

Programme

Espaces vectoriels

CE QUE DIT LE PROGRAMME EN ECG2 :

L'objet de ce chapitre est une étude élémentaire des applications linéaires et des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, approfondissant les acquis de première année et les prolongeant par l'étude de la réduction des matrices.

L'objectif est d'avoir la possibilité d'utiliser des espaces vectoriels concrets, naturellement isomorphes à $\mathbb{R}^n$ et de pouvoir y manipuler les changements de bases, sans introduire les espaces vectoriels abstraits.

Cette partie du programme sera ensuite utilisée en analyse dans l'étude des points critiques des fonctions de deux variables et en probabilités (chaînes de Markov...).

1 – Espaces vectoriels réels de dimension finie

Cette partie doit être traitée dans sa plus simple expression. Les notions étudiées en première année sont étendues dans un cadre plus abstrait sans démonstration en s'appuyant sur les exemples de référence listés ci-dessous.

Espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Un espace vectoriel de dimension n est un ensemble E muni d'une opération interne $+$, d'une opération externe $\cdot$ et d'une bijection de E sur $\mathbb{R}^n$ qui préserve les combinaisons linéaires.

Familles libres, familles génératrices, bases.

Base canonique de $\mathbb{R}^n$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et de $\mathbb{R}_n[x]$.

Sous-espace vectoriel.

Dimension d'un sous-espace vectoriel.

Rang d'une famille de vecteurs.

On se limite par définition au cas de la dimension finie.

On illustre ces définitions en liaison avec le programme de première année complété par les espaces vectoriels de référence suivants : $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[x]$.

CE QUE DISAIT LE PROGRAMME EN ECG1 :**Calcul matriciel et résolution de systèmes linéaires**

L'objectif de cette partie du programme est :

- d'une part d'initier au calcul matriciel afin de permettre la résolution de problèmes issus, notamment, des probabilités ;
- d'autre part de parvenir à une bonne maîtrise de la résolution des systèmes linéaires et de les interpréter sous forme matricielle.

L'étude de ce chapitre sera menée en lien avec l'informatique.

On introduit la problématique des systèmes linéaires, puis on présente l'utilité de l'écriture matricielle en utilisant des exemples simples de tableaux entrée-sortie ou des tableaux de Leontieff.

2 – Systèmes linéaires

Définition d'un système linéaire.

Système homogène, système de Cramer.

Résolution par la méthode du pivot de Gauss.

Ensemble des solutions d'un système linéaire.

La méthode sera présentée à l'aide d'exemples. On donnera des exemples où il existe une solution unique, où il n'existe pas de solution et où il existe plusieurs solutions. On insiste sur les propriétés de stabilité de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène en vue de l'introduction de la notion de sous-espace vectoriel au second semestre.

L'espace $\mathbb{R}^n$, sous-espaces vectoriels et applications linéaires

Ce chapitre ne doit pas donner lieu à un exposé théorique ; on donne ici une approche concrète à des notions. Pour simplifier ce premier contact, l'étude se limitera à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, en privilégiant les exemples pour $n \in \{2, 3, 4\}$.

3 – Espace $\mathbb{R}^n$

Définition de $\mathbb{R}^n$.

Loi interne $+$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Loi externe $\cdot$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Propriétés d'associativité et de distributivité.

Combinaisons linéaires.

Base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On privilégiera le travail sur les espaces $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$.

On introduira un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ comme matrice des coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique.

Les espaces vectoriels ci-dessus sont naturellement équipés de leur base canonique.

4 – Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un sous-espace vectoriel.

Sous-espace vectoriel engendré.

Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.

Base d'un sous-espace vectoriel.

Si un sous-espace vectoriel admet une base constituée de p vecteurs, toute autre base a p vecteurs.

Dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Famille libre d'un sous-espace vectoriel de dimension n .

Une famille libre (respectivement génératrice) à n vecteurs d'un sous-espace vectoriel de dimension n est une base.

Rang d'une famille de vecteurs.

Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs.

On remarque qu'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est stable par combinaisons linéaires.

On classifera les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

On reviendra sur l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à 2, 3, 4 inconnues.

Notation $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

$(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une base du sous-espace vectoriel F de E si et seulement si tout vecteur de F se décompose de manière unique sous forme d'une combinaison linéaire de $(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

Résultats admis.

Cardinal d'une famille libre (respectivement génératrice) d'un sous-espace vectoriel de dimension n .

Théorème admis.