Nom : ..... **Prénom :** .....

Sujet 1 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Énoncer le théorème de transfert pour une variable aléatoire $\mathbb{Z} = g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ dans le cas fini, puis préciser la condition d'existence (sommabilité) dans le cas infini.

Exercice 1 – Espérance d'un produit par transfert (cas fini) :

Soit $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=i] \cap [\mathbb{Y}=j]) = \frac{4ij}{n^2(n+1)^2}$$

1. Vérifier que la somme des probabilités conjointes vaut 1.
2. En utilisant le théorème de transfert, calculer l'espérance $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$ de la variable $\mathbb{Z} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$.

Exercice 2 – Forme linéaire sur $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, noyau et supplémentaire :

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}], \quad \varphi(\mathrm{P}) = \int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que φ est une application linéaire (forme linéaire sur $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$).
2. Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et en déduire $\dim \ker(\varphi)$ à l'aide du théorème du rang.
3. Déterminer une base de $\ker(\varphi)$ et montrer que $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}] = \ker(\varphi) \oplus \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$.

Nom : ..... **Prénom :** .....

Sujet 2 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Définir une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Rappeler la caractérisation pratique avec $\lambda x + \mu y$.

Exercice 1 – Transfert dans le cas infini et sommabilité :

Considérons deux variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall\, (j,k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = j] \cap [\mathbb{Y} = k]) = \frac{j+k}{e\, 2^{j+k}\, j!\, k!}$$

Justifier que la variable aléatoire $\mathbb{Z} = 2^{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}$ admet une espérance et la déterminer.

Exercice 2 – Sommabilité et espérance d'une fonction d'un couple infini :

Soient $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$. On considère deux variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall\, (j,k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = j] \cap [\mathbb{Y} = k]) = p^2 q^{j+k}$$

pour tout $(j,k) \in \mathbb{N}^2$.)

1. Vérifier que l'on définit bien une loi de probabilité conjointe sur $\mathbb{N}^2$ et montrer que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes.
2. Montrer que la variable aléatoire $\mathbb{Z} = \dfrac{1}{\mathbb{X}+\mathbb{Y}+1}$ admet une espérance et calculer $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$ en fonction de p et q.

Exercice 3 – Image d'une base, rang et construction d'une application linéaire :

Soient $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et $\mathrm{F} = \mathbb{R}^3$. On cherche s'il existe une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant :

$$f(1,1,0) = (1,2,3), \quad f(0,1,1) = (2,1,4) \quad \text{et} \quad f(1,0,-1) = (-1,1,-1)$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$ et $u_3 = (1,0,-1)$ est liée, et en déduire que la condition est compatible.
2. Déterminer alors une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant ces relations telle que $\mathrm{rg}(f) = 2$, et donner son expression analytique $f(x,y,z)$.

Nom : ..... **Prénom :** .....

Sujet 3 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Énoncer la formule de $\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y})$ dans le cas général, puis dans le cas de n variables mutuellement indépendantes. En déduire la variance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Exercice 1 – Covariance, corrélation et non-indépendance :

Soient $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3$ trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$. On pose $\mathbb{Y} = \mathbb{X}_1\mathbb{X}_2$ et $\mathbb{Z} = \mathbb{X}_2\mathbb{X}_3$.

1. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$, $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{Y}\mathbb{Z})$.
2. En déduire $\mathrm{Cov}(\mathbb{Y},\mathbb{Z})$. Les variables $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{Z}$ sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(\mathbb{Y},\mathbb{Z})$.

Exercice 2 – Espérance du minimum et du maximum de deux lois géométriques :

Soient $\mathbb{X} \sim \mathcal{G}(p_1)$ et $\mathbb{Y} \sim \mathcal{G}(p_2)$ deux variables aléatoires indépendantes, avec $(p_1,p_2) \in]0,1[^2$. On pose $q_1 = 1-p_1$, $q_2 = 1-p_2$, $\mathbb{U} = \min(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ et $\mathbb{V} = \max(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

1. Déterminer la loi de $\mathbb{U}$, son espérance $\mathbf{E}(\mathbb{U})$ et sa variance $\mathbf{V}(\mathbb{U})$.
2. Exprimer $\mathbb{U}+\mathbb{V}$ et $\mathbb{U}\mathbb{V}$ en fonction de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.
3. En déduire que $\mathbb{V}$ admet une espérance et calculer $\mathbf{E}(\mathbb{V})$, puis $\mathrm{Cov}(\mathbb{U},\mathbb{V})$.

Exercice 3 :

Soit ϕ : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(1), P'(1)) \end{array}$

Montrer que ϕ est linéaire.

Déterminer $\ker\phi$ et $\mathrm{Im}\,\phi$.

Nom : ..... **Prénom :** .....

Sujet 4 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Énoncer les propriétés de la covariance : symétrie, bilinéarité, covariance avec une constante et lien avec l'indépendance (en précisant bien le sens de l'implication).

Exercice 1 – Non corrélation n'implique pas indépendance :

On choisit au hasard et de façon équiprobable un point dans le plan parmi $(0,1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ et $(0,-1)$. On note $\mathbb{X}$ l'abscisse du point et $\mathbb{Y}$ son ordonnée.

1. Déterminer les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$, ainsi que leurs espérances.
2. Calculer $\text{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles corrélées ?
3. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 – Tirages dans une urne et covariance via variance d'une somme :

Une urne contient n boules blanches et n boules noires ($n \geqslant 2$). On effectue k tirages successifs sans remise ($1 \leqslant k \leqslant 2n$). Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, on note $\mathbb{X}_i$ la variable aléatoire de Bernoulli valant 1 si la i-ème boule tirée est blanche, et 0 sinon. On pose $\mathbb{S}_k = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{X}_i$.

1. Déterminer la loi de $\mathbb{X}_i$ pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, ainsi que $\mathbf{E}(\mathbb{X}_i)$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}_i)$.
2. Calculer $\text{Cov}(\mathbb{X}_i,\mathbb{X}_j)$ pour $1 \leqslant i \neq j \leqslant k$.
3. En déduire $\mathbf{E}(\mathbb{S}_k)$ et $\mathbf{V}(\mathbb{S}_k)$. Que vaut $\mathbf{V}(\mathbb{S}_{2n})$? Commenter.

Nom : ..... **Prénom :** .....

Sujet 5 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Définir le rang d'une application linéaire $\mathrm{rg}(f)$, énoncer le théorème du rang ainsi que son corollaire en dimension égale ($\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$).

Exercice 1 – Variance d'une somme et symétrie min / max :

On lance deux dés équilibrés à 3 faces et on note $\mathbb{Z}_1$ et $\mathbb{Z}_2$ les résultats obtenus. On pose $\mathbb{X} = \min(\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2)$ et $\mathbb{Y} = \max(\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2)$.

1. Exprimer $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$ en fonction de $\mathbb{Z}_1$ et $\mathbb{Z}_2$.
2. En déduire sans calcul de loi conjointe la variance $\mathbf{V}(\mathbb{X} + \mathbb{Y})$.
3. Sachant que $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \dfrac{38}{81}$, déterminer $\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Exercice 2 – Bilinéarité de la covariance et corrélation linéaire :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2, de même variance $\sigma^2 > 0$. On pose $\mathbb{U} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$ et $\mathbb{V} = \mathbb{X} - \mathbb{Y}$.

1. Calculer $\mathrm{Cov}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$. Les variables $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ sont-elles corrélées ?
2. Sont-elles nécessairement indépendantes ? Illustrer par un contre-exemple simple.
3. Exprimer $\rho(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ lorsque $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \sigma_1^2$ et $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \sigma_2^2$ sont quelconques (non nulles), avec $\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = r$.

Exercice 3 – Endomorphisme de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, noyau et image :

On considère l'application $f : \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ définie par :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}], \quad f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}) - \mathrm{P}(\mathrm{X} - 1)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$ et en déduire $\mathrm{rg}(f)$.
3. Déterminer explicitement l'image $\mathrm{Im}(f)$ et vérifier que $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}] = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$? *(Question : $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$?)*

Nom : ..... **Prénom :** .....

Sujet 6 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Énoncer le théorème de transfert pour une variable aléatoire $\mathbb{Z} = g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ dans le cas fini, puis préciser la condition d'existence (sommabilité) dans le cas infini.

Exercice 1 – Covariance, corrélation et non-indépendance :

Soient $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3$ trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$. On pose $\mathbb{Y} = \mathbb{X}_1\mathbb{X}_2$ et $\mathbb{Z} = \mathbb{X}_2\mathbb{X}_3$.

1. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$, $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{Y}\mathbb{Z})$.
2. En déduire $\mathrm{Cov}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$. Les variables $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{Z}$ sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$.

Exercice 2 – Conditionnement Poisson-Binomiale et corrélation :

Un standard téléphonique reçoit un nombre $\mathbb{N}$ d'appels au cours d'une heure, où $\mathbb{N} \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$). Chaque appel est un appel d'urgence avec la probabilité $p \in]0,1[$, indépendamment des autres appels et de $\mathbb{N}$. On note $\mathbb{X}$ le nombre d'appels d'urgence reçus et $\mathbb{Y} = \mathbb{N} - \mathbb{X}$ le nombre d'appels non urgents.

1. Déterminer la loi conjointe du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et reconnaître les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.
2. Que dire de l'indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$? En déduire $\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.
3. Calculer $\mathrm{Cov}(\mathbb{N}, \mathbb{X})$ et le coefficient de corrélation linéaire $\rho(\mathbb{N}, \mathbb{X})$. Interpréter son signe et son comportement lorsque $p \to 1$.

Exercice 3 – Application linéaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et théorème du rang :

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\ker(\varphi)$ et donner sa dimension.
3. En déduire $\mathrm{rg}(\varphi)$, puis déterminer une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Nom : ..... **Prénom :** .....

Sujet 7 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Définir le noyau $\ker(f)$ et l'image $\mathrm{Im}(f)$ d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, et préciser leur structure algébrique.

Exercice 1 – Endomorphisme nilpotent et liberté d'une famille :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme nilpotent d'indice 3, c'est-à-dire tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

1. À l'aide de l'identité polynomiale $(1-\mathrm{X})(1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2) = 1-\mathrm{X}^3$, montrer que $\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f$ est un automorphisme de E et exprimer son inverse.
2. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est libre.

Exercice 2 – Inégalité de Cauchy-Schwarz et relation affine presque sûre :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2, de variances non nulles.

1. En étudiant le signe de $t \longmapsto \mathbf{V}(t\mathbb{X}+\mathbb{Y})$ pour $t \in \mathbb{R}$, redémontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\big(\mathrm{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})\big)^2 \leqslant \mathbf{V}(\mathbb{X})\mathbf{V}(\mathbb{Y})$$
2. On suppose dans cette question que $\mathbb{X}(\Omega) = \{0,1,2\}$ avec
$$\mathbf{P}(\mathbb{X}=0) = \mathbf{P}(\mathbb{X}=1) = \mathbf{P}(\mathbb{X}=2) = \frac{1}{3},$$
et que $\mathbb{Y} = -3\mathbb{X}+4$.
Calculer $\mathbf{V}(\mathbb{X})$, $\mathbf{V}(\mathbb{Y})$, $\mathrm{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ et $\rho(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, et vérifier le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 3 – Caractérisation d'un isomorphisme par transport de base :

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ définie par :
$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad f(a,b,c) = (a+b) + (b+c)\mathrm{X} + (a+c)\mathrm{X}^2$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer l'image par f de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et expliciter son application réciproque f^{-1}.

Nom : ..... **Prénom :** .....

Sujet 8 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Définir le rang d'une application linéaire $\mathrm{rg}(f)$, énoncer le théorème du rang ainsi que son corollaire en dimension égale ($\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$).

Exercice 1 – Polynôme annulateur et inversibilité d'un endomorphisme :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme vérifiant :

$$f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$$

Montrer que f est un automorphisme de E et exprimer son inverse f^{-1} en fonction de f et Id_E.

Exercice 2 – Somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires (Formule de Wald) :

Soit $(\mathbb{X}_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi admettant un moment d'ordre 2, d'espérance m et de variance σ^2. Soit $\mathbb{N}$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendante de la suite $(\mathbb{X}_k)_{k\geqslant 1}$, d'espérance μ et de variance τ^2. On pose :

$$\mathbb{S} = \sum_{k=1}^{\mathbb{N}} \mathbb{X}_k$$

1. Exprimer l'événement $[\mathbb{S} = s]$ à l'aide du système complet d'événements $([\mathbb{N} = n])_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. En admettant l'existence de $\mathbf{E}(\mathbb{S})$ et de $\mathbf{E}(\mathbb{S}^2)$, calculer $\mathbf{E}(\mathbb{S})$ en fonction de m et μ.
3. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{S}^2)$ et en déduire que $\mathbf{V}(\mathbb{S}) = \mu\sigma^2 + m^2\tau^2$.

Exercice 3 – Polynôme annulateur et étude d'un projecteur :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $p \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme tel que $p^2 = p$ (on dit que p est un projecteur).

1. Donner un polynôme annulateur non nul de p.
2. Montrer que $\ker(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - p)$ et que $\mathrm{Im}(p) = \ker(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - p)$.

Nom : ..... **Prénom :** .....

Sujet 9 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Énoncer la caractérisation de l'injectivité via le noyau et celle de la surjectivité via l'image.

Exercice 1 – Caractérisation des isomorphismes en dimension égale :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par :

$$f(x, y, z) = (x + y + 2z,\ x + z,\ -x - z)$$

1. Déterminer l'image par f des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ et le rang de f.
3. L'endomorphisme f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$? Déterminer $\dim \ker(f)$.

Exercice 2 – Espérance d'un produit et loi conjointe :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $[\![1, n]\!]^2$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = \frac{a}{|i-j|+1} \quad \text{si } i = j \text{ ou } |i-j| = 1, \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Plus précisément, on suppose que $\mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = i]) = \alpha$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et $\mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = \beta$ dès que $|i - j| = 1$, avec $\alpha = 2\beta$.

1. Déterminer α et β en fonction de n pour que l'on définisse bien une loi de probabilité.
2. Déterminer les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$, ainsi que leurs espérances.
3. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$ à l'aide du théorème de transfert et en déduire $\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Exercice 3 – Polynôme annulateur de degré 2 et inverse d'un endomorphisme :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u(x, y, z) = (2x - y + z,\ x + z,\ -x + y + 2z)$$

1. Calculer $u^2(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, puis vérifier que $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.
2. En déduire que u est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer l'expression analytique de $u^{-1}(x, y, z)$.

Nom : ..... **Prénom :** .....

Sujet 10 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Définir le noyau $\ker(f)$ et l'image $\mathrm{Im}(f)$ d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, et préciser leur structure algébrique.

Exercice 1 – Noyau, théorème du rang et surjectivité :

Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x,y,z,t) = (x - 2y + z + 2t,\ 2y - t)$$

1. Déterminer une base de $\ker(f)$ et en déduire sa dimension.
2. À l'aide du théorème du rang, déterminer $\mathrm{rg}(f)$. L'application f est-elle surjective ?

Exercice 2 – Espérance d'un produit sur support triangulaire et covariance :

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On considère un couple $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $[\![1,n]\!]^2$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=i] \cap [\mathbb{Y}=j]) = \begin{cases} c & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la constante c en fonction de n.
2. Déterminer les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$, puis calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$.
3. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$ à l'aide du théorème de transfert et en déduire $\mathrm{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

Nom : ..... **Prénom :** .....

Sujet 11 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Énoncer le théorème de transport d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ par une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ (image, injectivité, surjectivité, bijectivité).

Exercice 1 – Endomorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, noyau et image :

On considère l'application $\Psi : \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ définie par $\Psi(\mathrm{P}) = (\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{P}'' + 5\mathrm{X}\mathrm{P}'$.

1. Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
2. Déterminer une base de $\ker(\Psi)$. Ψ est-il injectif ? Surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\Psi)$.

Exercice 2 – Sommabilité et espérance sur $\mathbb{N}^2$ (Loi géométrique biaisée) :

Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On considère un couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que :

$$\forall\, (j, k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = j] \cap [\mathbb{Y} = k]) = (1 - q)^3\, (j + 1)\, q^{j+k}.$$

1. Vérifier que l'on définit bien une loi de probabilité conjointe sur $\mathbb{N}^2$, déterminer les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$, et dire si elles sont indépendantes.
2. Justifier que la variable aléatoire $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{Y}}{\mathbb{X} + 1}$ admet une espérance et calculer $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$.

Exercice 3 – Famille libre générée par un endomorphisme et polynôme annulateur :

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

1. Justifier qu'il existe un vecteur $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_{\mathrm{E}}$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de E.
3. Déterminer $\ker(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{rg}(f)$.
4. Montrer que l'endomorphisme $g = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} + f + f^2$ est un automorphisme de E et déterminer g^{-1}.

Nom : ..... **Prénom :** .....

Sujet 12 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Donner la définition de $\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, une condition suffisante d'existence et énoncer la formule de Koenig-Huygens.

Exercice 1 :

On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;x+y) \end{array}$.

Déterminer une base du noyau et de l'image de f.

Exercice 2 – Modèle urne-boules et covariance d'indicateurs :

On lance n boules ($n \geqslant 2$) indépendamment et au hasard dans m boîtes numérotées de 1 à m ($m \geqslant 3$).

Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on note $\mathbb{X}_i$ la variable aléatoire valant 1 si la boîte i est vide à l'issue des n lancers, et 0 sinon.

Soit $\mathbb{V} = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{X}_i$ le nombre de boîtes vides.

1. Déterminer la loi de $\mathbb{X}_i$, son espérance $\mathbf{E}(\mathbb{X}_i)$ et sa variance $\mathbf{V}(\mathbb{X}_i)$.
2. Pour $1 \leqslant i \neq j \leqslant m$, calculer $\mathrm{Cov}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j)$ et commenter son signe.
3. En déduire l'espérance $\mathbf{E}(\mathbb{V})$ et la variance $\mathbf{V}(\mathbb{V})$ du nombre de boîtes vides.

Exercice 3 – Forme linéaire sur $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, noyau et supplémentaire :

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}], \quad \varphi(\mathrm{P}) = \int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que φ est une application linéaire (forme linéaire sur $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$).
2. Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et en déduire $\dim \ker(\varphi)$ à l'aide du théorème du rang.
3. Déterminer une base de $\ker(\varphi)$ et montrer que $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}] = \ker(\varphi) \oplus \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$.

Nom : ..... **Prénom :** .....

Sujet 13 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Énoncer la caractérisation de l'injectivité via le noyau et celle de la surjectivité via l'image.

Exercice 1 – Espérance d'un produit par transfert (cas fini) :

Soit $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=i] \cap [\mathbb{Y}=j]) = \frac{4ij}{n^2(n+1)^2}$$

1. Vérifier que la somme des probabilités conjointes vaut 1.
2. En utilisant le théorème de transfert, calculer l'espérance $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$ de la variable $\mathbb{Z} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$.

Exercice 2 – Covariance et coefficient de corrélation linéaire d'un tirage sans remise :

Une urne contient 3 boules numérotées $1, 2, 3$. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. On note $\mathbb{X}$ le numéro de la première boule tirée et $\mathbb{Y}$ celui de la seconde.

1. Dresser le tableau de la loi conjointe du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et donner les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.
2. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X})$, $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$, $\mathbf{V}(\mathbb{X})$, $\mathbf{V}(\mathbb{Y})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$.
3. En déduire $\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et le coefficient de corrélation linéaire $\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Interpréter le signe de $\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Exercice 3 – Endomorphisme de transposition sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

On considère l'application $\mathrm{T} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \mathrm{T}(\mathrm{M}) = {}^t\mathrm{M}$$

1. Montrer que T est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et préciser T^{-1}.
2. Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces $\mathcal{S} = \ker\left(\mathrm{T} - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\right)$ et $\mathcal{A} = \ker\left(\mathrm{T} + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\right)$.
3. Montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

Nom : ..... **Prénom :** .....

Sujet 14 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Énoncer la condition suffisante d'existence de $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$ (cas général) puis la formule dans le cas où $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes.

Exercice 1 – Endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, noyau et image :

On considère l'application $\Psi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\Psi(P) = (X^2-1)P'' + 5XP'$.

1. Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base de $\ker(\Psi)$. Ψ est-il injectif ? Surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\Psi)$.

Exercice 2 – Décomposition d'une loi géométrique et espérance d'un produit :

Soit $\mathbb{X} \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. On effectue la division euclidienne de $\mathbb{X}-1$ par 2 : on écrit $\mathbb{X}-1 = 2\mathbb{Q}+\mathbb{R}$, où $\mathbb{Q}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\{0,1\}$.

1. Déterminer la loi conjointe du couple $(\mathbb{Q},\mathbb{R})$, puis les lois marginales de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.
2. Les variables $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont-elles indépendantes ? En déduire $\mathrm{Cov}(\mathbb{Q},\mathbb{R})$.
3. Exprimer $\mathbf{E}(\mathbb{Q})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{R})$ à partir de leurs lois, puis retrouver $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 2\mathbf{E}(\mathbb{Q}) + \mathbf{E}(\mathbb{R}) + 1$.

Exercice 3 – Endomorphisme dépendant d'un paramètre réel :

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'endomorphisme $f_m : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f_m(x,y,z) = ((1-m)x+y+z,\ x+(1-m)y+z,\ x+y+(1-m)z)$$

1. Déterminer suivant les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le noyau $\ker(f_m)$ et le rang $\mathrm{rg}(f_m)$.
2. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme f_m est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Nom : ..... **Prénom :** .....

Sujet 15 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Définir $\mathrm{P}(f)$ pour un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, ainsi que la notion de polynôme annulateur.

Exercice 1 – Transfert dans le cas infini et sommabilité :

Considérons deux variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall\,(j,k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=j] \cap [\mathbb{Y}=k]) = \frac{j+k}{e\,2^{j+k}\,j!\,k!}$$

Justifier que la variable aléatoire $\mathbb{Z} = 2^{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}$ admet une espérance et la déterminer.

Exercice 2 – Couple de variables indépendantes et variance d'une combinaison linéaire :

Soient $\mathbb{X} \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ et $\mathbb{Y} \sim \mathcal{B}(n,p)$ $(n \in \mathbb{N}^*, p \in]0,1[)$ deux variables aléatoires indépendantes. On pose $\mathbb{U} = 2\mathbb{X} - \mathbb{Y}$ et $\mathbb{V} = \mathbb{X} + 3\mathbb{Y}$.

1. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{U})$, $\mathbf{E}(\mathbb{V})$, $\mathbf{V}(\mathbb{U})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{V})$.
2. Calculer $\mathrm{Cov}(\mathbb{U},\mathbb{V})$ et déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (λ,n,p) pour que $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ soient non corrélées.
3. Dans le cas où $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ sont non corrélées, sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 – Image d'une base, rang et construction d'une application linéaire :

Soient $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$, et $\mathrm{F} = \mathbb{R}^3$. On cherche s'il existe une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant :

$$f(1,1,0) = (1,2,3), \quad f(0,1,1) = (2,1,4) \quad \text{et} \quad f(1,0,-1) = (-1,1,-1)$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1,u_2,u_3)$ où $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$ et $u_3 = (1,0,-1)$ est liée, et en déduire que la condition est compatible.
2. Déterminer alors une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant ces relations telle que $\mathrm{rg}(f) = 2$, et donner son expression analytique $f(x,y,z)$.

Nom : ..... **Prénom :** .....

Sujet 16 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la covariance, définir le coefficient de corrélation linéaire $\rho(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ et donner son encadrement ainsi que son interprétation géométrique (cas $|\rho(\mathbb{X},\mathbb{Y})|=1$).

Exercice 1 – Espérance d'un produit par transfert (cas fini) :

Soit $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j])=\frac{4ij}{n^2(n+1)^2}$$

1. Vérifier que la somme des probabilités conjointes vaut 1.
2. En utilisant le théorème de transfert, calculer l'espérance $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$ de la variable $\mathbb{Z}=\mathbb{X}\mathbb{Y}$.

Exercice 2 – Somme de variables de Bernoulli liées et corrélation maximale :

Soit $\mathbb{X}\sim\mathcal{B}(p)$ avec $p\in]0,1[$. Conditionnellement à $[\mathbb{X}=1]$, $\mathbb{Y}$ suit la loi $\mathcal{B}(\alpha)$, et conditionnellement à $[\mathbb{X}=0]$, $\mathbb{Y}$ suit la loi $\mathcal{B}(\beta)$, où $(\alpha,\beta)\in[0,1]^2$.

1. Déterminer la loi marginale de $\mathbb{Y}$, son espérance $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$ et sa variance $\mathbf{V}(\mathbb{Y})$.
2. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$ et en déduire $\mathrm{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.
3. À quelle condition sur α et β les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles non corrélées ? Sont-elles alors indépendantes ?
4. Déterminer $\rho(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ lorsque $\alpha=1$ et $\beta=0$, puis lorsque $\alpha=0$ et $\beta=1$.

Nom : ..... **Prénom :** .....

Sujet 17 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Définir $\mathrm{P}(f)$ pour un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, ainsi que la notion de polynôme annulateur.

Exercice 1 – Endomorphisme nilpotent et liberté d'une famille :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme nilpotent d'indice 3, c'est-à-dire tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

1. À l'aide de l'identité polynomiale $(1-\mathrm{X})(1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2) = 1-\mathrm{X}^3$, montrer que $\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f$ est un automorphisme de E et exprimer son inverse.
2. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est libre.

Exercice 2 – Couple de variables indépendantes et variance d'une combinaison linéaire :

Soient $\mathbb{X} \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ et $\mathbb{Y} \sim \mathcal{B}(n,p)$ $(n \in \mathbb{N}^*,\, p \in]0,1[)$ deux variables aléatoires indépendantes. On pose $\mathbb{U} = 2\mathbb{X} - \mathbb{Y}$ et $\mathbb{V} = \mathbb{X} + 3\mathbb{Y}$.

1. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{U})$, $\mathbf{E}(\mathbb{V})$, $\mathbf{V}(\mathbb{U})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{V})$.
2. Calculer $\mathrm{Cov}(\mathbb{U},\mathbb{V})$ et déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (λ,n,p) pour que $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ soient non corrélées.
3. Dans le cas où $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ sont non corrélées, sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 – Endomorphisme d'intégrale-dérivation sur $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$:

On considère l'application $\Phi : \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ définie par :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}], \quad \Phi(\mathrm{P}) = (2\mathrm{X}+1)\mathrm{P} - (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}'$$

1. Montrer que Φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ (on veillera à justifier la stabilité de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$).
2. Déterminer $\ker(\Phi)$ et $\mathrm{Im}(\Phi)$ (en précisant une base de chacun de ces sous-espaces).
3. Calculer $\Phi^2(\mathrm{P})$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et en déduire un polynôme annulateur non nul de Φ.

Nom : ..... **Prénom :** .....

Sujet 18 — Espérance et Applications linéaires

Question de cours :

Énoncer la propriété de linéarité de l'espérance pour une combinaison linéaire de n variables aléatoires.

Exercice 1 – Polynôme annulateur et inversibilité d'un endomorphisme :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme vérifiant :

$$f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$$

Montrer que f est un automorphisme de E et exprimer son inverse f^{-1} en fonction de f et Id_E.

Exercice 2 – Covariance et coefficient de corrélation linéaire d'un tirage sans remise :

Une urne contient 3 boules numérotées $1, 2, 3$. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. On note $\mathbb{X}$ le numéro de la première boule tirée et $\mathbb{Y}$ celui de la seconde.

1. Dresser le tableau de la loi conjointe du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et donner les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.
2. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{X})$, $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$, $\mathbf{V}(\mathbb{X})$, $\mathbf{V}(\mathbb{Y})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$.
3. En déduire $\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et le coefficient de corrélation linéaire $\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Interpréter le signe de $\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Exercice 3 – Somme directe de noyaux et théorème du rang :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme tel que :

$$f^2 - 5f + 6\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$$

1. Montrer que $\ker(f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \cap \ker(f - 3\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \{0_\mathrm{E}\}$.
2. À l'aide de l'égalité $x = f(x) - 2x - f(x) + 3x$, montrer que tout vecteur $x \in \mathrm{E}$ s'écrit comme somme d'un vecteur de $\ker(f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E})$ et d'un vecteur de $\ker(f - 3\mathrm{Id}_\mathrm{E})$, puis conclure que :

$$\mathrm{E} = \ker(f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \oplus \ker(f - 3\mathrm{Id}_\mathrm{E})$$