Khôlles 5

Espérance, Variance & Applications linéaires en dimension finie

1. Questions de Cours (Au choix de l'interrogateur)

Espérance, Variance & Covariance d'un couple

1. **Théorème de transfert et calcul d'espérances**
   a. Énoncer le théorème de transfert pour une variable aléatoire $\mathbb{Z} = g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ dans le cas fini, puis préciser la condition d'existence (sommabilité) dans le cas infini.
   b. Énoncer la propriété de linéarité de l'espérance pour une combinaison linéaire de n variables aléatoires.
   c. Énoncer la condition suffisante d'existence de $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$ (cas général) puis la formule dans le cas où $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes.
2. **Covariance d'un couple**
   a. Donner la définition de $\mathrm{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, une condition suffisante d'existence et énoncer la formule de Koenig-Huygens.
   b. Énoncer les propriétés de la covariance : symétrie, bilinéarité, covariance avec une constante et lien avec l'indépendance (en précisant bien le sens de l'implication).
3. **Variance d'une somme et corrélation linéaire**
   a. Énoncer et démontrer la formule de $\mathbf{V}(\mathbb{X} + \mathbb{Y})$ dans le cas général, puis dans le cas de n variables mutuellement indépendantes. En déduire la variance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
   b. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la covariance, définir le coefficient de corrélation linéaire $\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et donner son encadrement ainsi que son interprétation géométrique (cas $|\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y})| = 1$).

Applications linéaires en dimension finie

4. **Généralités, Noyau et Image**
   a. Définir une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Rappeler la caractérisation pratique avec $\lambda x + \mu y$.
   b. Définir le noyau $\ker(f)$ et l'image $\mathrm{Im}(f)$ d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, et préciser leur structure algébrique.
5. **Injectivité, Surjectivité et Image d'une base**
   a. Énoncer la caractérisation de l'injectivité via le noyau et celle de la surjectivité via l'image.
   b. Énoncer le théorème de transport d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ par une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ (image, injectivité, surjectivité, bijectivité).
6. **Théorème du rang et Polynômes d'endomorphismes**
   a. Définir le rang d'une application linéaire $\mathrm{rg}(f)$, énoncer le théorème du rang ainsi que son corollaire en dimension égale ($\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$).

b. Définir $\mathrm{P}(f)$ pour un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, ainsi que la notion de polynôme annulateur.

2. Exercices Types & Savoir-faire attendus

Exercice V.1 – (Espérance d'un produit par transfert (cas fini)) [Correction p. 4]

Soit $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=i] \cap [\mathbb{Y}=j]) = \frac{4ij}{n^2(n+1)^2}$$

1. Vérifier que la somme des probabilités conjointes vaut 1.
2. En utilisant le théorème de transfert, calculer l'espérance $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$ de la variable $\mathbb{Z} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$.

Exercice V.2 – (Transfert dans le cas infini et sommabilité) [Correction p. 4]

Considérons deux variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall\,(j,k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X}=j] \cap [\mathbb{Y}=k]) = \frac{j+k}{e\,2^{j+k}\,j!\,k!}$$

Justifier que la variable aléatoire $\mathbb{Z} = 2^{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}$ admet une espérance et la déterminer.

Exercice V.3 – (Covariance, corrélation et non-indépendance) [Correction p. 4]

Soient $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3$ trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$. On pose $\mathbb{Y} = \mathbb{X}_1\mathbb{X}_2$ et $\mathbb{Z} = \mathbb{X}_2\mathbb{X}_3$.

1. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$, $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{Y}\mathbb{Z})$.
2. En déduire $\mathrm{Cov}(\mathbb{Y},\mathbb{Z})$. Les variables $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{Z}$ sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(\mathbb{Y},\mathbb{Z})$.

Exercice V.4 – (Non corrélation n'implique pas indépendance) [Correction p. 5]

On choisit au hasard et de façon équiprobable un point dans le plan parmi $(0,1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ et $(0,-1)$. On note $\mathbb{X}$ l'abscisse du point et $\mathbb{Y}$ son ordonnée.

1. Déterminer les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$, ainsi que leurs espérances.
2. Calculer $\mathrm{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles corrélées ?
3. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice V.5 – (Variance d'une somme et symétrie min / max) [Correction p. 5]

On lance deux dés équilibrés à 3 faces et on note $\mathbb{Z}_1$ et $\mathbb{Z}_2$ les résultats obtenus. On pose $\mathbb{X} = \min(\mathbb{Z}_1,\mathbb{Z}_2)$ et $\mathbb{Y} = \max(\mathbb{Z}_1,\mathbb{Z}_2)$.

1. Exprimer $\mathbb{X}+\mathbb{Y}$ en fonction de $\mathbb{Z}_1$ et $\mathbb{Z}_2$.
2. En déduire sans calcul de loi conjointe la variance $\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y})$.
3. Sachant que $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \dfrac{38}{81}$, déterminer $\mathrm{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

Exercice V.6 – (Endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, noyau et image) [Correction p. 5]

On considère l'application $\Psi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\Psi(P) = (X^2-1)P'' + 5XP'$.

1. Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base de $\ker(\Psi)$. Ψ est-il injectif ? Surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\Psi)$.

Exercice V.7 – (Noyau, théorème du rang et surjectivité) [Correction p. 6]

Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x,y,z,t) = (x - 2y + z + 2t,\ 2y - t)$$

1. Déterminer une base de $\ker(f)$ et en déduire sa dimension.
2. À l'aide du théorème du rang, déterminer $\mathrm{rg}(f)$. L'application f est-elle surjective ?

Exercice V.8 – (Caractérisation des isomorphismes en dimension égale) [Correction p. 6]

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par :

$$f(x,y,z) = (x + y + 2z,\ x + z,\ -x - z)$$

1. Déterminer l'image par f des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ et le rang de f.
3. L'endomorphisme f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$? Déterminer $\dim \ker(f)$.

Exercice V.9 – (Polynôme annulateur et inversibilité d'un endomorphisme) [Correction p. 6]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme vérifiant :

$$f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Montrer que f est un automorphisme de E et exprimer son inverse f^{-1} en fonction de f et Id_E.

Exercice V.10 – (Endomorphisme nilpotent et liberté d'une famille) [Correction p. 7]

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice 3, c'est-à-dire tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. À l'aide de l'identité polynomiale $(1-X)(1+X+X^2) = 1 - X^3$, montrer que $\mathrm{Id}_E - f$ est un automorphisme de E et exprimer son inverse.
2. Soit $x_0 \in E$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_E$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est libre.

Corrigés

Correction de l'exercice V.1 : [Énoncé]

1. On calcule la somme double des probabilités :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{4ij}{n^2(n+1)^2}=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}j\right)$$

Comme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j])=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\times\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=1$$

2. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont à support fini, donc $\mathbb{Z}=\mathbb{X}\mathbb{Y}$ admet une espérance. Par le théorème de transfert :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(ij)\cdot\mathbf{P}([\mathbb{X}=i]\cap[\mathbb{Y}=j])=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}j^2\right)$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, d'où :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Z})=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^2=\frac{(2n+1)^2}{9}$$

Correction de l'exercice V.2 : [Énoncé]

D'après le théorème de transfert, $2^{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}$ admet une espérance si et seulement si la série double $\displaystyle\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}2^{j+k}\mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k])$ est absolument convergente, c'est-à-dire convergente car elle est à termes positifs.

Soient $j\in\mathbb{N}$ et $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}2^{j+k}\mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k])=\frac{1}{e\,j!}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{j+k}{k!}=\frac{1}{e\,j!}\left(j\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{1}{k!}+\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{(k-1)!}\right)$$

Par reconnaissance de la série exponentielle $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}=e$, la série en k converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}2^{j+k}\mathbf{P}([\mathbb{X}=j]\cap[\mathbb{Y}=k])=\frac{1}{e\,j!}(je+e)=\frac{j+1}{j!}$$

Ensuite, la série $\displaystyle\sum_{j\geqslant0}\frac{j+1}{j!}=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j}{j!}+\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}$ est convergente de somme $e+e=2e$.

Ainsi, $2^{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}$ admet une espérance et $\mathbf{E}(2^{\mathbb{X}+\mathbb{Y}})=2e$.

Correction de l'exercice V.3 : [Énoncé]

1. Par indépendance de $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$, $\mathbf{E}(\mathbb{Y})=\mathbf{E}(\mathbb{X}_1)\mathbf{E}(\mathbb{X}_2)=p^2$. De même, $\mathbf{E}(\mathbb{Z})=p^2$.
On a $\mathbb{Y}\mathbb{Z}=\mathbb{X}_1\mathbb{X}_2^2\mathbb{X}_3$. Or $\mathbb{X}_2(\Omega)=\{0,1\}$, donc $\mathbb{X}_2^2=\mathbb{X}_2$. Par indépendance mutuelle de $\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2,\mathbb{X}_3$:

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}\mathbb{Z})=\mathbf{E}(\mathbb{X}_1\mathbb{X}_2\mathbb{X}_3)=\mathbf{E}(\mathbb{X}_1)\mathbf{E}(\mathbb{X}_2)\mathbf{E}(\mathbb{X}_3)=p^3$$

2. Par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{Y},\mathbb{Z}) = \mathbf{E}(\mathbb{Y}\mathbb{Z}) - \mathbf{E}(\mathbb{Y})\mathbf{E}(\mathbb{Z}) = p^3 - p^4 = p^3(1-p)$$

Comme $p \in]0,1[$, on a $\mathrm{Cov}(\mathbb{Y},\mathbb{Z}) \neq 0$. Par contraposée de la propriété sur les variables indépendantes, $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas indépendantes.

3. On remarque que $\mathbb{Y} \sim \mathcal{B}(p^2)$ et $\mathbb{Z} \sim \mathcal{B}(p^2)$ (car produit de deux Bernoulli indépendantes), donc $\mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{Z}) = p^2(1-p^2)$. Ainsi :

$$\rho(\mathbb{Y},\mathbb{Z}) = \frac{\mathrm{Cov}(\mathbb{Y},\mathbb{Z})}{\sigma(\mathbb{Y})\sigma(\mathbb{Z})} = \frac{p^3(1-p)}{p^2(1-p^2)} = \frac{p}{1+p}$$

Correction de l'exercice V.4 : [Énoncé]

1. Par équiprobabilité (chaque point a pour probabilité $1/4$) :

$$\mathbf{P}(\mathbb{X}=-1) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(\mathbb{X}=0) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(\mathbb{X}=1) = \frac{1}{4}$$

Par symétrie, $\mathbb{Y}$ suit la même loi. On en déduit $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 0$ et $\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = 0$.

2. Pour chacun des quatre points possibles, le produit de l'abscisse par l'ordonnée est nul, donc $\mathbb{X}\mathbb{Y} = 0$ presque sûrement et $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = 0$.
D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) - \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = 0 - 0 = 0$$

Ainsi, $\rho(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = 0$: $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont non corrélées.

3. On a $\mathbf{P}([\mathbb{X}=0] \cap [\mathbb{Y}=0]) = 0$ (l'origine ne fait pas partie des points), alors que $\mathbf{P}(\mathbb{X}=0)\mathbf{P}(\mathbb{Y}=0) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq 0$.
Donc $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes.

Correction de l'exercice V.5 : [Énoncé]

1. Pour tout couple de réels, la somme du minimum et du maximum est égale à la somme des deux nombres : $\mathbb{X}+\mathbb{Y} = \mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_2$.

2. $\mathbb{Z}_1$ et $\mathbb{Z}_2$ sont indépendantes et suivent la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1,3 \rrbracket)$, donc $\mathbf{V}(\mathbb{Z}_1) = \mathbf{V}(\mathbb{Z}_2) = \frac{3^2-1}{12} = \frac{2}{3}$. Par indépendance :

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{Z}_1+\mathbb{Z}_2) = \mathbf{V}(\mathbb{Z}_1) + \mathbf{V}(\mathbb{Z}_2) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

3. On utilise la relation $\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y}) + 2\mathrm{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$:

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) - \mathbf{V}(\mathbb{X}) - \mathbf{V}(\mathbb{Y})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} - \frac{38}{81} - \frac{38}{81}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{108-76}{81}\right) = \frac{16}{81}$$

Correction de l'exercice V.6 : [Énoncé]

1. **Linéarité :** Soient $\mathrm{P},\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de la dérivation :

$$\Psi(\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q}) = (\mathrm{X}^2-1)(\lambda\mathrm{P}''+\mu\mathrm{Q}'') + 5\mathrm{X}(\lambda\mathrm{P}'+\mu\mathrm{Q}') = \lambda\Psi(\mathrm{P}) + \mu\Psi(\mathrm{Q})$$

Stabilité : Soit $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^2+b\mathrm{X}+c \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. On a $\mathrm{P}' = 2a\mathrm{X}+b$ et $\mathrm{P}'' = 2a$, d'où :

$$\Psi(\mathrm{P}) = 2a(\mathrm{X}^2-1) + 5\mathrm{X}(2a\mathrm{X}+b) = 12a\mathrm{X}^2 + 5b\mathrm{X} - 2a \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$$

Ainsi, $\Psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}])$.

2. Soit $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$:

$$\mathrm{P} \in \ker(\Psi) \iff 12a\mathrm{X}^2 + 5b\mathrm{X} - 2a = 0 \iff \begin{cases} 12a = 0 \\ 5b = 0 \\ -2a = 0 \end{cases} \iff a = b = 0$$

Donc $\ker(\Psi) = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}] = \mathrm{Vect}(1)$, qui est de dimension 1 (base : (1)). Comme $\ker(\Psi) \neq \{0\}$, Ψ n'est pas injectif. Étant un endomorphisme en dimension finie, il n'est pas non plus surjectif.

3. D'après le théorème du rang : $\mathrm{rg}(\Psi) = \dim \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] - \dim \ker(\Psi) = 3 - 1 = 2$.
En calculant les images de la base canonique $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$:

$$\mathrm{Im}(\Psi) = \mathrm{Vect}(\Psi(1), \Psi(\mathrm{X}), \Psi(\mathrm{X}^2)) = \mathrm{Vect}(0, 5\mathrm{X}, 12\mathrm{X}^2 - 2) = \mathrm{Vect}(\mathrm{X}, 6\mathrm{X}^2 - 1)$$

Les polynômes X et $6\mathrm{X}^2 - 1$ n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre de cardinal $2 = \mathrm{rg}(\Psi)$, donc une base de $\mathrm{Im}(\Psi)$.

Correction de l'exercice V.7 : [Énoncé]

1. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On résout le système homogène $f(u) = (0, 0)$:

$$u \in \ker(f) \iff \begin{cases} x - 2y + z + 2t = 0 \\ 2y - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z - t \\ y = \dfrac{1}{2}t \end{cases}$$

Ainsi, $u = z(-1, 0, 1, 0) + t(-1, \frac{1}{2}, 0, 1)$. On en déduit :

$$\ker(f) = \mathrm{Vect}\big((-1, 0, 1, 0),\ (-2, 1, 0, 2)\big)$$

Les deux vecteurs générateurs n'étant pas colinéaires, ils sont libres et forment une base de $\ker(f)$. D'où $\dim \ker(f) = 2$.

2. D'après le théorème du rang appliqué à $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$:

$$\mathrm{rg}(f) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker(f) = 4 - 2 = 2$$

Comme $\mathrm{rg}(f) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, on a $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, donc f est surjective.

Correction de l'exercice V.8 : [Énoncé]

1. On a $f(e_1) = (1, 1, -1)$, $f(e_2) = (1, 0, 0)$ et $f(e_3) = (2, 1, -1)$.

2. On sait que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$. Or on remarque que $f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$, donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((1, 1, -1),\ (1, 0, 0)\big)$$

Les deux vecteurs $(1, 1, -1)$ et $(1, 0, 0)$ n'étant pas colinéaires, ils forment une base de $\mathrm{Im}(f)$, et donc $\mathrm{rg}(f) = 2$.

3. Comme $\mathrm{rg}(f) = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3$, f n'est pas surjectif, donc ce n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Par le théorème du rang : $\dim \ker(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \mathrm{rg}(f) = 3 - 2 = 1$.

Correction de l'exercice V.9 : [Énoncé]

L'égalité $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ se réécrit :

$$3f - f^2 = 2\mathrm{Id}_\mathrm{E} \iff f \circ \left(\frac{1}{2}(3\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)\right) = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$$

De même, comme f et Id_E commutent, on a $\left(\frac{1}{2}(3\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)\right) \circ f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

En dimension finie, la première égalité suffit même à conclure (par le corollaire du théorème du rang) que f est bijective. Ainsi, f est un automorphisme de E et son inverse est :

$$f^{-1} = \frac{1}{2}(3\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)$$

Correction de l'exercice V.10 : [Énoncé]

1. En évaluant l'identité polynomiale en l'endomorphisme f, on obtient :

$$(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f) \circ (\mathrm{Id}_\mathrm{E} + f + f^2) = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - f^3 = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})} = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$$

On vérifie de même que $(\mathrm{Id}_\mathrm{E} + f + f^2) \circ (\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f) = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.
Ainsi, $\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f$ est inversible (c'est un automorphisme de E) et :

$$(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - f)^{-1} = \mathrm{Id}_\mathrm{E} + f + f^2$$

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$ax_0 + bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0_\mathrm{E} \quad (*)$$

En composant $(*)$ à gauche par f^2 et en utilisant $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ et $f^4 = f \circ f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$, il vient :

$$af^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$$

Comme $f^2(x_0) \neq 0_\mathrm{E}$, on en déduit $a = 0$.
L'égalité $(*)$ devient $bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$. En composant par f, on obtient :

$$bf^2(x_0) = 0_\mathrm{E} \implies b = 0$$

Il reste alors $cf^2(x_0) = 0_\mathrm{E}$, d'où $c = 0$. La famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est donc libre.