

Exercice .1 [CORRECTION P. 4]

On considère la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'exécution de `suite_h(n)` renvoie la valeur de h_n .
2. Étude de la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - a. Déterminer le sens de variation de la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - b. Démontrer que pour tout $x \in]-1; +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
 - c. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$.

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_n \geq \ln(n+1)$.

Déterminer alors la limite de la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = h_n - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = h_n - \ln(n+1).$$

- a. À l'aide du résultat de la question 2.b., établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

- b. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent toutes deux vers la même limite, notée γ .
 - c. Établir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h_n}{\ln(n)} = 1$.
 - d. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \gamma \leq u_n$.
 - e. Écrire une fonction **Python** prenant en argument d'entrée un réel strictement positif p et renvoyant en sortie un encadrement de γ d'amplitude inférieure ou égale à p (cette fonction pourra utiliser la fonction de la question 1.).
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
 - a. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = h_{2n} - h_n$.
 - b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = u_{2n} - u_n + \ln(2)$.
 - c. Conclure que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$.

Exercice .2 – (EDHEC 2022 E) [CORRECTION P. 7]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)} dx$.

1. Calculer u_1 .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On définit la fonction f_n sur $[0; 1]$ par : $\forall x \in [0; 1], f_n(x) = \frac{x}{x+n}$.

Dresser le tableau de variations de f_n sur $[0; 1]$.

3. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$.

- b. En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$. On note $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.
- Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leq \gamma$.
 - Déterminer les deux réels a, b tels que pour tout $x \in [0; 1]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{x+k}$.
 - Établir alors que $\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$.
 - Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.
- Justifier que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.
 - Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.
- En déduire que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
6. Donner finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de γ à l'aide de T_n et S_n .
7. On considère la fonction Python définie ci-dessous :

```

1 import numpy as np
2 def gamma(p):
3     n=1
4     while np.\log(1+1/n)>p :
5         n=n+1
6     L=[1 / k for k in range (1, n+1)]
7     S=sum(L)-np.log(n+1)
8     T=sum(L)-np.log(n)
9     return S, T
    
```

L'exécution de la commande `gamma (10 * *(-3))` renvoie :
`>>> (0.5767160812351229, 0.5777155815682065)`

Interpréter ce résultat en justifiant soigneusement la réponse.

Exercice .3 – (Algèbre linéaire) [CORRECTION P. 10]

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer $(A - I_3)^2 (A + I_3)$.
- Résoudre les équations $AX = X$ et $AX = -X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- Notons $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - Résoudre l'équation $AX = X + V$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On notera W la solution dont la première composante est égale à -1 .
 - Pour les khûbes. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

c. Notons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1} .

d. Calculer $P^{-1}AP$. On notera T la matrice obtenue.

e. Posons $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer, pour tout $k \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$, la matrice N^k . Calculer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice T^n .

f. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n .

4. Déduire des questions précédentes l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0; \quad u_1 = 0; \quad u_2 = 1; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = -u_n + u_{n+1} + u_{n+2}.$$

Exercice .4 – (Probabilités - EML 2009 E) [CORRECTION P. 13]

Une urne contient des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $q = 1 - p$ avec $p \in]0; 1[$.

1. Dans cette question, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.

On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

- a. Reconnaître la loi de T . Donner son espérance et sa variance.
- b. Exprimer U en fonction de T . En déduire que U possède une espérance et une variance et les donner.

2. Dans cette question, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule de chaque couleur. On note :

- X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués,
- Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues,
- Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues,
- pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, B_i l'évènement "obtenir une boule blanche au i -ème tirage" et $N_i = \overline{B_i}$.

a. Écrire une fonction **Python** prenant en argument un réel $p \in]0; 1[$ et renvoyant une réalisation de la variable aléatoire X .

b. Loi de X .

- i. Sans justifier, donner $X(\Omega)$.
- ii. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$, $\mathbf{P}([X = k]) = qp^{k-1} + pq^{k-1}$.
- iii. Vérifier par le calcul que $\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k]) = 1$.
- iv. Montrer que X admet une espérance et que $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

c. Loi de Y .

- i. Pour tout $k \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$, déterminer $\mathbf{P}([X = k] \cap [Y = 1])$. On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geq 3$.
- ii. En déduire que $\mathbf{P}([Y = 1]) = q(1 + p)$.
- iii. Déterminer la loi de Y .

d. Donner la loi de Z .

CORRIGÉS

Correction de l'exercice .1 : [ÉNONCÉ]

Remarque

Dans le premier programme, il est aussi possible d'initialiser avec $S=1$ et, dans ce cas, la ligne suivante est `for k in range (2, n+1):`

1. Deux possibilités :

```

1 def suite_h(n):
2     S=0
3     for k in range(1,n+1):
4         S =S+1/k
5     return S
    
```

```

1 def suite_h_bis(n):
2     L =[1/k for k in
3         ↪ range(1,n+1)]:
4     return sum(L)
    
```

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$h_{n+1} - h_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0.$$

Par conséquent, $h_{n+1} > h_n$ et la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

b. On sait que la fonction \ln est concave donc sa courbe représentative est au-dessous de ses tangentes, en particulier celle en $(1; 0)$ d'équation réduite $y = x - 1$.

D'où, $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$.

Autre méthode : Posons $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$, définie sur $] -1; +\infty[$. La fonction f est une somme de deux fonctions dérivables sur $] -1; +\infty[$, elle l'est donc également et, pour tout $x \in] -1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$$

D'où le tableau de variation :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	
f		↗ ↘	

Par conséquent, $\forall x \in] -1; +\infty[, f(x) \leq 0 \iff \ln(1+x) \leq x$.

c. — Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $\frac{1}{k} \geq 0$, d'après la question précédente,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}.$$

— Il suffit de sommer ces inégalités dans le même sens pour k variant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = h_n.$$

Or, en reconnaissant une série télescopique,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) \\
 &= \ln(n+1) - \ln(1) \\
 &= \ln(n+1).
 \end{aligned}$$

Idée

En dehors du pôle, $\frac{-x}{1+x}$ est du signe de la parabole $-x(x+1)$.

Remarque

Les limites sont inutiles ici.

Attention

On pense à mentionner l'hypothèse donnant le droit d'utiliser la question précédente!

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_n \geq \ln(n+1)$.

- Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$, d'après le théorème de comparaison, la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = +\infty.$$

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Inégalité de gauche :

Comme $\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$ avec $\frac{1}{n+1} > -1$, le résultat de la question 2.b. nous donne :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} \iff \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}.$$

- Inégalité de droite :

On va réutiliser notre idée mais en modifiant tout d'abord notre énoncé à l'aide des propriétés du logarithme :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \iff -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n+1} \iff \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$$

À partir de là, l'idée est la même avec $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ et $-\frac{1}{n+1} > -1$.

Le résultat du 2.b donne encore $\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$ puis $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

En regroupant les deux inégalités, on a montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

b. Pour cela, démontrons qu'elles sont adjacentes.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= h_{n+1} - \ln(n+1) - (h_n - \ln(n)) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq 0. \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= h_{n+1} - \ln(n+2) - (h_n - \ln(n+1)) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1)) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \geq 0. \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Méthode

Deux suites qui convergent vers la même limite. Il y a de grande chance que ce soit le théorème des suites adjacentes.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= h_n - \ln(n) - h_n + \ln(n+1) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Elles convergent vers une même limite, notée γ .

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n = u_n + \ln(n)$.

D'où, pour tout $n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$ i.e. $\ln(n) \neq 0$,

$$\frac{h_n}{\ln(n)} = \frac{u_n}{\ln(n)} + 1.$$

Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite finie, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 0$.

D'après les théorèmes sur les limites de sommes, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1.$$

- d. — La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et converge vers γ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \gamma$.
 — De même, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers ℓ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \gamma$.

En conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq \gamma \leq u_n.$$

e. Là encore, deux possibilités.

La première utilise la fonction de la question 1., la seconde non.

```

1 def gamma(p):
2     n=1
3     u=1
4     v=1-np.log(2)
5     while abs(u-v)>p :
6         n=n+1
7         h=suite_h(n)
8         u=h-np.log(n)
9         v=h-np.log(n+1)
10    return v,u
    
```

```

1 import numpy as np
2 def gamma_bis(p) :
3     k=1
4     S=1
5     u=1
6     v=1-np.log(2)
7     while abs(u-v)>p :
8         k=k+1
9         S=S+1/k
10        u=S-np.log(k)
11        v=S-np.log(k+1)
12    return v,u
    
```

4. a. — Initialisation. Pour $n = 1$: On a :

$$S_1 = \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

et

$$h_2 - h_1 = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k} - 1 = \frac{1}{2}.$$

D'où, $S_1 = h_2 - h_1$ et l'initialisation est vérifiée.

Remarque
 γ est appelée constante d'Euler-Mascheroni.

À retenir
 On notera $h_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.



- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $S_n = h_{2n} - h_n$ et montrons que $S_{n+1} = h_{2n+2} - h_{n+1}$.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + h_{2n} - h_n \quad \text{par hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

On fait apparaître $h_{n+1} = h_n + \frac{1}{n+1}$,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + h_{2n} - \left(h_{n+1} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{2-1}{2n+2} + h_{2n} - h_{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+2} + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{h_{2n+1}} + h_{2n} - h_{n+1} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2n+2} + h_{2n+1}}_{h_{2n+2}} - h_{n+1} \\ &= h_{2n+2} - h_{n+1} \end{aligned}$$

L'hérédité est ainsi établie.

- Conclusion : Initialisée à partir de $n = 1$ et héréditaire, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = h_{2n} - h_n.$$

Attention

Une récurrence est toujours en trois temps sinon elle est incomplète :

- Initialisation,
- Hérédité,
- Conclusion.

- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} S_n &= h_{2n} - h_n \\ &= u_{2n} + \ln(2n) - (u_n + \ln(n)) \quad \text{avec } u_n = h_n - \ln(n) \\ &= u_{2n} - u_n + \ln(2n) - \ln(n) \\ &= u_{2n} - u_n + \ln(2) \end{aligned}$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = u_{2n} - u_n + \ln(2)$.

- c. D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = u_{2n} - u_n + \ln(2)$.

Or, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi que sa suite extraite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent toutes deux vers γ .

D'après les théorèmes sur les limites de sommes, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{2n} - u_n) + \ln(2) = \gamma - \gamma + \ln(2) = \ln(2).$$

À retenir

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$

Idée

On effectue une décomposition en éléments simples.

Correction de l'exercice .2 : [ÉNONCÉ]

$$\begin{aligned} 1. \quad u_1 &= \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \left[x - \ln(|x+1|) \right]_0^1 \\ &= 1 - \ln(2). \end{aligned}$$

- 2. La fonction f_n est le quotient de deux fonctions dérivables sur $[0; 1]$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0; 1]$ (car $n > 0$). Par conséquent, f_n est dérivable sur $[0; 1]$ et, pour tout



$x \in [0; 1]$:

$$f'_n(x) = \frac{n}{(x+n)^2} > 0.$$

On en déduit le tableau de variation sur $[0; 1]$:

x	0	1
$f'(x)$	+	
f	0	$\frac{1}{n+1}$

Remarque
Les limites sont inutiles ici.

Idée
On va utiliser la croissance de l'intégrale. Globalement, l'encadrement vient de l'intégrande qui est tout ce qu'on a.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall x \in [0; 1], 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n+1}$$

$$0 \leq \frac{x}{n(x+n)} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans le bon sens,

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 \frac{1}{n(n+1)} dx$$

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{après calcul de l'intégrale}$$

Enfin, par décroissance de la fonction inverse, $n(n+1) \geq n^2 \implies \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$:

$$\text{D'où, } 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

b. On sait que :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$,
- la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car d'exposant 2,
- et SURTOUT que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est à termes positifs.

D'après le critère de comparaison sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente.

4. a. D'après la question précédente, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente de somme égale à γ ; autrement dit, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers γ .

Reste à montrer qu'elle est croissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^n u_k = u_{n+1} \geq 0.$$

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente vers γ en croissant est donc majorée par sa limite.

Autrement dit,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leq \gamma.$$

b. Soit on remarque que $\forall x \in [0; 1], \forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{x}{k(x+k)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}$.

Idée
C'est simplement une décomposition en éléments simples.

Soit, on suit la méthode du cours *i.e.* on sait qu'il existe deux réels a et b tel que :

$$\forall x \in [0; 1], \forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{x+k}.$$

Puis on trouve a et b :

$$a = k \times \frac{x}{k(x+k)} \Big|_{k=0} = \frac{x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad b = (x+k) \times \frac{x}{k(x+k)} \Big|_{k=-x} = \frac{x}{-x} = -1.$$

Des deux manières, on a montré que :

$$\forall x \in [0; 1], \forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{x}{k(x+k)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}.$$

c. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente et par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} u_k &= \int_0^1 \frac{x}{k(x+k)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{k} dx - \int_0^1 \frac{1}{x+k} dx \\ &= \frac{1}{k} - \left[\ln(|x+k|) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k). \end{aligned}$$

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il suffit de sommer l'égalité précédente :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \ln(k+1) + \sum_{k=1}^n \ln(k) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \ln(1) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1). \end{aligned}$$

 **Méthode**
On peut aussi reconnaître une série télescopique.

5. a. Il suffit de se ramener à S_n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \ln(n+1) - \ln(n)}_{S_n} \\ &= S_n + \left(\frac{n+1}{n} \right) \\ &= S_n + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Or,

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \gamma$,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ et \ln est continue en 1, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 0$.

Conclusion, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers γ .

À retenir

C'est un grand classique !

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Par décroissance de la fonction inverse sur $[n; n + 1] \subset \mathbb{R}_*^+$, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [n; n + 1], \quad \frac{1}{n + 1} &\leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} \\ \int_n^{n+1} \frac{1}{n + 1} dx &\leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx \quad \text{par croissance de l'intégrale} \\ \frac{n + 1 - 1}{n + 1} &\leq \left[\ln(|x|) \right]_n^{n+1} \leq \frac{n + 1 - 1}{n} \\ \frac{1}{n + 1} &\leq \ln(n + 1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

La décroissance de $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en découle :

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n + 1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n + 1} - \ln(n + 1) + \ln(n) \quad \text{par télescopage} \\ &\geq 0 \text{ d'après le résultat précédent.} \end{aligned}$$

La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

6. Puisque $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers γ , elle est minorée par elle. Avec le résultat de la question 4.a., on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leq \gamma \leq T_n.$$

7. Le résultat de la question 4.d. et la définition de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ nous permettent d'affirmer que la fonction renvoie, pour un certain n , les valeurs S_n et T_n .

Par conséquent, d'après le résultat de la question 6., la fonction renvoie un encadrement de γ .

Ensuite, on remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} T_n - S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n + 1) \\ &= \ln\left(\frac{n + 1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

La fonction renvoie donc les valeurs de S_n et T_n dès que $T_n - S_n$ devient inférieur ou égal à p .

Par conséquent, la fonction renvoie un encadrement de γ d'amplitude inférieure ou égale à p .

Conclusion : $(0.5767160812351229, 0.5777155815682065)$ est un encadrement de γ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-3} .

Correction de l'exercice .3 : [ÉNONCÉ]

1. Après calculs, $(A - I_3)^2 (A + I_3) = 0_3$.

2. — Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} AX = X &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = y \\ -x + y + z = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = y \\ -x + y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $AX = X$ est $\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$.

— De la même manière, les solutions de l'équation $AX = -X$ est $\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$.

3. a. On procède de la même façon... Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} AX = X + V &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ z = y + 1 \\ -x + y + z = z + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 1 \\ -y + z = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ y = y \\ z = y + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $AX = X + V$ est $\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$.

On pose $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b. Montrons que la famille (U, V, W) est libre dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons $aU + bV + cW = 0_{3,1}$. On a :

$$aU + bV + cW = 0_{3,1} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c = 0 \\ -a + b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2b - c = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

D'où $a = b = c = 0$ et la famille (U, V, W) est libre. De cardinal 3 égal à $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, elle en forme une base.

Idée
On choisit une inconnue secondaire comme paramètre.

Idée
On choisit y comme paramètre.

Rappel
La famille (U, V, W) est libre lorsque $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$,
 $aU + bV + cW = 0$
 \Downarrow
 $a = b = c = 0$.

Attention

On n'effectue des opération sur les lignes ou (exclusif) sur les colonnes. Pas les deux !

c. La méthode est standard et repose sur l'algorithme de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}]{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

À partir de cette étape, on sait que P est inversible car on a réussi à la rendre triangulaire avec des coefficients diagonaux non nuls à l'aide des opérations élémentaires sur les lignes. Il reste à trouver son inverse.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3}]{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2}]{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Reste à diviser les deux premières lignes par 4 et la troisième par 2. Avec un petit coefficient pour faire propre, on obtient :

$$P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

d. Après calculs, on obtient successivement :

$$P^{-1}A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Conclusion : } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ où } T = P^{-1}AP.$$

e. — Sans difficulté, on trouve $N^2 = 0_3$ et donc :

$$\forall k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket, N^k = 0_3.$$

— Pour les petites puissances de T, on a facilement :

$$T^0 = I_3 \quad \text{et} \quad T^1 = T.$$

— Soit $n \geq 2$. On remarque tout d'abord que

$$DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND.$$

Les matrices N et D commutent. Cela nous autorise à utiliser le binôme de Newton.

$$T^n = (N + D)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = D^n + nND^{n-1}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque

Comme $D^0 + 0 \times ND^{-1} = I_3 = T^0$ et $D^1 + ND^0 = D + N = T^1$, l'expression obtenue est donc encore valable si $n \in \{0; 1\}$.

Remarque

Pour une expression aussi simple, l'énoncé aurait également pu demander de

f. On sait que $T = P^{-1}AP$ d'où $A = PTP^{-1}$.

Démontrons alors, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}$.

— Initialisation. Pour $n = 0$:

$$\begin{aligned} PT^0P^{-1} &= PI_3P^{-1} \\ &= PP^{-1} = I_3 \\ &= A^0 \end{aligned}$$

L'initialisation est vérifiée.

— Hérité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^n = PT^nP^{-1}$ et montrons que $A^{n+1} = PT^{n+1}P^{-1}$. On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PT^nP^{-1} \times PTP^{-1} && \text{hypothèse de récurrence et point précédent} \\ &= PT^n \times TP^{-1} \\ &= PT^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

L'hérité est ainsi établie.

— Initialisée à partir de $n = 0$ et héréditaire, la relation est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}.$$

On calcule ensuite les puissances de A en utilisant le résultat de la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (-1)^n - 2n + 3 & 2(-1)^{n+1} + 2 & (-1)^n + 2n - 1 \\ (-1)^{n+1} - 2n + 1 & 2(-1)^n + 2 & (-1)^{n+1} + 2n + 1 \\ (-1)^n - 2n - 1 & 2(-1)^{n+1} + 2 & (-1)^n + 2n + 3 \end{pmatrix}.$$

Méthode

Elle pourrait passer en récurrence immédiate ici... Je la fais simplement pour que vous puissiez vous assurer qu'elle est bien immédiate pour vous!

Méthode

Il est bon de vérifier pour $n = 0$ et $n = 1$ que l'on retrouve respectivement I_3 et A .

4. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. On a ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n.$$

Puis, par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0.$$

Avec la question précédente et puisque $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} (-1)^n + 2n - 1 \\ (-1)^{n+1} + 2n + 1 \\ (-1)^n + 2n + 3 \end{pmatrix}.$$

La première ligne nous fournit le résultat voulu.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n + 2n - 1.$$

Méthode

Les deux autres lignes servent de vérifications, puisqu'elles doivent correspondre à u_{n+1} et u_{n+2} si $u_n = (-1)^n + 2n - 1$. Ce qui est bien le cas! Ouf!

Correction de l'exercice 4 : [ÉNONCÉ]

1. a. L'expérience s'assimile à une infinité de répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès « obtenir une boule noire » a pour probabilité q .



La variable aléatoire \mathbb{T} prend alors comme valeur le rang du premier succès. Elle suit donc la loi géométrique de paramètre q :

$$\mathbb{T}(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}([\mathbb{T} = n]) = qp^{n-1}, \quad \mathbf{E}(\mathbb{T}) = \frac{1}{q}, \quad \mathbf{V}(\mathbb{T}) = \frac{p}{q^2}.$$

b. — Puisque \mathbb{U} prend comme valeur le nombre de balles blanches obtenues, on a :

$$\mathbb{U} = \mathbb{T} - 1.$$

— La variable aléatoire \mathbb{U} admet alors une espérance et une variance, comme transformée affine d'une variable aléatoire admettant espérance et variance :

$$\mathbf{E}(\mathbb{U}) = \mathbf{E}(\mathbb{T} - 1) = \mathbf{E}(\mathbb{T}) - 1 = \frac{1}{q} - 1 = \frac{p}{q},$$

par linéarité de l'espérance et

$$\mathbf{V}(\mathbb{U}) = \mathbf{V}(\mathbb{T} - 1) = \mathbf{V}(\mathbb{T}) = \frac{p}{q^2}.$$

2. a.

```

1  from random import random
2  def simulation_X(p):
3      blanche = False
4      noire = False
5      n = 0
6      while not (blanche and noire):
7          n += 1
8          if random() < p:
9              blanche = True
10         else:
11             noire = True
12     return n
    
```

b. i. $\mathcal{X}(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \llbracket$.
 ii. Soit $k \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$.

$[\mathcal{X} = k]$ est réalisé \iff on obtient la deuxième couleur de boule pour la première fois au k -ième tirage
 \iff les tirages 1 à $k - 1$ ont donné la même couleur et le k -ième tirage l'autre couleur
 \iff (les tirages 1 à $k - 1$ ont donné une boule blanche et le k -ième tirage une boule noire) ou (les tirages 1 à $k - 1$ ont donné une boule noire et le k -ième tirage une boule blanche)

D'où,

$$[\mathcal{X} = k] = (B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) \cup (N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k),$$

réunion de deux événements incompatibles.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([\mathcal{X} = k]) &= \mathbf{P}((B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) \cup (N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k)) \\ &= \mathbf{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) + \mathbf{P}(N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k) \\ &= p^{k-1}q + q^{k-1}p. \end{aligned}$$

Remarque

L'issue consistant à n'obtenir que des boules noires et celle à n'obtenir que des boules blanches n'ont pas d'image par \mathcal{X} . Ces deux issues forment un événement quasi-impossible. On peut donc sans problème omettre de les évoquer.

⚠ Attention
 Il est indispensable de justifier (ou à défaut mentionner) la convergence des séries en jeu lorsqu'on utilise la linéarité (pour décomposer) sur des sommes infinies.

iii. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathcal{X} = k]) &= \sum_{k=2}^{+\infty} (qp^{k-1} + pq^{k-1}) = \sum_{i=1}^{+\infty} (qp^i + pq^i) \\ &= q \sum_{i=1}^{+\infty} p^i + p \sum_{i=1}^{+\infty} q^i \quad (\text{les deux sommes étant convergentes}) \\ &= q \left(\sum_{i=0}^{+\infty} p^i - 1 \right) + p \left(\sum_{i=1}^{+\infty} q^i - 1 \right) \\ &= q \left(\frac{1}{1-p} - 1 \right) + p \left(\frac{1}{1-q} - 1 \right) \\ &= 1 - q + 1 - p = 1 - q + q \\ &= 1. \end{aligned}$$

iv. \mathcal{X} admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n \in \mathcal{X}(\Omega)} |k\mathbf{P}([\mathcal{X} = k])|$ est convergente si, et seulement si, la série $\sum_{k \geq 2} k\mathbf{P}([\mathcal{X} = k])$ est convergente, car elle est à termes positifs.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^N k\mathbf{P}([\mathcal{X} = k]) &= \sum_{k=2}^N k (qp^{k-1} + pq^{k-1}) \\ &= q \sum_{k=2}^N kp^{k-1} + p \sum_{k=2}^N kq^{k-1} \end{aligned}$$

Comme, pour $p, q \in]0; 1[$, ces deux séries sont des troncatures de séries géométriques convergentes, il en est de même de $\sum_{k \geq 2} k\mathbf{P}([\mathcal{X} = k])$.

On en déduit que \mathcal{X} admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathcal{X}) &= q \sum_{k=2}^{+\infty} kp^{k-1} + p \sum_{k=2}^{+\infty} kq^{k-1} \\ &= q \left(\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} - 1 \right) + p \left(\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} - 1 \right) \\ &= q \left(\frac{1}{(1-p)^2} - 1 \right) + p \left(\frac{1}{(1-q)^2} - 1 \right) \quad q = 1 - p \text{ et } p = 1 - q \\ &= \frac{1}{q} - 1 + \frac{1}{p} - p \\ &= \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1. \end{aligned}$$

Conclusion, \mathcal{X} admet une espérance et $\mathbf{E}(\mathcal{X}) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

c. i. Soit $k \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$.

— Si $k = 2$:

$$\begin{aligned} [\mathcal{X} = 2] \cap [\mathcal{Y} = 1] \text{ est réalisé} &\iff \text{on a tiré deux boules dont une blanche} \\ &\iff \text{on a tiré (une blanche puis une noire)} \\ &\quad \text{ou (une noire puis une blanche)} \end{aligned}$$

D'où,

$$[\mathcal{X} = 2] \cap [\mathcal{Y} = 1] = (B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2),$$

réunion de deux événements incompatibles.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) &= \mathbf{P}((B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)) \\ &= \mathbf{P}(B_1 \cap N_2) + \mathbf{P}(N_1 \cap B_2) \\ &= 2pq. \quad (\text{tirages avec remise donc mutuelle indépendance des évènements}) \end{aligned}$$

— Si $k \geq 3$:

$[X = k] \cap [Y = 1]$ est réalisé \iff on a tiré k boules dont une blanche
 \iff on a tiré une seule blanche et $k - 1 \geq 2$ noires
 \iff les tirages 1 à $k - 1$ ont donné une boule noire et le tirage k donne une boule blanche.

D'où,

$$[X = k] \cap [Y = 1] = N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k,$$

intersection d'évènements indépendants.

Par conséquent, on obtient :

$$\mathbf{P}([X = k] \cap [Y = 1]) = q^{k-1}p.$$

Conclusion, $\forall k \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$,

$$\mathbf{P}([X = k] \cap [Y = 1]) = \begin{cases} 2pq & \text{si } k = 2 \\ q^{k-1}p & \text{si } k \geq 3. \end{cases}$$

ii. D'après la formule des probabilités totales, avec $([X = k])_{k \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$ comme système complet d'évènements, la série $\sum_{k \geq 2} \mathbf{P}([X = k] \cap [Y = 1])$ est convergente et

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y = 1]) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k] \cap [Y = 1]) \\ &= \mathbf{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) + \sum_{k=3}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k] \cap [Y = 1]) \\ &= 2pq + \sum_{k=3}^{+\infty} pq^{k-1} \\ &= 2pq + p \sum_{i=2}^{+\infty} q^i \quad \text{en posant } i = k - 1 \\ &= 2pq + p \left(\sum_{i=2}^{+\infty} q^i - 1 - q \right) \quad (1 - q = p \text{ et } 1 - p = q) \\ &= 2pq + p \left(\frac{1}{1 - q} - 1 - q \right) \\ &= 2pq + 1 - p - pq \\ &= pq + 1 - p = pq + q \\ &= q(1 + p). \end{aligned}$$

iii. Puisque l'évènement « n'obtenir que des boules noires » est quasi-impossible, on peut considérer que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

— On a déjà $\mathbf{P}([Y = 1]) = q(1 + p)$.

— Soit ensuite $n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$.

- $[\Upsilon = n]$ est réalisé \Leftrightarrow on obtient n blanches à la fin du jeu
 \Leftrightarrow on obtient n blanches, avec $n \geq 2$, et les deux couleurs
 \Leftrightarrow on obtient n blanches et une noire
 \Leftrightarrow les tirages 1 à n ont donné une blanche et le $n + 1$ -ième tirage a donné une noire.

D'où,

$$[\Upsilon = n] = B_1 \cap \dots \cap B_n \cap N_{n+1},$$

intersection d'événements indépendants car venant de tirages avec remise.

Par conséquent,

$$\mathbf{P}([\Upsilon = n]) = p^n q.$$

Conclusion, $\Upsilon(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$,

$$\mathbf{P}([\Upsilon = n]) = \begin{cases} q(1+p) & \text{si } n = 1, \\ p^n q & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

- d. En échangeant les rôles des boules noires et blanches, on échange Υ et \mathbb{Z} .

Par conséquent, \mathbb{Z} a la même loi que celle de Υ , en échangeant p et q .

Conclusion, $\mathbb{Z}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$,

$$\mathbf{P}([\mathbb{Z} = n]) = \begin{cases} p(1+q) & \text{si } n = 1, \\ q^n p & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$