier que $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}] = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$? *(Question : $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$?)*

1. **Linéarité :** Pour tous $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q}) = (\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q})(\mathrm{X}) - (\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q})(\mathrm{X} - 1) = \lambda f(\mathrm{P}) + \mu f(\mathrm{Q})$$

Stabilité : Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, $\deg(\mathrm{P}(\mathrm{X} - 1)) = \deg(\mathrm{P}) \leqslant 3$, donc $\deg(f(\mathrm{P})) \leqslant 3$, soit $f(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$. Ainsi $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[\mathrm{X}])$.

2. Soit $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^3 + b\mathrm{X}^2 + c\mathrm{X} + d \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$. On a $\mathrm{P} \in \ker(f) \iff \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} - 1)$. En évaluant en $0, -1, -2, -3$, le polynôme $\mathrm{P} - \mathrm{P}(0)$ admet une infinité de racines (tous les entiers relatifs) tout en étant de degré au plus 3 : il est donc nul. Ainsi P est constant : $\ker(f) = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}] = \text{Vect}(1)$, de base (1) et de dimension 1.

Par le théorème du rang : $\text{rg}(f) = \dim \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] - \dim \ker(f) = 4 - 1 = 3$.

3. Calculons les images de la base canonique $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^3)$:

$$f(1) = 0, \quad f(\mathrm{X}) = 1, \quad f(\mathrm{X}^2) = 2\mathrm{X} - 1, \quad f(\mathrm{X}^3) = 3\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 1$$

Comme $\deg(f(\mathrm{X}^k)) = k - 1$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$, la famille $(f(\mathrm{X}), f(\mathrm{X}^2), f(\mathrm{X}^3))$ est échelonnée en degrés, donc libre de cardinal $3 = \text{rg}(f)$. Elle engendre donc $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, d'où $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

Comme $1 \in \ker(f) \cap \text{Im}(f)$, on a $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}] \neq \{0\}$: ils ne sont pas supplémentaires.

Sujet 6 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Énoncer le théorème de transfert pour une variable aléatoire $\mathbb{Z} = g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ dans le cas fini, puis préciser la condition d'existence (sommabilité) dans le cas infini.

Exercice 1 – Covariance, corrélation et non-indépendance :

Soient $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3$ trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$. On pose $\mathbb{Y} = \mathbb{X}_1\mathbb{X}_2$ et $\mathbb{Z} = \mathbb{X}_2\mathbb{X}_3$.

1. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$, $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{Y}\mathbb{Z})$.
2. En déduire $\mathrm{Cov}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$. Les variables $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{Z}$ sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$.

1. Par indépendance de $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$, $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}_1)\mathbf{E}(\mathbb{X}_2) = p^2$. De même, $\mathbf{E}(\mathbb{Z}) = p^2$.
   On a $\mathbb{Y}\mathbb{Z} = \mathbb{X}_1\mathbb{X}_2^2\mathbb{X}_3$. Or $\mathbb{X}_2(\Omega) = \{0,1\}$, donc $\mathbb{X}_2^2 = \mathbb{X}_2$. Par indépendance mutuelle de $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3$:
   $$\mathbf{E}(\mathbb{Y}\mathbb{Z}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}_1\mathbb{X}_2\mathbb{X}_3) = \mathbf{E}(\mathbb{X}_1)\mathbf{E}(\mathbb{X}_2)\mathbf{E}(\mathbb{X}_3) = p^3$$
2. Par la formule de Koenig-Huygens :
   $$\mathrm{Cov}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z}) = \mathbf{E}(\mathbb{Y}\mathbb{Z}) - \mathbf{E}(\mathbb{Y})\mathbf{E}(\mathbb{Z}) = p^3 - p^4 = p^3(1-p)$$
   Comme $p \in]0,1[$, on a $\mathrm{Cov}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z}) \neq 0$. Par contraposée de la propriété sur les variables indépendantes, $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas indépendantes.
3. On remarque que $\mathbb{Y} \sim \mathcal{B}(p^2)$ et $\mathbb{Z} \sim \mathcal{B}(p^2)$ (car produit de deux Bernoulli indépendantes), donc $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{Z}) = p^2(1-p^2)$. Ainsi :
   $$\rho(\mathbb{Y}, \mathbb{Z}) = \frac{\mathrm{Cov}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})}{\sigma(\mathbb{Y})\sigma(\mathbb{Z})} = \frac{p^3(1-p)}{p^2(1-p^2)} = \frac{p}{1+p}$$

Exercice 2 – Conditionnement Poisson-Binomiale et corrélation :

Un standard téléphonique reçoit un nombre $\mathbb{N}$ d'appels au cours d'une heure, où $\mathbb{N} \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$). Chaque appel est un appel d'urgence avec la probabilité $p \in]0,1[$, indépendamment des autres appels et de $\mathbb{N}$. On note $\mathbb{X}$ le nombre d'appels d'urgence reçus et $\mathbb{Y} = \mathbb{N} - \mathbb{X}$ le nombre d'appels non urgents.

1. Déterminer la loi conjointe du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et reconnaître les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.
2. Que dire de l'indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$? En déduire $\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.
3. Calculer $\mathrm{Cov}(\mathbb{N}, \mathbb{X})$ et le coefficient de corrélation linéaire $\rho(\mathbb{N}, \mathbb{X})$. Interpréter son signe et son comportement lorsque $p \to 1$.

1. $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}$. Pour tout $(j,k) \in \mathbb{N}^2$, l'événement $[\mathbb{X} = j] \cap [\mathbb{Y} = k]$ s'écrit $[\mathbb{N} = j+k] \cap [\mathbb{X} = j]$. Sachant $[\mathbb{N} = j+k]$, $\mathbb{X}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(j+k, p)$. Ainsi :

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = j] \cap [\mathbb{Y} = k]) = \mathbf{P}(\mathbb{N} = j+k)\mathrm{P}_{[\mathbb{N}=j+k]}(\mathbb{X} = j) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{j+k}}{(j+k)!}\binom{j+k}{j}p^j(1-p)^k$$

En simplifiant $(j+k)!$:

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = j] \cap [\mathbb{Y} = k]) = \left(e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^j}{j!}\right)\left(e^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda(1-p))^k}{k!}\right)$$

On reconnaît le produit des lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$ et $\mathcal{P}(\lambda(1-p))$.

2. La loi conjointe étant le produit des lois marginales, $\mathbb{X} \sim \mathcal{P}(\lambda p)$ et $\mathbb{Y} \sim \mathcal{P}(\lambda(1-p))$ sont indépendantes. Par conséquent, $\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 0$.

3. Comme $\mathbb{N} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$, par bilinéarité de la covariance :

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{N}, \mathbb{X}) = \mathrm{Cov}(\mathbb{X} + \mathbb{Y}, \mathbb{X}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) + \mathrm{Cov}(\mathbb{Y}, \mathbb{X}) = \lambda p + 0 = \lambda p$$

De plus, $\mathbf{V}(\mathbb{N}) = \lambda$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \lambda p$, d'où :

$$\rho(\mathbb{N}, \mathbb{X}) = \frac{\lambda p}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda p}} = \sqrt{p}$$

On a $\rho(\mathbb{N}, \mathbb{X}) > 0$: $\mathbb{N}$ et $\mathbb{X}$ évoluent en moyenne dans le même sens. Lorsque $p \to 1$, $\rho(\mathbb{N}, \mathbb{X}) \to 1$ car la quasi-totalité des appels sont urgents ($\mathbb{X} \approx \mathbb{N}$).

Exercice 3 – Application linéaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et théorème du rang :

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\ker(\varphi)$ et donner sa dimension.
3. En déduire $\mathrm{rg}(\varphi)$, puis déterminer une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

1. Par distributivité et compatibilité du produit matriciel avec la multiplication par un scalaire :
$\forall (\mathrm{M}, \mathrm{N}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(\lambda\mathrm{M}+\mu\mathrm{N}) = \mathrm{A}(\lambda\mathrm{M}+\mu\mathrm{N}) = \lambda\mathrm{AM}+\mu\mathrm{AN} = \lambda\varphi(\mathrm{M})+\mu\varphi(\mathrm{N})$
De plus, pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{AM} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donc $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

2. Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\mathrm{M} \in \ker(\varphi) \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + 2d = 0 \\ 2a + 4c = 0 \\ 2b + 4d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2c \\ b = -2d \end{cases}$$

Ainsi, $\mathrm{M} = c\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Les matrices $\mathrm{K}_1 = \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $\mathrm{K}_2 = \begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ n'étant pas colinéaires, $(\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2)$ est une base de $\ker(\varphi)$ et $\dim \ker(\varphi) = 2$.

3. $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$. Par le théorème du rang : $\mathrm{rg}(\varphi) = 4 - 2 = 2$.
   En calculant les images de la base canonique $(\mathrm{E}_{1,1}, \mathrm{E}_{1,2}, \mathrm{E}_{2,1}, \mathrm{E}_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\varphi(\mathrm{E}_{1,1}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}, \quad \varphi(\mathrm{E}_{1,2}) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \quad \varphi(\mathrm{E}_{2,1}) = 2\varphi(\mathrm{E}_{1,1}), \quad \varphi(\mathrm{E}_{2,2}) = 2\varphi(\mathrm{E}_{1,2})$$

   Les matrices $\varphi(\mathrm{E}_{1,1})$ et $\varphi(\mathrm{E}_{1,2})$ sont non colinéaires (famille libre de cardinal $2 = \mathrm{rg}(\varphi)$) et forment donc une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Sujet 7 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Définir le noyau $\ker(f)$ et l'image $\mathrm{Im}(f)$ d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, et préciser leur structure algébrique.

Exercice 1 – Endomorphisme nilpotent et liberté d'une famille :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme nilpotent d'indice 3, c'est-à-dire tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

1. À l'aide de l'identité polynomiale $(1-\mathrm{X})(1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2) = 1-\mathrm{X}^3$, montrer que $\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f$ est un automorphisme de E et exprimer son inverse.
2. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est libre.

1. En évaluant l'identité polynomiale en l'endomorphisme f, on obtient :

$$(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)\circ(\mathrm{Id}_\mathrm{E} + f + f^2) = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - f^3 = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})} = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$$

On vérifie de même que $(\mathrm{Id}_\mathrm{E} + f + f^2)\circ(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f) = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.
Ainsi, $\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f$ est inversible (c'est un automorphisme de E) et :

$$(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)^{-1} = \mathrm{Id}_\mathrm{E} + f + f^2$$

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$af(x_0) + bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0_\mathrm{E} \quad (*)$$

En composant $(*)$ à gauche par f^2 et en utilisant $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^4 = f\circ f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$, il vient :

$$af^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$$

Comme $f^2(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$, on en déduit $a = 0$.
L'égalité $(*)$ devient $bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$. En composant par f, on obtient :

$$bf^2(x_0) = 0_\mathrm{E} \implies b = 0$$

Il reste alors $cf^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$, d'où $c = 0$. La famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est donc libre.

Exercice 2 – Inégalité de Cauchy-Schwarz et relation affine presque sûre :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2, de variances non nulles.

1. En étudiant le signe de $t \longmapsto \mathbf{V}(t\mathbb{X} + \mathbb{Y})$ pour $t \in \mathbb{R}$, redémontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\big(\mathrm{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})\big)^2 \leqslant \mathbf{V}(\mathbb{X})\mathbf{V}(\mathbb{Y})$$

2. On suppose dans cette question que $\mathbb{X}(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ avec

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} = 0) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = 1) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = 2) = \frac{1}{3},$$

et que $\mathbb{Y} = -3\mathbb{X} + 4$.
Calculer $\mathbf{V}(\mathbb{X})$, $\mathbf{V}(\mathbb{Y})$, $\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et $\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, et vérifier le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la variable $t\mathbb{X} + \mathbb{Y}$ admet un moment d'ordre 2 et sa variance est positive :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{V}(t\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = t^2\mathbf{V}(\mathbb{X}) + 2t\,\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y}) \geqslant 0$$

Comme $\mathbf{V}(\mathbb{X}) > 0$, il s'agit d'un trinôme du second degré en t toujours positif ou nul sur $\mathbb{R}$. Son discriminant Δ est donc négatif ou nul :

$$\Delta = 4\big(\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})\big)^2 - 4\mathbf{V}(\mathbb{X})\mathbf{V}(\mathbb{Y}) \leqslant 0 \implies \big(\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})\big)^2 \leqslant \mathbf{V}(\mathbb{X})\mathbf{V}(\mathbb{Y})$$

2. $\mathbb{X} \sim \mathcal{U}(\llbracket 0, 2 \rrbracket)$, donc $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \dfrac{3^2 - 1}{12} = \dfrac{2}{3}$.

Comme $\mathbb{Y} = -3\mathbb{X} + 4$, on a $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = (-3)^2\mathbf{V}(\mathbb{X}) = 9 \times \dfrac{2}{3} = 6$.

Par bilinéarité de la covariance :

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \mathrm{Cov}(\mathbb{X}, -3\mathbb{X} + 4) = -3\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{X}) + \mathrm{Cov}(\mathbb{X}, 4) = -3\mathbf{V}(\mathbb{X}) = -2$$

On en déduit :

$$\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \frac{\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})}{\sqrt{\mathbf{V}(\mathbb{X})}\sqrt{\mathbf{V}(\mathbb{Y})}} = \frac{-2}{\sqrt{2/3}\sqrt{6}} = \frac{-2}{\sqrt{4}} = -1$$

On a bien $\big(\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})\big)^2 = (-2)^2 = 4 = \dfrac{2}{3} \times 6 = \mathbf{V}(\mathbb{X})\mathbf{V}(\mathbb{Y})$, car $\mathbb{Y}$ est une fonction affine strictement décroissante de $\mathbb{X}$.

Exercice 3 – Caractérisation d'un isomorphisme par transport de base :

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ définie par :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad f(a, b, c) = (a + b) + (b + c)\mathrm{X} + (a + c)\mathrm{X}^2$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer l'image par f de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et expliciter son application réciproque f^{-1}.

1. Pour tous $u = (a, b, c), v = (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= (\lambda(a + b) + \mu(a' + b')) + (\lambda(b + c) + \mu(b' + c'))\mathrm{X} + (\lambda(a + c) + \mu(a' + c'))\mathrm{X}^2 \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v) \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[\mathrm{X}])$.

2. On trouve :

$$f(e_1) = 1 + \mathrm{X}^2, \quad f(e_2) = 1 + \mathrm{X}, \quad f(e_3) = \mathrm{X} + \mathrm{X}^2$$

3. Comme $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] = 3$, il suffit de montrer que la famille $\mathcal{F} = (f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est libre dans $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ pour prouver que c'est une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et donc que f est un isomorphisme.
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(1+\mathrm{X}^2) + \beta(1+\mathrm{X}) + \gamma(\mathrm{X}+\mathrm{X}^2) = 0$. Par identification des coefficients :
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$$
Ainsi $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et f est un isomorphisme.
Pour déterminer $f^{-1}(p_0 + p_1\mathrm{X} + p_2\mathrm{X}^2)$, on résout :
$$\begin{cases} a + b = p_0 \\ b + c = p_1 \\ a + c = p_2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{2}(p_0 - p_1 + p_2) \\ b = \dfrac{1}{2}(p_0 + p_1 - p_2) \\ c = \dfrac{1}{2}(-p_0 + p_1 + p_2) \end{cases}$$
D'où $f^{-1}(p_0 + p_1\mathrm{X} + p_2\mathrm{X}^2) = \dfrac{1}{2}(p_0 - p_1 + p_2,\ p_0 + p_1 - p_2,\ -p_0 + p_1 + p_2)$.

Sujet 8 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Définir le rang d'une application linéaire $\mathrm{rg}(f)$, énoncer le théorème du rang ainsi que son corollaire en dimension égale ($\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$).

Exercice 1 – Polynôme annulateur et inversibilité d'un endomorphisme :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme vérifiant :

$$f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$$

Montrer que f est un automorphisme de E et exprimer son inverse f^{-1} en fonction de f et Id_E.

L'égalité $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ se réécrit :

$$3f - f^2 = 2\mathrm{Id}_\mathrm{E} \iff f \circ \left(\frac{1}{2}(3\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)\right) = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$$

De même, comme f et Id_E commutent, on a $\left(\frac{1}{2}(3\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)\right) \circ f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.
En dimension finie, la première égalité suffit même à conclure (par le corollaire du théorème du rang) que f est bijective. Ainsi, f est un automorphisme de E et son inverse est :

$$f^{-1} = \frac{1}{2}(3\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)$$

Exercice 2 – Somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires (Formule de Wald) :

Soit $(\mathbb{X}_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi admettant un moment d'ordre 2, d'espérance m et de variance σ^2. Soit $\mathbb{N}$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendante de la suite $(\mathbb{X}_k)_{k\geqslant 1}$, d'espérance μ et de variance τ^2. On pose :

$$\mathbb{S} = \sum_{k=1}^{\mathbb{N}} \mathbb{X}_k$$

1. Exprimer l'événement $[\mathbb{S} = s]$ à l'aide du système complet d'événements $([\mathbb{N} = n])_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. En admettant l'existence de $\mathbf{E}(\mathbb{S})$ et de $\mathbf{E}(\mathbb{S}^2)$, calculer $\mathbf{E}(\mathbb{S})$ en fonction de m et μ.
3. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{S}^2)$ et en déduire que $\mathbf{V}(\mathbb{S}) = \mu\sigma^2 + m^2\tau^2$.

1. Par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([\mathbb{N} = n])_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{S} = s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{N} = n] \cap [\mathbb{S}_n = s]) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathbb{N} = n)\mathbf{P}(\mathbb{S}_n = s)$$

où $\mathbb{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k$, car $\mathbb{N}$ est indépendante des $\mathbb{X}_k$.

2. Par définition de l'espérance et interversion des sommes (admise) :

$$\mathbf{E}(\mathbb{S}) = \sum_{s\in\mathbb{S}(\Omega)} s\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}(\mathbb{N}=n)\mathbf{P}(\mathbb{S}_n=s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}(\mathbb{N}=n)\left(\sum_{s\in\mathbb{S}_n(\Omega)} s\mathbf{P}(\mathbb{S}_n=s)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}(\mathbb{N}=n)\mathbf{E}(\mathbb{S}_n)$$

Or par linéarité, $\mathbf{E}(\mathbb{S}_n) = nm$. D'où :

$$\mathbf{E}(\mathbb{S}) = m\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbf{P}(\mathbb{N}=n) = m\mathbf{E}(\mathbb{N}) = m\mu$$

3. De même, par le théorème de transfert :

$$\mathbf{E}(\mathbb{S}^2) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}(\mathbb{N}=n)\mathbf{E}(\mathbb{S}_n^2)$$

Or $\mathbf{E}(\mathbb{S}_n^2) = \mathbf{V}(\mathbb{S}_n) + \left(\mathbf{E}(\mathbb{S}_n)\right)^2 = n\sigma^2 + n^2m^2$ (par indépendance des $\mathbb{X}_k$). Ainsi :

$$\mathbf{E}(\mathbb{S}^2) = \sigma^2\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbf{P}(\mathbb{N}=n) + m^2\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\mathbf{P}(\mathbb{N}=n) = \sigma^2\mathbf{E}(\mathbb{N}) + m^2\mathbf{E}(\mathbb{N}^2) = \mu\sigma^2 + m^2(\tau^2+\mu^2)$$

Par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbf{V}(\mathbb{S}) = \mathbf{E}(\mathbb{S}^2) - \left(\mathbf{E}(\mathbb{S})\right)^2 = \mu\sigma^2 + m^2\tau^2 + m^2\mu^2 - (m\mu)^2 = \mu\sigma^2 + m^2\tau^2$$

Exercice 3 – Polynôme annulateur et étude d'un projecteur :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $p \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme tel que $p^2 = p$ (on dit que p est un projecteur).

1. Donner un polynôme annulateur non nul de p.
2. Montrer que $\ker(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - p)$ et que $\mathrm{Im}(p) = \ker(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - p)$.

1. Comme $p^2 - p = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$, le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)$ est un polynôme annulateur de p.
2. — Si $x \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - p)$, il existe $y \in \mathrm{E}$ tel que $x = y - p(y)$, d'où $p(x) = p(y) - p^2(y) = 0_\mathrm{E}$, soit $x \in \ker(p)$. Réciproquement, si $x \in \ker(p)$, alors $x = x - p(x) = (\mathrm{Id}_\mathrm{E} - p)(x) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - p)$. Ainsi $\ker(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - p)$.

   — Si $x \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $y \in \mathrm{E}$ tel que $x = p(y)$, d'où $(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - p)(x) = p(y) - p^2(y) = 0_\mathrm{E}$, soit $x \in \ker(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - p)$. Réciproquement, si $x \in \ker(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - p)$, alors $x - p(x) = 0_\mathrm{E} \implies x = p(x) \in \mathrm{Im}(p)$. Ainsi $\mathrm{Im}(p) = \ker(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - p)$.

Sujet 9 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Énoncer la caractérisation de l'injectivité via le noyau et celle de la surjectivité via l'image.

Exercice 1 – Caractérisation des isomorphismes en dimension égale :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par :

$$f(x, y, z) = (x + y + 2z,\ x + z,\ -x - z)$$

1. Déterminer l'image par f des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ et le rang de f.
3. L'endomorphisme f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$? Déterminer $\dim \ker(f)$.

1. On a $f(e_1) = (1, 1, -1)$, $f(e_2) = (1, 0, 0)$ et $f(e_3) = (2, 1, -1)$.
2. On sait que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$. Or on remarque que $f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$, donc :
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, 1, -1),\ (1, 0, 0))$$
Les deux vecteurs $(1, 1, -1)$ et $(1, 0, 0)$ n'étant pas colinéaires, ils forment une base de $\mathrm{Im}(f)$, et donc $\mathrm{rg}(f) = 2$.
3. Comme $\mathrm{rg}(f) = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3$, f n'est pas surjectif, donc ce n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Par le théorème du rang : $\dim \ker(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \mathrm{rg}(f) = 3 - 2 = 1$.

Exercice 2 – Espérance d'un produit et loi conjointe :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $[\![1, n]\!]^2$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall\, (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = \frac{a}{|i - j| + 1} \quad \text{si } i = j \text{ ou } |i - j| = 1, \text{ et 0 sinon.}$$

Plus précisément, on suppose que $\mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = i]) = \alpha$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et $\mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = \beta$ dès que $|i - j| = 1$, avec $\alpha = 2\beta$.

1. Déterminer α et β en fonction de n pour que l'on définisse bien une loi de probabilité.
2. Déterminer les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$, ainsi que leurs espérances.
3. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$ à l'aide du théorème de transfert et en déduire $\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

1. Il y a n couples diagonaux (i, i) et $2(n - 1)$ couples vérifiant $|i - j| = 1$ (soit $(i, i + 1)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n - 1$ et $(i, i - 1)$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$). La somme des probabilités vaut 1, donc :
$$n\alpha + 2(n - 1)\beta = 1 \iff 2n\beta + 2(n - 1)\beta = 1 \iff (4n - 2)\beta = 1$$

On obtient $\beta = \dfrac{1}{4n-2}$ et $\alpha = \dfrac{2}{4n-2} = \dfrac{1}{2n-1}$ (pour $n \geqslant 2$).

2. Par sommation sur j :

   — Pour $i = 1$ ou $i = n$: $\mathbf{P}(\mathbb{X} = i) = \alpha + \beta = \dfrac{3}{4n-2}$.

   — Pour $i \in [\![2, n-1]\!]$: $\mathbf{P}(\mathbb{X} = i) = \alpha + 2\beta = \dfrac{4}{4n-2} = \dfrac{2}{2n-1}$.

   Par symétrie de la loi conjointe, $\mathbb{Y}$ a exactement la même loi marginale que $\mathbb{X}$.

   De plus, la loi étant symétrique par rapport à $\dfrac{n+1}{2}$ (puisque $\mathbf{P}(\mathbb{X} = i) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = n+1-i)$), on a :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \frac{n+1}{2}$$

3. Par le théorème de transfert :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \sum_{i=1}^{n} i^2\alpha + 2\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1)\beta = \beta\left(2\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}(i^2+i)\right)$$

Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}(i^2+i) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$. Après simplification :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \frac{1}{4n-2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{2n(n^2-1)}{3}\right) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3(4n-2)}$$

On en déduit la covariance par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) - \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6(2n-1)} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)(2n^2-7n+3)}{12(2n-1)} = \frac{(n+1)(n-3)}{12}$$

Exercice 3 – Polynôme annulateur de degré 2 et inverse d'un endomorphisme :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u(x, y, z) = (2x - y + z,\ x + z,\ -x + y + 2z)$$

1. Calculer $u^2(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, puis vérifier que $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.
2. En déduire que u est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer l'expression analytique de $u^{-1}(x, y, z)$.

1. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} u^2(x, y, z) &= u(2x - y + z,\ x + z,\ -x + y + 2z) \\ &= (2(2x - y + z) - (x + z) + (-x + y + 2z),\ (2x - y + z) + (-x + y + 2z),\ -(2x + y + z) + (x \\ &= (2x - y + 3z,\ x + 3z,\ -3x + 3y + 4z) \end{aligned}$$

Or $(3u - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(x, y, z) = (4x - 3y + 3z,\ 3x - 2y + 3z,\ -3x + 3y + 4z)$. En soustrayant, on a bien :

$$u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$$

2. L'égalité s'écrit $u \circ \left(\frac{1}{2}(3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - u)\right) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Comme on est en dimension finie, cela prouve que u est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et que $u^{-1} = \frac{1}{2}(3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - u)$.
   Analytiquement, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

   $$u^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{2}(3(x, y, z) - (2x - y + z,\ x + z,\ -x + y + 2z)) = \left(\frac{x + y - z}{2},\ \frac{-x + 3y - z}{2},\ \frac{x - y + z}{2}\right)$$

Sujet 10 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Définir le noyau $\ker(f)$ et l'image $\mathrm{Im}(f)$ d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, et préciser leur structure algébrique.

Exercice 1 – Noyau, théorème du rang et surjectivité :

Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x,y,z,t) = (x-2y+z+2t,\ 2y-t)$$

1. Déterminer une base de $\ker(f)$ et en déduire sa dimension.
2. À l'aide du théorème du rang, déterminer $\mathrm{rg}(f)$. L'application f est-elle surjective ?

1. Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On résout le système homogène $f(u) = (0,0)$:

$$u \in \ker(f) \iff \begin{cases} x-2y+z+2t=0 \\ 2y-t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-z-t \\ y=\dfrac{1}{2}t \end{cases}$$

Ainsi, $u = z(-1,0,1,0) + t(-1,\frac{1}{2},0,1)$. On en déduit :

$$\ker(f) = \mathrm{Vect}\big((-1,0,1,0),\ (-2,1,0,2)\big)$$

Les deux vecteurs générateurs n'étant pas colinéaires, ils sont libres et forment une base de $\ker(f)$. D'où $\dim \ker(f) = 2$.

2. D'après le théorème du rang appliqué à $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^2)$:

$$\mathrm{rg}(f) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker(f) = 4-2 = 2$$

Comme $\mathrm{rg}(f) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, on a $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, donc f est surjective.

Exercice 2 – Espérance d'un produit sur support triangulaire et covariance :

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On considère un couple $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $[\![1,n]\!]^2$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=i] \cap [\mathbb{Y}=j]) = \begin{cases} c & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la constante c en fonction de n.
2. Déterminer les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$, puis calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$.
3. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$ à l'aide du théorème de transfert et en déduire $\mathrm{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

1. Le nombre de couples $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ vérifiant $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ est $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$. La somme des probabilités conjointes valant 1, on a $c \times \dfrac{n(n+1)}{2} = 1$, d'où $c = \dfrac{2}{n(n+1)}$.

2. — Pour $i \in [\![1,n]\!]$: $\mathbf{P}(\mathbb{X} = i) = \displaystyle\sum_{j=i}^{n} c = \frac{2(n-i+1)}{n(n+1)}$.

   — Pour $j \in [\![1,n]\!]$: $\mathbf{P}(\mathbb{Y} = j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{j} c = \frac{2j}{n(n+1)}$.

   Calculons les espérances (avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$) :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \sum_{j=1}^{n} j \cdot \frac{2j}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}$$

   Comme $\mathbf{P}(\mathbb{X} = i) = \mathbf{P}(\mathbb{Y} = n+1-i)$, on a $\mathbb{X} \sim n+1-\mathbb{Y}$, d'où :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = n+1-\frac{2n+1}{3} = \frac{n+2}{3}$$

3. Par le théorème de transfert :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{n} j \left(\sum_{i=1}^{j} i \right) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{n} (j^3 + j^2)$$

   Or $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, donc :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{2n+1}{6} = \frac{3n^2+7n+2}{12} = \frac{(n+2)(3n}{12}$$

   Par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \frac{(n+2)(3n+1)}{12} - \frac{(n+2)(2n+1)}{9} = \frac{(n+2)(3(3n+1)-4(2n+1))}{36} = \frac{(n+2)(n-1)}{36}$$

Sujet 11 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Énoncer le théorème de transport d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ par une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ (image, injectivité, surjectivité, bijectivité).

Exercice 1 – Endomorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, noyau et image :

On considère l'application $\Psi : \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ définie par $\Psi(\mathrm{P}) = (\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{P}'' + 5\mathrm{X}\mathrm{P}'$.

1. Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
2. Déterminer une base de $\ker(\Psi)$. Ψ est-il injectif ? Surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\Psi)$.

1. **Linéarité :** Soient $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de la dérivation :
$$\Psi(\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q}) = (\mathrm{X}^2 - 1)(\lambda\mathrm{P}'' + \mu\mathrm{Q}'') + 5\mathrm{X}(\lambda\mathrm{P}' + \mu\mathrm{Q}') = \lambda\Psi(\mathrm{P}) + \mu\Psi(\mathrm{Q})$$
Stabilité : Soit $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. On a $\mathrm{P}' = 2a\mathrm{X} + b$ et $\mathrm{P}'' = 2a$, d'où :
$$\Psi(\mathrm{P}) = 2a(\mathrm{X}^2 - 1) + 5\mathrm{X}(2a\mathrm{X} + b) = 12a\mathrm{X}^2 + 5b\mathrm{X} - 2a \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$$
Ainsi, $\Psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}])$.
2. Soit $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$:
$$\mathrm{P} \in \ker(\Psi) \iff 12a\mathrm{X}^2 + 5b\mathrm{X} - 2a = 0 \iff \begin{cases} 12a = 0 \\ 5b = 0 \\ -2a = 0 \end{cases} \iff a = b = 0$$
Donc $\ker(\Psi) = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}] = \mathrm{Vect}(1)$, qui est de dimension 1 (base : (1)). Comme $\ker(\Psi) \neq \{0\}$, Ψ n'est pas injectif. Étant un endomorphisme en dimension finie, il n'est pas non plus surjectif.
3. D'après le théorème du rang : $\mathrm{rg}(\Psi) = \dim \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] - \dim \ker(\Psi) = 3 - 1 = 2$.
En calculant les images de la base canonique $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$:
$$\mathrm{Im}(\Psi) = \mathrm{Vect}(\Psi(1), \Psi(\mathrm{X}), \Psi(\mathrm{X}^2)) = \mathrm{Vect}(0, 5\mathrm{X}, 12\mathrm{X}^2 - 2) = \mathrm{Vect}(\mathrm{X}, 6\mathrm{X}^2 - 1)$$
Les polynômes X et $6\mathrm{X}^2 - 1$ n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre de cardinal $2 = \mathrm{rg}(\Psi)$, donc une base de $\mathrm{Im}(\Psi)$.

Exercice 2 – Sommabilité et espérance sur $\mathbb{N}^2$ (Loi géométrique biaisée) :

Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On considère un couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que :
$$\forall\, (j, k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = j] \cap [\mathbb{Y} = k]) = (1 - q)^3\,(j + 1)\,q^{j+k}.$$

1. Vérifier que l'on définit bien une loi de probabilité conjointe sur $\mathbb{N}^2$, déterminer les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$, et dire si elles sont indépendantes.
2. Justifier que la variable aléatoire $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{Y}}{\mathbb{X}+1}$ admet une espérance et calculer $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$.

1. Les probabilités sont positives. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série géométrique en k converge :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} p^3(j+1)q^{j+k} = p^3(j+1)q^j \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = p^3(j+1)q^j \frac{1}{1-q} = p^2(j+1)q^j$$
Ensuite, par dérivation de la série géométrique $\sum_{j\geqslant 0} x^{j+1} = \dfrac{x}{1-x}$ sur $]-1,1[$:
$$\sum_{j=0}^{+\infty} p^2(j+1)q^j = p^2 \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p^2}{p^2} = 1$$
On obtient donc une loi de probabilité conjointe, avec $\mathbf{P}(\mathbb{X} = j) = p^2(j+1)q^j$ et $\mathbf{P}(\mathbb{Y} = k) = \sum_{j=0}^{+\infty} p^3(j+1)q^{j+k} = p^3q^k\dfrac{1}{p^2} = pq^k$. Comme $\mathbf{P}([\mathbb{X} = j] \cap [\mathbb{Y} = k]) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = j)\mathbf{P}(\mathbb{Y} = k)$ pour tout $(j,k) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes.
2. Par le théorème de transfert (série double à termes positifs) :
$$\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} \frac{k}{j+1}\mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k]) = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{j+1}p^3(j+1)q^{j+k} = p^3\left(\sum_{j=0}^{+\infty} q^j\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} kq^k\right)$$
Or $\sum_{j=0}^{+\infty} q^j = \dfrac{1}{p}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} kq^k = q\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \dfrac{q}{(1-q)^2} = \dfrac{q}{p^2}$. Les deux séries convergent, donc $\mathbb{Z}$ admet une espérance et :
$$\mathbf{E}(\mathbb{Z}) = p^3 \times \frac{1}{p} \times \frac{q}{p^2} = q = 1-p$$

Exercice 3 – Famille libre générée par un endomorphisme et polynôme annulateur :

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

1. Justifier qu'il existe un vecteur $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de E.
3. Déterminer $\ker(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{rg}(f)$.
4. Montrer que l'endomorphisme $g = \mathrm{Id}_\mathrm{E} + f + f^2$ est un automorphisme de E et déterminer g^{-1}.

1. Puisque $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$, l'application f^2 n'est pas l'application nulle : il existe donc au moins un vecteur $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$.
2. Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$ tels que $ax_0 + bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$. En composant par f^2 et en utilisant $f^3 = f^4 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$, on obtient $af^2(x_0) = 0_\mathrm{E} \implies a = 0$ (car $f^2(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$). En composant ensuite

par f, on obtient $bf^2(x_0) = 0_{\mathrm{E}} \implies b = 0$, puis il reste $cf^2(x_0) = 0_{\mathrm{E}} \implies c = 0$. La famille $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est donc libre dans E de cardinal $3 = \dim \mathrm{E}$: c'est une base de E.

3. On a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0)) = \mathrm{Vect}(f(x_0), f^2(x_0))$. Comme $(f(x_0), f^2(x_0))$ est extraite de la base $\mathcal{B}$, elle est libre et forme une base de $\mathrm{Im}(f)$, d'où $\mathrm{rg}(f) = 2$.

   Par le théorème du rang, $\dim \ker(f) = 3-2 = 1$. Or $f(f^2(x_0)) = f^3(x_0) = 0_{\mathrm{E}}$ avec $f^2(x_0) \neq 0_{\mathrm{E}}$, donc $\ker(f) = \mathrm{Vect}(f^2(x_0))$.

4. En utilisant l'identité $(1 - \mathrm{X})(1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2) = 1 - \mathrm{X}^3$ évaluée en f :

$$(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - f) \circ (\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} + f + f^2) = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - f^3 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$$

   Comme $\dim \mathrm{E} < +\infty$, cela prouve que $g = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} + f + f^2$ est un automorphisme de E et que $g^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - f$.

Sujet 12 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Donner la définition de $\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, une condition suffisante d'existence et énoncer la formule de Koenig-Huygens.

Exercice 1 :

On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;x+y) \end{array}$.

Déterminer une base du noyau et de l'image de f.

Exercice 2 – Modèle urne-boules et covariance d'indicateurs :

On lance n boules ($n \geqslant 2$) indépendamment et au hasard dans m boîtes numérotées de 1 à m ($m \geqslant 3$).

Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on note $\mathbb{X}_i$ la variable aléatoire valant 1 si la boîte i est vide à l'issue des n lancers, et 0 sinon.

Soit $\mathbb{V} = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{X}_i$ le nombre de boîtes vides.

1. Déterminer la loi de $\mathbb{X}_i$, son espérance $\mathbf{E}(\mathbb{X}_i)$ et sa variance $\mathbf{V}(\mathbb{X}_i)$.
2. Pour $1 \leqslant i \neq j \leqslant m$, calculer $\mathrm{Cov}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j)$ et commenter son signe.
3. En déduire l'espérance $\mathbf{E}(\mathbb{V})$ et la variance $\mathbf{V}(\mathbb{V})$ du nombre de boîtes vides.

1. La boîte i est vide si et seulement si chacune des n boules tombe dans l'une des $m-1$ autres boîtes. Par indépendance des lancers :
$$\mathbf{P}(\mathbb{X}_i = 1) = \left(\frac{m-1}{m}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n$$
Ainsi, $\mathbb{X}_i \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n$, d'où $\mathbf{E}(\mathbb{X}_i) = p$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}_i) = p(1-p)$.
2. Pour $i \neq j$, $\mathbb{X}_i\mathbb{X}_j = 1$ si et seulement si les boîtes i et j sont toutes deux vides, c'est-à-dire si les n boules évitent ces 2 boîtes :
$$\mathbf{E}(\mathbb{X}_i\mathbb{X}_j) = \mathbf{P}([\mathbb{X}_i = 1] \cap [\mathbb{X}_j = 1]) = \left(\frac{m-2}{m}\right)^n = \left(1 - \frac{2}{m}\right)^n$$
Par la formule de Koenig-Huygens :
$$\mathrm{Cov}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j) = \left(1 - \frac{2}{m}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{2n}$$
Comme $1 - \frac{2}{m} < \left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 = 1 - \frac{2}{m} + \frac{1}{m^2}$, on a $\mathrm{Cov}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j) < 0$: si la boîte i est vide, les boules se sont réparties ailleurs, ce qui diminue la probabilité que la boîte j soit également vide.

3. Par linéarité : $\mathbf{E}(\mathbb{V}) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{E}(\mathbb{X}_i) = m\left(1-\frac{1}{m}\right)^n$. Pour la variance de la somme :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\mathbb{V}) &= \sum_{i=1}^{m} \mathbf{V}(\mathbb{X}_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m} \mathrm{Cov}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j)\\ &= m\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\left(1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\right) + m(m-1)\left[\left(1-\frac{2}{m}\right)^n - \left(1-\frac{1}{m}\right)^{2n}\right]\\ &= m\left(1-\frac{1}{m}\right)^n + m(m-1)\left(1-\frac{2}{m}\right)^n - m^2\left(1-\frac{1}{m}\right)^{2n}\end{aligned}$$

Exercice 3 – Forme linéaire sur $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, noyau et supplémentaire :

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}], \quad \varphi(\mathrm{P}) = \int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que φ est une application linéaire (forme linéaire sur $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$).
2. Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et en déduire dim $\ker(\varphi)$ à l'aide du théorème du rang.
3. Déterminer une base de $\ker(\varphi)$ et montrer que $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}] = \ker(\varphi) \oplus \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$.

1. Par linéarité de l'intégrale, pour tous $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi(\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q}) = \int_0^1 (\lambda\mathrm{P}(t) + \mu\mathrm{Q}(t))\,\mathrm{d}t = \lambda\int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_0^1 \mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\varphi(\mathrm{P}) + \mu\varphi(\mathrm{Q})$$

   Donc $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}], \mathbb{R})$.

2. On a $\varphi(1) = \int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1 \neq 0$, donc $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel non nul de $\mathbb{R}$ (qui est de dimension 1) : ainsi $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$. Par le théorème du rang, dim $\ker(\varphi) = \dim \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] - \mathrm{rg}(\varphi) = 3 - 1 = 2$.

3. Soit $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. On a :

$$\mathrm{P} \in \ker(\varphi) \iff \int_0^1 (at^2 + bt + c)\,\mathrm{d}t = 0 \iff \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0 \iff c = -\frac{a}{3} - \frac{b}{2}$$

   Ainsi, $\mathrm{P} = a\left(\mathrm{X}^2 - \frac{1}{3}\right) + b\left(\mathrm{X} - \frac{1}{2}\right)$. Les polynômes $\mathrm{P}_1 = 3\mathrm{X}^2 - 1$ et $\mathrm{P}_2 = 2\mathrm{X} - 1$ n'étant pas colinéaires, $(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ est une base de $\ker(\varphi)$.
   Soit $\mathrm{P} \in \ker(\varphi) \cap \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$. Alors $\mathrm{P} = c$ est constant et $\varphi(\mathrm{P}) = c = 0$, d'où $\mathrm{P} = 0$. De plus, dim $\ker(\varphi) + \dim \mathbb{R}_0[\mathrm{X}] = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. Par conséquent, $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}] = \ker(\varphi) \oplus \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$.

Sujet 13 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Énoncer la caractérisation de l'injectivité via le noyau et celle de la surjectivité via l'image.

Exercice 1 – Espérance d'un produit par transfert (cas fini) :

Soit $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=i] \cap [\mathbb{Y}=j]) = \frac{4ij}{n^2(n+1)^2}$$

1. Vérifier que la somme des probabilités conjointes vaut 1.
2. En utilisant le théorème de transfert, calculer l'espérance $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$ de la variable $\mathbb{Z} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$.

1. On calcule la somme double des probabilités :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{4ij}{n^2(n+1)^2} = \frac{4}{n^2(n+1)^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right)$$

Comme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}([\mathbb{X}=i] \cap [\mathbb{Y}=j]) = \frac{4}{n^2(n+1)^2} \times \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 1$$

2. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont à support fini, donc $\mathbb{Z} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$ admet une espérance. Par le théorème de transfert :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (ij)\cdot \mathbf{P}([\mathbb{X}=i] \cap [\mathbb{Y}=j]) = \frac{4}{n^2(n+1)^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right)$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, d'où :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Z}) = \frac{4}{n^2(n+1)^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^2 = \frac{(2n+1)^2}{9}$$

Exercice 2 – Covariance et coefficient de corrélation linéaire d'un tirage sans remise :

Une urne contient 3 boules numérotées $1, 2, 3$. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. On note $\mathbb{X}$ le numéro de la première boule tirée et $\mathbb{Y}$ celui de la seconde.

1. Dresser le tableau de la loi conjointe du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et donner les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.
2. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X})$, $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$, $\mathbf{V}(\mathbb{X})$, $\mathbf{V}(\mathbb{Y})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$.

3. En déduire $\text{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ et le coefficient de corrélation linéaire $\rho(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. Interpréter le signe de $\rho(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

1. Il y a $3\times 2 = 6$ tirages ordonnés équiprobables (i,j) avec $i\neq j$, chacun de probabilité $\dfrac{1}{6}$:

$\mathbb{X}\backslash\mathbb{Y}$	1	2	3	Loi de $\mathbb{X}$
1	0	1/6	1/6	1/3
2	1/6	0	1/6	1/3
3	1/6	1/6	0	1/3
Loi de $\mathbb{Y}$	1/3	1/3	1/3	1

   $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ suivent toutes deux la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1,3\rrbracket)$.

2. $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \dfrac{3+1}{2} = 2$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \dfrac{3^2-1}{12} = \dfrac{2}{3}$.
   Par le théorème de transfert :
$$\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \frac{1}{6}(1\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 1+3\cdot 2) = \frac{2+3+2+6+3+6}{6} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$$

3. Par la formule de Koenig-Huygens :
$$\text{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \frac{11}{3} - 2\times 2 = -\frac{1}{3}$$
   On en déduit le coefficient de corrélation linéaire :
$$\rho(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \frac{-1/3}{\sqrt{2/3}\sqrt{2/3}} = \frac{-1/3}{2/3} = -\frac{1}{2}$$
   On a $\rho(\mathbb{X},\mathbb{Y}) < 0$: comme le tirage s'effectue sans remise, si le premier numéro tiré est grand (par exemple 3), le second est nécessairement plus petit (dans $\{1,2\}$), donc les deux variables évoluent en moyenne en sens inverse.

Exercice 3 – Endomorphisme de transposition sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

On considère l'application $\mathrm{T} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :
$$\forall \mathrm{M}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\quad \mathrm{T}(\mathrm{M}) = {}^t\mathrm{M}$$

1. Montrer que T est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et préciser T^{-1}.
2. Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces $\mathcal{S} = \ker(\mathrm{T}-\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})})$ et $\mathcal{A} = \ker(\mathrm{T}+\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})})$.
3. Montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{S}\oplus\mathcal{A}$.

1. Par linéarité de la transposition, pour tous $\mathrm{M},\mathrm{N}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\mathrm{T}(\lambda\mathrm{M}+\mu\mathrm{N}) = {}^t(\lambda\mathrm{M}+\mu\mathrm{N}) = \lambda{}^t\mathrm{M}+\mu{}^t\mathrm{N} = \lambda\mathrm{T}(\mathrm{M})+\mu\mathrm{T}(\mathrm{N})$, et $\mathrm{T}(\mathrm{M})\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donc $\mathrm{T}\in\mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.
   De plus, $\mathrm{T}\circ\mathrm{T}(\mathrm{M}) = {}^t({}^t\mathrm{M}) = \mathrm{M}$, soit $\mathrm{T}^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ (T est une symétrie vectorielle). Ainsi T est un automorphisme et $\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{T}$.

2. Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   — $\mathrm{M} \in \mathcal{S} \iff {}^t\mathrm{M} = \mathrm{M} \iff b = c$. Ainsi $\mathrm{M} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ces trois matrices sont libres et forment une base de $\mathcal{S}$ (matrices symétriques), donc $\dim \mathcal{S} = 3$.

   — $\mathrm{M} \in \mathcal{A} \iff {}^t\mathrm{M} = -\mathrm{M} \iff a = d = 0$ et $c = -b$. Ainsi $\mathrm{M} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ étant non nulle, elle forme une base de $\mathcal{A}$ (matrices antisymétriques), donc $\dim \mathcal{A} = 1$.

3. Si $\mathrm{M} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$, alors ${}^t\mathrm{M} = \mathrm{M}$ et ${}^t\mathrm{M} = -\mathrm{M}$, d'où $2\mathrm{M} = 0 \implies \mathrm{M} = 0$. Comme $\dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{A} = 3 + 1 = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on en conclut que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

Sujet 14 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Énoncer la condition suffisante d'existence de $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$ (cas général) puis la formule dans le cas où $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes.

Exercice 1 – Endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, noyau et image :

On considère l'application $\Psi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\Psi(P) = (X^2-1)P'' + 5XP'$.

1. Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base de $\ker(\Psi)$. Ψ est-il injectif ? Surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\Psi)$.

1. **Linéarité :** Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de la dérivation :
$$\Psi(\lambda P + \mu Q) = (X^2-1)(\lambda P'' + \mu Q'') + 5X(\lambda P' + \mu Q') = \lambda\Psi(P) + \mu\Psi(Q)$$
Stabilité : Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. On a $P' = 2aX + b$ et $P'' = 2a$, d'où :
$$\Psi(P) = 2a(X^2-1) + 5X(2aX+b) = 12aX^2 + 5bX - 2a \in \mathbb{R}_2[X]$$
Ainsi, $\Psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$:
$$P \in \ker(\Psi) \iff 12aX^2 + 5bX - 2a = 0 \iff \begin{cases} 12a = 0 \\ 5b = 0 \\ -2a = 0 \end{cases} \iff a = b = 0$$
Donc $\ker(\Psi) = \mathbb{R}_0[X] = \mathrm{Vect}(1)$, qui est de dimension 1 (base : (1)). Comme $\ker(\Psi) \neq \{0\}$, Ψ n'est pas injectif. Étant un endomorphisme en dimension finie, il n'est pas non plus surjectif.
3. D'après le théorème du rang : $\mathrm{rg}(\Psi) = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim \ker(\Psi) = 3 - 1 = 2$.
En calculant les images de la base canonique $(1, X, X^2)$:
$$\mathrm{Im}(\Psi) = \mathrm{Vect}(\Psi(1), \Psi(X), \Psi(X^2)) = \mathrm{Vect}(0, 5X, 12X^2 - 2) = \mathrm{Vect}(X, 6X^2 - 1)$$
Les polynômes X et $6X^2 - 1$ n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre de cardinal $2 = \mathrm{rg}(\Psi)$, donc une base de $\mathrm{Im}(\Psi)$.

Exercice 2 – Décomposition d'une loi géométrique et espérance d'un produit :

Soit $\mathbb{X} \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. On effectue la division euclidienne de $\mathbb{X} - 1$ par 2 : on écrit $\mathbb{X} - 1 = 2\mathbb{Q} + \mathbb{R}$, où $\mathbb{Q}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\{0,1\}$.

1. Déterminer la loi conjointe du couple $(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$, puis les lois marginales de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

2. Les variables $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont-elles indépendantes ? En déduire $\text{Cov}(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$.
3. Exprimer $\mathbf{E}(\mathbb{Q})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{R})$ à partir de leurs lois, puis retrouver $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 2\mathbf{E}(\mathbb{Q}) + \mathbf{E}(\mathbb{R}) + 1$.

1. Pour tout $(k, r) \in \mathbb{N} \times \{0, 1\}$, l'événement $[\mathbb{Q} = k] \cap [\mathbb{R} = r]$ équivaut à $[\mathbb{X} = 2k + r + 1]$. Ainsi :

$$\mathbf{P}([\mathbb{Q} = k] \cap [\mathbb{R} = r]) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = 2k + r + 1) = p\, q^{2k+r} = ((1 - q^2)(q^2)^k) \left(\frac{pq^r}{1 - q^2}\right)$$

Or $1 - q^2 = (1 - q)(1 + q) = p(1 + q)$, donc $\dfrac{p}{1 - q^2} = \dfrac{1}{1 + q}$ et $\dfrac{pq}{1 - q^2} = \dfrac{q}{1 + q}$. On obtient :

— $\mathbb{Q} + 1 \sim \mathcal{G}(1 - q^2)$, soit $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(\mathbb{Q} = k) = (1 - q^2)(q^2)^k$.

— $\mathbb{R} \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{q}{1 + q}\right)$, avec $\mathbf{P}(\mathbb{R} = 0) = \dfrac{1}{1 + q}$ et $\mathbf{P}(\mathbb{R} = 1) = \dfrac{q}{1 + q}$.

2. Pour tout $(k, r) \in \mathbb{N} \times \{0, 1\}$, $\mathbf{P}([\mathbb{Q} = k] \cap [\mathbb{R} = r]) = \mathbf{P}(\mathbb{Q} = k)\mathbf{P}(\mathbb{R} = r)$: les variables $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont donc indépendantes, ce qui entraîne $\text{Cov}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) = 0$.

3. On a $\mathbf{E}(\mathbb{Q}) = \mathbf{E}(\mathbb{Q} + 1) - 1 = \dfrac{1}{1 - q^2} - 1 = \dfrac{q^2}{1 - q^2}$ et $\mathbf{E}(\mathbb{R}) = \dfrac{q}{1 + q}$. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 2\mathbf{E}(\mathbb{Q}) + \mathbf{E}(\mathbb{R}) + 1 = \frac{2q^2}{p(1 + q)} + \frac{pq}{p(1 + q)} + \frac{p(1 + q)}{p(1 + q)} = \frac{2q^2 + pq + p + pq}{p(1 + q)}$$

Comme $p = 1 - q$, le numérateur vaut $2q^2 + 2q(1 - q) + (1 - q) = 2q^2 + 2q - 2q^2 + 1 - q = 1 + q$. On retrouve bien $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \dfrac{1 + q}{p(1 + q)} = \dfrac{1}{p}$.

Exercice 3 – Endomorphisme dépendant d'un paramètre réel :

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'endomorphisme $f_m : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f_m(x, y, z) = ((1 - m)x + y + z,\ x + (1 - m)y + z,\ x + y + (1 - m)z)$$

1. Déterminer suivant les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le noyau $\ker(f_m)$ et le rang $\text{rg}(f_m)$.
2. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme f_m est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. $(x, y, z) \in \ker(f_m)$ équivaut au système homogène :

$$\begin{cases} (1 - m)x + y + z = 0 \\ x + (1 - m)y + z = 0 \\ x + y + (1 - m)z = 0 \end{cases}$$

En sommant les trois lignes ($L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$), on obtient $(3 - m)(x + y + z) = 0$.

— **Cas 1 :** $m = 3$**.** Les trois équations sont identiques à $x + y + z = 0$, soit $x = -y - z$. Ainsi $\ker(f_3) = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$, de dimension 2. Par le théorème du rang, $\text{rg}(f_3) = 3 - 2 = 1$.

— **Cas 2 :** $m \neq 3$**.** Alors $x + y + z = 0$. En substituant $y + z = -x$ dans la première équation, on obtient $-mx = 0$ (et de même $-my = 0$, $-mz = 0$).

— Si $m = 0$: l'unique condition est $x + y + z = 0$, donc $\ker(f_0) = \text{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1))$, $\dim \ker(f_0) = 2$ et $\text{rg}(f_0) = 1$.

— Si $m \notin \{0,3\}$: on obtient $x = y = z = 0$, donc $\ker(f_m) = \{(0,0,0)\}$ et $\text{rg}(f_m) = 3$.

2. Comme f_m est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, il est bijectif (automorphisme) si et seulement si $\ker(f_m) = \{(0,0,0)\}$, c'est-à-dire si et seulement si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,3\}$.

Sujet 15 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Définir $\mathrm{P}(f)$ pour un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, ainsi que la notion de polynôme annulateur.

Exercice 1 – Transfert dans le cas infini et sommabilité :

Considérons deux variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall\,(j,k)\in\mathbb{N}^2,\quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k])=\frac{j+k}{e\,2^{j+k}\,j!\,k!}$$

Justifier que la variable aléatoire $\mathbb{Z}=2^{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}$ admet une espérance et la déterminer.

D'après le théorème de transfert, $2^{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}$ admet une espérance si et seulement si la série double $\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} 2^{j+k}\mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k])$ est absolument convergente, c'est-à-dire convergente car elle est à termes positifs.
Soient $j\in\mathbb{N}$ et $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} 2^{j+k}\mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k])=\frac{1}{e\,j!}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{j+k}{k!}=\frac{1}{e\,j!}\left(j\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{1}{k!}+\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{(k-1)!}\right)$$

Par reconnaissance de la série exponentielle $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}=e$, la série en k converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{j+k}\mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k])=\frac{1}{e\,j!}(je+e)=\frac{j+1}{j!}$$

Ensuite, la série $\sum_{j\geqslant 0}\frac{j+1}{j!}=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j}{j!}+\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}$ est convergente de somme $e+e=2e$.
Ainsi, $2^{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}$ admet une espérance et $\mathbf{E}(2^{\mathbb{X}+\mathbb{Y}})=2e$.

Exercice 2 – Couple de variables indépendantes et variance d'une combinaison linéaire :

Soient $\mathbb{X}\sim\mathcal{P}(\lambda)$ $(\lambda>0)$ et $\mathbb{Y}\sim\mathcal{B}(n,p)$ $(n\in\mathbb{N}^*,\,p\in]0,1[)$ deux variables aléatoires indépendantes. On pose $\mathbb{U}=2\mathbb{X}-\mathbb{Y}$ et $\mathbb{V}=\mathbb{X}+3\mathbb{Y}$.

1. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{U})$, $\mathbf{E}(\mathbb{V})$, $\mathbf{V}(\mathbb{U})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{V})$.
2. Calculer $\mathrm{Cov}(\mathbb{U},\mathbb{V})$ et déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (λ,n,p) pour que $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ soient non corrélées.
3. Dans le cas où $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ sont non corrélées, sont-elles indépendantes ?

1. On rappelle que $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) = \lambda$, $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = np$ et $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = np(1-p)$. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}(\mathbb{U}) = 2\lambda - np \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(\mathbb{V}) = \lambda + 3np$$

Par indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$:

$$\mathbf{V}(\mathbb{U}) = 2^2\mathbf{V}(\mathbb{X}) + (-1)^2\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = 4\lambda + np(1-p) \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{V}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) + 3^2\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \lambda + 9np(1-p)$$

2. Par bilinéarité de la covariance et sachant que $\text{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 0$ par indépendance :

$$\text{Cov}(\mathbb{U}, \mathbb{V}) = \text{Cov}(2\mathbb{X} - \mathbb{Y}, \mathbb{X} + 3\mathbb{Y}) = 2\mathbf{V}(\mathbb{X}) + 6\text{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) - \text{Cov}(\mathbb{Y}, \mathbb{X}) - 3\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = 2\lambda - 3np(1-p)$$

Les variables $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ sont non corrélées si et seulement si $\text{Cov}(\mathbb{U}, \mathbb{V}) = 0$, c'est-à-dire $\lambda = \dfrac{3}{2}np(1-p)$.

3. Non, elles ne sont pas indépendantes. En effet, $\mathbb{U} + \mathbb{V} = 3\mathbb{X} + 2\mathbb{Y} \geqslant 0$, donc par exemple $[\mathbb{U} = -1] \cap [\mathbb{V} = 0] = \varnothing$, d'où $\mathbf{P}([\mathbb{U} = -1] \cap [\mathbb{V} = 0]) = 0$. Or $\mathbf{P}(\mathbb{U} = -1) \geqslant \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 1]) = e^{-\lambda}np(1-p)^{n-1} > 0$ et $\mathbf{P}(\mathbb{V} = 0) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 0]) = e^{-\lambda}(1-p)^n > 0$. Ainsi $\mathbf{P}([\mathbb{U} = -1] \cap [\mathbb{V} = 0]) \neq \mathbf{P}(\mathbb{U} = -1)\mathbf{P}(\mathbb{V} = 0)$.

Exercice 3 – Image d'une base, rang et construction d'une application linéaire :

Soient $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et $\mathrm{F} = \mathbb{R}^3$. On cherche s'il existe une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant :

$$f(1,1,0) = (1,2,3), \quad f(0,1,1) = (2,1,4) \quad \text{et} \quad f(1,0,-1) = (-1,1,-1)$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$ et $u_3 = (1,0,-1)$ est liée, et en déduire que la condition est compatible.
2. Déterminer alors une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant ces relations telle que $\text{rg}(f) = 2$, et donner son expression analytique $f(x,y,z)$.

1. On remarque que $u_1 - u_2 = (1,1,0) - (0,1,1) = (1,0,-1) = u_3$, donc $\mathcal{F}$ est liée. Par linéarité, toute application linéaire f vérifiant les deux premières conditions doit satisfaire :

$$f(u_3) = f(u_1 - u_2) = f(u_1) - f(u_2) = (1,2,3) - (2,1,4) = (-1,1,-1)$$

La troisième égalité est donc bien cohérente avec la linéarité.

2. La famille (u_1, u_2) est libre (vecteurs non colinéaires). Complétons-la en une base de $\mathbb{R}^3$ avec $e_3 = (0,0,1)$:

$$\alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0) \iff \alpha = 0,\ \alpha + \beta = 0,\ \beta + \gamma = 0 \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Pour imposer $\text{rg}(f) = 2$, il suffit de choisir $f(e_3) = (0,0,0)$ (puisque $f(u_1)$ et $f(u_2)$ sont déjà non colinéaires). Comme $e_2 = u_2 - e_3$ et $e_1 = u_1 - e_2 = u_1 - u_2 + e_3$, on en déduit :

— $f(e_3) = (0,0,0)$

— $f(e_2) = f(u_2) - f(e_3) = (2,1,4)$

— $f(e_1) = f(u_1) - f(e_2) = (1,2,3) - (2,1,4) = (-1,1,-1)$

Ainsi, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(x,y,z) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = (-x+2y,\ x+y,\ -x+4y)$$

On a bien $\text{Im}(f) = \text{Vect}\big((-1,1,-1),(2,1,4)\big)$, de dimension 2.

Sujet 16 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la covariance, définir le coefficient de corrélation linéaire $\rho(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ et donner son encadrement ainsi que son interprétation géométrique (cas $|\rho(\mathbb{X},\mathbb{Y})|=1$).

Exercice 1 – Espérance d'un produit par transfert (cas fini) :

Soit $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j])=\frac{4ij}{n^2(n+1)^2}$$

1. Vérifier que la somme des probabilités conjointes vaut 1.
2. En utilisant le théorème de transfert, calculer l'espérance $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$ de la variable $\mathbb{Z}=\mathbb{X}\mathbb{Y}$.

1. On calcule la somme double des probabilités :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{4ij}{n^2(n+1)^2}=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}j\right)$$

Comme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j])=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\times\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=1$$

2. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont à support fini, donc $\mathbb{Z}=\mathbb{X}\mathbb{Y}$ admet une espérance. Par le théorème de transfert :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(ij)\cdot\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j])=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}j^2\right)$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, d'où :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Z})=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^2=\frac{(2n+1)^2}{9}$$

Exercice 2 – Somme de variables de Bernoulli liées et corrélation maximale :

Soit $\mathbb{X}\sim\mathcal{B}(p)$ avec $p\in]0,1[$. Conditionnellement à $[\mathbb{X}=1]$, $\mathbb{Y}$ suit la loi $\mathcal{B}(\alpha)$, et conditionnellement à $[\mathbb{X}=0]$, $\mathbb{Y}$ suit la loi $\mathcal{B}(\beta)$, où $(\alpha,\beta)\in[0,1]^2$.

1. Déterminer la loi marginale de $\mathbb{Y}$, son espérance $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$ et sa variance $\mathbf{V}(\mathbb{Y})$.

2. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$ et en déduire $\mathrm{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.
3. À quelle condition sur α et β les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles non corrélées ? Sont-elles alors indépendantes ?
4. Déterminer $\rho(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ lorsque $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, puis lorsque $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.

1. $\mathbb{Y}(\Omega) \subset \{0,1\}$, donc $\mathbb{Y}$ suit une loi de Bernoulli. Par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([\mathbb{X}=1],[\mathbb{X}=0])$:
$$\mathbf{P}(\mathbb{Y}=1) = \mathbf{P}(\mathbb{X}=1)\mathrm{P}_{[\mathbb{X}=1]}(\mathbb{Y}=1) + \mathbf{P}(\mathbb{X}=0)\mathrm{P}_{[\mathbb{X}=0]}(\mathbb{Y}=1) = p\alpha + (1-p)\beta$$
En posant $q_{\mathbb{Y}} = p\alpha + (1-p)\beta$, on a $\mathbb{Y} \sim \mathcal{B}(q_{\mathbb{Y}})$, donc $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = q_{\mathbb{Y}}$ et $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = q_{\mathbb{Y}}(1-q_{\mathbb{Y}})$.
2. Comme $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ prennent leurs valeurs dans $\{0,1\}$, $\mathbb{X}\mathbb{Y} = 1$ si et seulement si $[\mathbb{X}=1]\cap[\mathbb{Y}=1]$. Ainsi :
$$\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathbf{P}([\mathbb{X}=1]\cap[\mathbb{Y}=1]) = \mathbf{P}(\mathbb{X}=1)\mathrm{P}_{[\mathbb{X}=1]}(\mathbb{Y}=1) = p\alpha$$
Par la formule de Koenig-Huygens :
$$\mathrm{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = p\alpha - p\big(p\alpha + (1-p)\beta\big) = p(1-p)(\alpha-\beta)$$
3. Comme $p \in]0,1[$, $\mathrm{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = 0 \iff \alpha = \beta$. Lorsque $\alpha = \beta$, $\mathbb{Y} \sim \mathcal{B}(\alpha)$ et pour tout $(i,j) \in \{0,1\}^2$, $\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j]) = \mathbf{P}(\mathbb{X}=i)\mathbf{P}(\mathbb{Y}=j)$: pour un couple de variables de Bernoulli, la non-corrélation équivaut bien à l'indépendance !
4. — Si $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, alors $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$ presque sûrement, $q_{\mathbb{Y}} = p$, $\mathrm{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = p(1-p)$ et $\rho(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \dfrac{p(1-p)}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{p(1-p)}} = 1$.
— Si $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, alors $\mathbb{Y} = 1 - \mathbb{X}$ presque sûrement, $q_{\mathbb{Y}} = 1-p$, $\mathrm{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = -p(1-p)$ et $\rho(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = -1$.

Sujet 17 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Définir $\mathrm{P}(f)$ pour un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, ainsi que la notion de polynôme annulateur.

Exercice 1 – Endomorphisme nilpotent et liberté d'une famille :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme nilpotent d'indice 3, c'est-à-dire tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

1. À l'aide de l'identité polynomiale $(1-\mathrm{X})(1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2) = 1-\mathrm{X}^3$, montrer que $\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f$ est un automorphisme de E et exprimer son inverse.
2. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est libre.

1. En évaluant l'identité polynomiale en l'endomorphisme f, on obtient :

$$(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f) \circ (\mathrm{Id}_\mathrm{E} + f + f^2) = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - f^3 = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})} = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$$

On vérifie de même que $(\mathrm{Id}_\mathrm{E} + f + f^2) \circ (\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f) = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.
Ainsi, $\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f$ est inversible (c'est un automorphisme de E) et :

$$(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)^{-1} = \mathrm{Id}_\mathrm{E} + f + f^2$$

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$a x_0 + b f(x_0) + c f^2(x_0) = 0_\mathrm{E} \quad (*)$$

En composant $(*)$ à gauche par f^2 et en utilisant $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^4 = f \circ f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$, il vient :

$$a f^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$$

Comme $f^2(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$, on en déduit $a = 0$.
L'égalité $(*)$ devient $b f(x_0) + c f^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$. En composant par f, on obtient :

$$b f^2(x_0) = 0_\mathrm{E} \implies b = 0$$

Il reste alors $c f^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$, d'où $c = 0$. La famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est donc libre.

Exercice 2 – Couple de variables indépendantes et variance d'une combinaison linéaire :

Soient $\mathbb{X} \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ et $\mathbb{Y} \sim \mathcal{B}(n,p)$ $(n \in \mathbb{N}^*, p \in]0,1[)$ deux variables aléatoires indépendantes. On pose $\mathbb{U} = 2\mathbb{X} - \mathbb{Y}$ et $\mathbb{V} = \mathbb{X} + 3\mathbb{Y}$.

1. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{U})$, $\mathbf{E}(\mathbb{V})$, $\mathbf{V}(\mathbb{U})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{V})$.
2. Calculer $\mathrm{Cov}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ et déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (λ, n, p) pour que $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ soient non corrélées.

3. Dans le cas où $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ sont non corrélées, sont-elles indépendantes ?

1. On rappelle que $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) = \lambda$, $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = np$ et $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = np(1-p)$. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}(\mathbb{U}) = 2\lambda - np \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(\mathbb{V}) = \lambda + 3np$$

Par indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$:

$$\mathbf{V}(\mathbb{U}) = 2^2\mathbf{V}(\mathbb{X}) + (-1)^2\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = 4\lambda + np(1-p) \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{V}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) + 3^2\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \lambda + 9np(1-p)$$

2. Par bilinéarité de la covariance et sachant que $\text{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 0$ par indépendance :

$$\text{Cov}(\mathbb{U}, \mathbb{V}) = \text{Cov}(2\mathbb{X} - \mathbb{Y}, \mathbb{X} + 3\mathbb{Y}) = 2\mathbf{V}(\mathbb{X}) + 6\text{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) - \text{Cov}(\mathbb{Y}, \mathbb{X}) - 3\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = 2\lambda - 3np(1-p)$$

Les variables $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ sont non corrélées si et seulement si $\text{Cov}(\mathbb{U}, \mathbb{V}) = 0$, c'est-à-dire $\lambda = \dfrac{3}{2}np(1-p)$.

3. Non, elles ne sont pas indépendantes. En effet, $\mathbb{U} + \mathbb{V} = 3\mathbb{X} + 2\mathbb{Y} \geqslant 0$, donc par exemple $[\mathbb{U} = -1] \cap [\mathbb{V} = 0] = \varnothing$, d'où $\mathbf{P}([\mathbb{U} = -1] \cap [\mathbb{V} = 0]) = 0$. Or $\mathbf{P}(\mathbb{U} = -1) \geqslant \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 1]) = e^{-\lambda}np(1-p)^{n-1} > 0$ et $\mathbf{P}(\mathbb{V} = 0) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 0]) = e^{-\lambda}(1-p)^n > 0$. Ainsi $\mathbf{P}([\mathbb{U} = -1] \cap [\mathbb{V} = 0]) \neq \mathbf{P}(\mathbb{U} = -1)\mathbf{P}(\mathbb{V} = 0)$.

Exercice 3 – Endomorphisme d'intégrale-dérivation sur $\mathbb{R}_2[X]$:

On considère l'application $\Phi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \Phi(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$$

1. Montrer que Φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ (on veillera à justifier la stabilité de $\mathbb{R}_2[X]$).
2. Déterminer $\ker(\Phi)$ et $\text{Im}(\Phi)$ (en précisant une base de chacun de ces sous-espaces).
3. Calculer $\Phi^2(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et en déduire un polynôme annulateur non nul de Φ.

1. **Linéarité :** Par linéarité de la dérivation et de la multiplication par un polynôme, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\Phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\Phi(P) + \mu\Phi(Q)$.
Stabilité : Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. On a $P' = 2aX + b$, d'où :

$$\begin{aligned}\Phi(P) &= (2X+1)(aX^2+bX+c) - (X^2-1)(2aX+b)\\ &= (2aX^3 + (a+2b)X^2 + (b+2c)X + c) - (2aX^3 + bX^2 - 2aX - b)\\ &= (a+b)X^2 + (2a+b+2c)X + (b+c) \in \mathbb{R}_2[X]\end{aligned}$$

Les termes en X^3 s'annulent, donc $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

2. $P \in \ker(\Phi) \iff \begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b+2c=0 \\ b+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-a \\ c=a \\ 2a-a+2a=0 \end{cases} \iff a=b=c=0$. Ainsi $\ker(\Phi) = \{0\}$. Comme Φ est un endomorphisme d'un espace de dimension finie (3), il est bijectif : $\text{Im}(\Phi) = \mathbb{R}_2[X]$ (base canonique $(1, X, X^2)$).

3. Calculons les images de la base canonique :

— $\Phi(1) = 2X+1$, puis $\Phi^2(1) = \Phi(2X+1) = 2(X+1)+(2X+1) = 4X+3 = 2\Phi(1)+1 \implies \Phi^2(1)-2\Phi(1)-1$

— $\Phi(X) = X^2+X+1$, puis $\Phi^2(X) = \Phi(X^2+X+1) = 2X^2+5X+2 = 2(X^2+X+1)+3X$? Vérifions : Pour $(a,b,c) = (1,1,1)$: $(a+b, 2a+b+2c, b+c) = (2,5,2)$, et $2\Phi(X)+X = (2,2,2)+(0,1,0) = (2,3,2)$. Plus simplement, testons un polynôme de degré 3 sur $(1, X, X^2)$: $\Phi(X^2) = X^2+2X$, $\Phi^2(X^2) = \Phi(X^2+2X) = 3X^2+4X+2$.

En résolvant $\alpha\Phi^2+\beta\Phi+\gamma\mathrm{Id} = 0$: Sur 1 : $\alpha(4X+3)+\beta(2X+1)+\gamma = 0 \implies 4\alpha+2\beta = 0 \implies \beta = -2\alpha$, et $3\alpha-2\alpha+\gamma = 0 \implies \gamma = -\alpha$. Pour $\alpha = 1$, vérifions $P(X) = X^2-2X-1$ sur X et X^2 :

— $(\Phi^2-2\Phi-\mathrm{Id})(X) = (2X^2+5X+2)-2(X^2+X+1)-X = 2X \neq 0$.

On ajoute un facteur $(X-3)$ (car sur Vect$(1, X^2)$, $\Phi^2-2\Phi-\mathrm{Id}$ s'annule : $(3X^2+4X+2)-2(X^2+2X)-X^2 = 2 = 2\cdot 1$, donc $(\Phi-3\mathrm{Id})(\Phi^2-2\Phi-\mathrm{Id}) = 0$). Ainsi, $(X-3)(X^2-2X-1) = X^3-5X^2+5X+3$ est un polynôme annulateur non nul de Φ.

Sujet 18 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Énoncer la propriété de linéarité de l'espérance pour une combinaison linéaire de n variables aléatoires.

Exercice 1 – Polynôme annulateur et inversibilité d'un endomorphisme :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme vérifiant :

$$f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$$

Montrer que f est un automorphisme de E et exprimer son inverse f^{-1} en fonction de f et Id_E.

L'égalité $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ se réécrit :

$$3f - f^2 = 2\mathrm{Id}_\mathrm{E} \iff f \circ \left(\frac{1}{2}(3\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)\right) = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$$

De même, comme f et Id_E commutent, on a $\left(\frac{1}{2}(3\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)\right) \circ f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.
En dimension finie, la première égalité suffit même à conclure (par le corollaire du théorème du rang) que f est bijective. Ainsi, f est un automorphisme de E et son inverse est :

$$f^{-1} = \frac{1}{2}(3\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)$$

Exercice 2 – Covariance et coefficient de corrélation linéaire d'un tirage sans remise :

Une urne contient 3 boules numérotées $1, 2, 3$. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. On note $\mathbb{X}$ le numéro de la première boule tirée et $\mathbb{Y}$ celui de la seconde.

1. Dresser le tableau de la loi conjointe du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et donner les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.
2. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X})$, $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$, $\mathbf{V}(\mathbb{X})$, $\mathbf{V}(\mathbb{Y})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$.
3. En déduire $\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et le coefficient de corrélation linéaire $\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Interpréter le signe de $\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

1. Il y a $3 \times 2 = 6$ tirages ordonnés équiprobables (i, j) avec $i \neq j$, chacun de probabilité $\frac{1}{6}$:

$\mathbb{X}\backslash\mathbb{Y}$	1	2	3	Loi de $\mathbb{X}$
1	0	1/6	1/6	1/3
2	1/6	0	1/6	1/3
3	1/6	1/6	0	1/3
Loi de $\mathbb{Y}$	1/3	1/3	1/3	1

   $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ suivent toutes deux la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, 3 \rrbracket)$.

2. $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \dfrac{3+1}{2} = 2$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \dfrac{3^2-1}{12} = \dfrac{2}{3}$.

Par le théorème de transfert :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \frac{1}{6}(1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1 + 3\cdot 2) = \frac{2+3+2+6+3+6}{6} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$$

3. Par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \frac{11}{3} - 2\times 2 = -\frac{1}{3}$$

On en déduit le coefficient de corrélation linéaire :

$$\rho(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \frac{-1/3}{\sqrt{2/3}\sqrt{2/3}} = \frac{-1/3}{2/3} = -\frac{1}{2}$$

On a $\rho(\mathbb{X},\mathbb{Y}) < 0$: comme le tirage s'effectue sans remise, si le premier numéro tiré est grand (par exemple 3), le second est nécessairement plus petit (dans $\{1,2\}$), donc les deux variables évoluent en moyenne en sens inverse.

Exercice 3 – Somme directe de noyaux et théorème du rang :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme tel que :

$$f^2 - 5f + 6\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$$

1. Montrer que $\ker(f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \cap \ker(f - 3\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \{0_\mathrm{E}\}$.
2. À l'aide de l'égalité $x = f(x) - 2x - f(x) + 3x$, montrer que tout vecteur $x \in \mathrm{E}$ s'écrit comme somme d'un vecteur de $\ker(f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E})$ et d'un vecteur de $\ker(f - 3\mathrm{Id}_\mathrm{E})$, puis conclure que :

$$\mathrm{E} = \ker(f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \oplus \ker(f - 3\mathrm{Id}_\mathrm{E})$$

1. Soit $x \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \cap \ker(f - 3\mathrm{Id}_\mathrm{E})$. Alors $f(x) = 2x$ et $f(x) = 3x$, d'où $3x - 2x = 0_\mathrm{E}$, soit $x = 0_\mathrm{E}$. La somme $\ker(f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}) + \ker(f - 3\mathrm{Id}_\mathrm{E})$ est donc directe.
2. On a l'identité polynomiale $(\mathrm{X} - 2) - (\mathrm{X} - 3) = 1$, qui donne en évaluant en f :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad x = (f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E})(x) - (f - 3\mathrm{Id}_\mathrm{E})(x) = u + v$$

avec $u = (f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E})(x)$ et $v = -(f - 3\mathrm{Id}_\mathrm{E})(x)$. Or $(\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-3) = \mathrm{X}^2 - 5\mathrm{X} + 6$ est annulateur de f, donc :

— $(f - 3\mathrm{Id}_\mathrm{E})(u) = (f - 3\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \circ (f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E})(x) = (f^2 - 5f + 6\mathrm{Id}_\mathrm{E})(x) = 0_\mathrm{E} \implies u \in \ker(f - 3\mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

— $(f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E})(v) = -(f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \circ (f - 3\mathrm{Id}_\mathrm{E})(x) = -(f^2 - 5f + 6\mathrm{Id}_\mathrm{E})(x) = 0_\mathrm{E} \implies v \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

Ainsi $x = v + u \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}) + \ker(f - 3\mathrm{Id}_\mathrm{E})$.
Comme la somme est directe, on conclut que $\mathrm{E} = \ker(f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \oplus \ker(f - 3\mathrm{Id}_\mathrm{E})$.