

Compléments sur les suites et les séries réelles

Cours de ECG-2

Lycée Gerville Réache

Chapitre 1



- ① Relations de comparaison
- ② Séries numériques



Lorsque l'on parle de comportement asymptotique d'une suite, la première idée à avoir est l'étude de l'existence et, le cas échéant, la recherche de la limite de cette suite. Il s'agit en effet du premier élément à étudier. Mais ce qui nous intéresse ensuite, c'est la vitesse à laquelle la suite tend vers cette limite. Autant il semble relativement simple de répondre à cette question dans le cas des suites dont on connaît le terme général ; autant cela sera nettement plus délicat pour les suites récurrentes ou les suites implicites.



L'idéal quand on souhaite étudier précisément une suite est d'en obtenir un développement asymptotique : en gros, une somme de suites simples ayant des comportements de plus en plus précis, dont la suite étudiée serait très proche. Cette notion n'est pas au programme, même si nous pourrions rencontrer des recherches de tels développements en exercices. Nous nous limiterons donc bien souvent au premier terme de ce développement asymptotique : un équivalent de la suite.



L'objectif de ce chapitre est d'affiner l'étude du comportement asymptotique des suites en voyant deux notions qui seront essentiellement illustrées sur des suites dont le terme général est connu, puis d'en voir une application dans l'étude des séries. Dans les cas où le terme général de la suite étudiée n'est pas connu, l'exercice guidera.



I. Pour bien démarrer

- ❶ Quelles méthodes peut-on mettre en œuvre pour étudier les variations d'une suite ?



I. Pour bien démarrer

- ❶ Quelles méthodes peut-on mettre en œuvre pour étudier les variations d'une suite ?
- Étudier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de $u_{n+1} - u_n$.



I. Pour bien démarrer

- ❶ Quelles méthodes peut-on mettre en œuvre pour étudier les variations d'une suite ?
- Étudier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de $u_{n+1} - u_n$.
 - Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de signe constant et ne s'annule pas, comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 .



I. Pour bien démarrer

- ② Définition quantifiée de suite convergente, de suite divergente vers $+\infty$.



I. Pour bien démarrer

② Définition quantifiée de suite convergente, de suite divergente vers $+\infty$.

- Suite **convergente** :

$$\exists \ell \in \mathbb{R} / \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon).$$



I. Pour bien démarrer

② Définition quantifiée de suite convergente, de suite divergente vers $+\infty$.

- Suite **convergente** :

$$\exists \ell \in \mathbb{R} / \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon).$$

- Suite **divergente** vers $+\infty$:

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \geq A).$$



I. Pour bien démarrer

- ⑧ Définition de suites adjacentes. Conséquence ?



I. Pour bien démarrer

⑧ Définition de suites adjacentes. Conséquence ?

- Définition : On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **adjacentes** lorsque :



I. Pour bien démarrer

⑧ Définition de suites adjacentes. Conséquence ?

- Définition : On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **adjacentes** lorsque :
 - ① l'une de ces suites est croissante,



I. Pour bien démarrer

⑧ Définition de suites adjacentes. Conséquence ?

- Définition : On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **adjacentes** lorsque :
 - ❶ l'une de ces suites est croissante,
 - ❷ l'autre est décroissante,



I. Pour bien démarrer

③ Définition de suites adjacentes. Conséquence ?

- Définition : On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **adjacentes** lorsque :
 - ① l'une de ces suites est croissante,
 - ② l'autre est décroissante,
 - ③ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.



I. Pour bien démarrer

③ Définition de suites adjacentes. Conséquence ?

- Définition : On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **adjacentes** lorsque :
 - ① l'une de ces suites est croissante,
 - ② l'autre est décroissante,
 - ③ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.
- Propriété : Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors elles convergent et ont la même limite.



I. Pour bien démarrer

- ④ Définition de convergence d'une série. Condition nécessaire de convergence, est-elle suffisante ? Convergence absolue, lien avec la convergence.
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

On définit la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.



I. Pour bien démarrer

- ④ Définition de convergence d'une série. Condition nécessaire de convergence, est-elle suffisante ? Convergence absolue, lien avec la convergence.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

On définit la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

- Définition : On dit que la série de terme général u_n est convergente lorsque la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.



I. Pour bien démarrer

- ④ Définition de convergence d'une série. Condition nécessaire de convergence, est-elle suffisante? Convergence absolue, lien avec la convergence.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

On définit la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

- Définition : On dit que la série de terme général u_n est convergente lorsque la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- Condition nécessaire : Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Cette condition n'est pas suffisante, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et pourtant $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente .



I. Pour bien démarrer

- ④ Définition de convergence d'une série. Condition nécessaire de convergence, est-elle suffisante ? Convergence absolue, lien avec la convergence.
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

On définit la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

- Définition : On dit que la série de terme général u_n est convergente lorsque la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- Condition nécessaire : Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Cette condition n'est pas suffisante, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et pourtant $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente .

- Définition : On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente lorsque $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est convergente.



I. Pour bien démarrer

- ④ Définition de convergence d'une série. Condition nécessaire de convergence, est-elle suffisante ? Convergence absolue, lien avec la convergence.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

On définit la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

- Définition : On dit que la série de terme général u_n est convergente lorsque la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- Condition nécessaire : Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Cette condition n'est pas suffisante, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et pourtant $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente .

- Définition : On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente lorsque $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est convergente.
- Propriété : Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente (la réciproque est fausse ...).



I. Pour bien démarrer

⑤ Séries usuelles.



I. Pour bien démarrer

⑤ Séries usuelles.

- Les séries $\sum_{n \geq 0} q^n$, $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ sont convergentes si, et seulement si, $q \in]-1; 1[$ et en cas de convergence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$



I. Pour bien démarrer

⑤ Séries usuelles.

- Les séries $\sum_{n \geq 0} q^n$, $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ sont convergentes si, et seulement si, $q \in]-1; 1[$ et en cas de convergence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.



I. Pour bien démarrer

⑤ Séries usuelles.

- Les séries $\sum_{n \geq 0} q^n$, $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ sont convergentes si, et seulement si, $q \in]-1; 1[$ et en cas de convergence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.
- La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.



II. Relations de comparaison

1 Relations de comparaison

- Négligeabilité de suites
- Équivalence de suites

2 Séries numériques



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

Définition 1 – Négligeabilité :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **négligeable** devant la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

Définition 1 – Négligeabilité :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **négligeable** devant la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

Notations (de Landau) : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

- On note $\underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ l'ensemble des suites négligeables devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$.



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

Définition 1 – Négligeabilité :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **négligeable** devant la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

Notations (de Landau) : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

- On note $\underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ l'ensemble des suites négligeables devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$.
- Par abus, on écrira $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ ou $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ au lieu de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$.

On lira « u_n est un petit o de v_n quand n tend vers $+\infty$ ».



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

Exemples 1 :

$$\textcircled{1} \quad n = o_{n \rightarrow +\infty}(n^2), \quad n = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3), \dots,$$

$$\forall p \leq q, \quad n^p = o_{n \rightarrow +\infty}(n^q)$$



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

Exemples 1 :

$$\textcircled{1} \quad n = o_{n \rightarrow +\infty}(n^2), \quad n = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3), \dots,$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{n^2} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\forall p \leq q, \quad n^p = o_{n \rightarrow +\infty}(n^q)$$

$$\forall p \leq q, \quad \frac{1}{n^q} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^p}\right)$$



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

Exemples 1 :

$$\textcircled{1} \quad n = o_{n \rightarrow +\infty}(n^2), \quad n = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3), \dots,$$

$$\forall p \leq q, \quad n^p = o_{n \rightarrow +\infty}(n^q)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{n^2} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\forall p \leq q, \quad \frac{1}{n^q} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Comme } \frac{2}{3} \in]-1; 1[, \quad 2^n = o_{n \rightarrow +\infty}(3^n).$$



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

Exemples 1 :

❶ $n = o_{n \rightarrow +\infty}(n^2), n = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3), \dots,$

$$\forall p \leq q, n^p = o_{n \rightarrow +\infty}(n^q)$$

❷ $\frac{1}{n^2} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right),$

$$\forall p \leq q, \frac{1}{n^p} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

❸ Comme $\frac{2}{3} \in]-1; 1[, 2^n = o_{n \rightarrow +\infty}(3^n).$

❹ Par croissances comparées : $\left(\frac{1}{2}\right)^n = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).$



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

Interprétons cette nouvelle notion dans trois cas classiques...

❶ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$:

Dans ce cas, $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ si, et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend moins vite vers $+\infty$ que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

Interprétons cette nouvelle notion dans trois cas classiques...

- ❶ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$:

Dans ce cas, $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ si, et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend moins vite vers $+\infty$ que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- ❷ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$:

Dans ce cas, $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ si, et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend plus vite vers 0 que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

Interprétons cette nouvelle notion dans trois cas classiques...

- ❶ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$:

Dans ce cas, $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ si, et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend moins vite vers $+\infty$ que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- ❷ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$:

Dans ce cas, $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ si, et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend plus vite vers 0 que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- ❸ $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(1)$ si, et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 .



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

Proposition 1 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites de réels telles qu'à partir d'un certain rang les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annulent pas.

$$\boxed{\text{P1}} \cdot \left. \begin{array}{l} u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \\ u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \end{array} \right\} \Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u_n + \mu u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$$



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

Proposition 1 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites de réels telles qu'à partir d'un certain rang les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annulent pas.

$$\boxed{\text{P1}} \quad \bullet \quad \left. \begin{array}{l} u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \\ u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \end{array} \right\} \Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u_n + \mu u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$$

$$\boxed{\text{P2}} \quad \bullet \quad \left. \begin{array}{l} u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \\ v_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(w_n) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(w_n) \quad (\text{transitivité})$$



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

Proposition 1 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites de réels telles qu'à partir d'un certain rang les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annulent pas.

$$\boxed{\text{P1}} \quad \bullet \quad \left. \begin{array}{l} u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \\ u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \end{array} \right\} \Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u_n + \mu u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$$

$$\boxed{\text{P2}} \quad \bullet \quad \left. \begin{array}{l} u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \\ v_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(w_n) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(w_n) \quad (\text{transitivité})$$

$$\boxed{\text{P3}} \quad \bullet \quad u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \Rightarrow u_n w_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n w_n)$$



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

Proposition 1 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites de réels telles qu'à partir d'un certain rang les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annulent pas.

$$\boxed{\text{P1}} \quad \bullet \quad \left. \begin{array}{l} u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \\ u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \end{array} \right\} \Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u_n + \mu u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$$

$$\boxed{\text{P2}} \quad \bullet \quad \left. \begin{array}{l} u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \\ v_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(w_n) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(w_n) \quad (\text{transitivité})$$

$$\boxed{\text{P3}} \quad \bullet \quad u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \Rightarrow u_n w_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n w_n)$$

$$\boxed{\text{P4}} \quad \bullet \quad \left. \begin{array}{l} u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \\ u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v'_n) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n v'_n)$$



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

Proposition 1 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites de réels telles qu'à partir d'un certain rang les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annulent pas.

$$\boxed{\text{P1}} \quad \bullet \quad \left. \begin{array}{l} u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \\ u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \end{array} \right\} \Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u_n + \mu u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$$

$$\boxed{\text{P2}} \quad \bullet \quad \left. \begin{array}{l} u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \\ v_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(w_n) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(w_n) \quad (\text{transitivité})$$

$$\boxed{\text{P3}} \quad \bullet \quad u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \Rightarrow u_n w_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n w_n)$$

$$\boxed{\text{P4}} \quad \bullet \quad \left. \begin{array}{l} u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \\ u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v'_n) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n v'_n)$$

$$\boxed{\text{P5}} \quad \bullet \quad u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(\lambda v_n)$$



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

Proposition 1 :

$$\boxed{\text{P1}} \quad \bullet \quad \left. \begin{array}{l} u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \end{array} \right\} \Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u_n + \mu u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$$

$$\boxed{\text{P2}} \quad \bullet \quad \left. \begin{array}{l} u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n) \quad (\text{transitivité})$$

$$\boxed{\text{P3}} \quad \bullet \quad u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \Rightarrow u_n w_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n w_n)$$

$$\boxed{\text{P4}} \quad \bullet \quad \left. \begin{array}{l} u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v'_n) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n v'_n)$$

$$\boxed{\text{P5}} \quad \bullet \quad u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(\lambda v_n)$$

$$\boxed{\text{P6}} \quad \bullet \quad \text{Si } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ne s'annule pas à partir d'un certain rang :}$$

$$u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \Rightarrow \frac{1}{v_n} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{u_n}\right)$$



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

De façon générale, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsqu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0 \quad \text{et} \quad \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n = \varepsilon_n v_n.$$



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

De façon générale, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsqu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0 \quad \text{et} \quad \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n = \varepsilon_n v_n.$$

Remarque : Dans l'écriture « $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ », le n est muet.



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

De façon générale, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsqu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0 \quad \text{et} \quad \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n = \varepsilon_n v_n.$$

Remarque : Dans l'écriture « $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ », le n est muet.

Un peu d'histoire : Edmund Landau (1877-1938, allemand) a concentré son travail sur la théorie des nombres ; il a, entre autres, fourni une démonstration du théorème des nombres premiers plus simple que celles alors connues. Il a également popularisé les notations o et $\sim$ vues dans ce chapitre.



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

Exemples 2 :

- On a $n^2 = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$, $n = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$ et $1 = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$.
D'où, $n^2 + 2n + 1 = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$.



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

Exemples 2 :

■ On a $n^2 = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$, $n = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$ et $1 = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$.

D'où, $n^2 + 2n + 1 = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$.

■ $n^4 + n^2 + 2n + 1 = n^4 + o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$.



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

ATTENTION

On rappelle que « $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ » est un abus de notation. Ce n'est pas une égalité comme on la connaît.



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

ATTENTION

On rappelle que « $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ » est un abus de notation. Ce n'est pas une égalité comme on la connaît.

En particulier :

$$\left. \begin{array}{l} u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \end{array} \right\} \not\Rightarrow u_n = u'_n.$$

II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

ATTENTION

On rappelle que « $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ » est un abus de notation. Ce n'est pas une égalité comme on la connaît.

En particulier :

$$\left. \begin{array}{l} u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \\ u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \end{array} \right\} \not\Rightarrow u_n = u'_n.$$

$n^2 = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^3)$ et $n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^3)$ mais $n^2 \neq n$ dès que $n \geq 2$.



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

On peut réécrire les croissances comparées avec la notation ci-dessus :

Proposition 2 – Croissances comparées :

P1 • $\forall p, q \in \mathbb{N}$ si $p < q$ alors $n^p = o_{n \rightarrow +\infty}(n^q)$.



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

On peut réécrire les croissances comparées avec la notation ci-dessus :

Proposition 2 – Croissances comparées :

P1

- $\forall p, q \in \mathbb{N}$ si $p < q$ alors $n^p = o_{n \rightarrow +\infty}(n^q)$.

P2

- $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ si $a < b$ alors $a^n = o_{n \rightarrow +\infty}(b^n)$.



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

On peut réécrire les croissances comparées avec la notation ci-dessus :

Proposition 2 – Croissances comparées :

- P1** • $\forall p, q \in \mathbb{N}$ si $p < q$ alors $n^p = o_{n \rightarrow +\infty}(n^q)$.
- P2** • $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ si $a < b$ alors $a^n = o_{n \rightarrow +\infty}(b^n)$.
- P3** • $\forall p \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \ln(n)^p = o_{n \rightarrow +\infty}(n^q)$.



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

On peut réécrire les croissances comparées avec la notation ci-dessus :

Proposition 2 – Croissances comparées :

- P1** • $\forall p, q \in \mathbb{N}$ si $p < q$ alors $n^p = o_{n \rightarrow +\infty}(n^q)$.
- P2** • $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ si $a < b$ alors $a^n = o_{n \rightarrow +\infty}(b^n)$.
- P3** • $\forall p \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(n)^p = o_{n \rightarrow +\infty}(n^q)$.
- P4** • $\forall p \in \mathbb{R}, \forall q \in]1; +\infty[, n^p = o_{n \rightarrow +\infty}(q^n)$.



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

On peut réécrire les croissances comparées avec la notation ci-dessus :

Proposition 2 – Croissances comparées :

- P1** • $\forall p, q \in \mathbb{N}$ si $p < q$ alors $n^p = o_{n \rightarrow +\infty}(n^q)$.
- P2** • $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ si $a < b$ alors $a^n = o_{n \rightarrow +\infty}(b^n)$.
- P3** • $\forall p \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(n)^p = o_{n \rightarrow +\infty}(n^q)$.
- P4** • $\forall p \in \mathbb{R}, \forall q \in]1; +\infty[, n^p = o_{n \rightarrow +\infty}(q^n)$.
- P5** • $\forall q \in \mathbb{R}, q^n = o_{n \rightarrow +\infty}(n!)$.



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

On peut réécrire les croissances comparées avec la notation ci-dessus :

Proposition 2 – Croissances comparées :

- P1** • $\forall p, q \in \mathbb{N}$ si $p < q$ alors $n^p = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^q)$.
- P2** • $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ si $a < b$ alors $a^n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(b^n)$.
- P3** • $\forall p \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(n)^p = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^q)$.
- P4** • $\forall p \in \mathbb{R}, \forall q \in]1; +\infty[, n^p = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(q^n)$.
- P5** • $\forall q \in \mathbb{R}, q^n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n!)$.
- P6** • $n! = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^n)$.



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

On les retient parfois ainsi :

Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$(\ln(n))^{\alpha} \ll_{0 \leq \alpha < \alpha'} (\ln(n))^{\alpha'} \ll_{0 < \beta < \beta'} n^{\beta} \ll n^{\beta'} \ll_{1 < a < b} a^n \ll b^n \ll n! \ll n^n.$$

Vocabulaire : Le symbole « $\ll$ » se lisant alors « est négligeable devant ».



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

Exemples 3 :

- Par croissances comparées, on a $\ln(n) = o_{n \rightarrow +\infty}(\sqrt{n})$, donc

$$\frac{\ln(n)}{n} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

Exemples 3 :

- Par croissances comparées, on a $\ln(n) = o_{n \rightarrow +\infty}(\sqrt{n})$, donc

$$\frac{\ln(n)}{n} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

- Par croissances comparées, on a $\ln(n) = o_{n \rightarrow +\infty}(\sqrt{n})$ et $e^{-n} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$, donc

$$\frac{\ln(n)}{e^n} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$



II. Relations de comparaison

1. Négligeabilité de suites

Exemples 3 :

- Par croissances comparées, on a $\ln(n) = o_{n \rightarrow +\infty}(\sqrt{n})$, donc

$$\frac{\ln(n)}{n} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

- Par croissances comparées, on a $\ln(n) = o_{n \rightarrow +\infty}(\sqrt{n})$ et $e^{-n} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$, donc

$$\frac{\ln(n)}{e^n} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Parfois, on écrira $u_n = v_n + o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ qui se lit « u_n égale v_n + un petit o de v_n ».

Cette écriture est équivalente à dire qu'il existe une suite (h_n) , négligeable devant (v_n) , telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + h_n$.



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Définition 2 – Équivalence de suites :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **équivalente** à la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

De façon générale, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsqu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1 \quad \text{et} \quad \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n = \alpha_n v_n.$$



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Définition 2 – Équivalence de suites :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **équivalente** à la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Dans ce cas, on écrira : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Définition 2 – Équivalence de suites :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **équivalente** à la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Dans ce cas, on écrira : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

De façon générale, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsqu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1 \quad \text{et} \quad \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n = \alpha_n v_n.$$



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

ATTENTION

Si un jour on arrive à écrire $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0$, on peut directement arrêter la prépa !



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

ATTENTION

Si un jour on arrive à écrire $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0$, on peut directement arrêter la prépa !

Pourquoi ?



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

ATTENTION

Si un jour on arrive à écrire $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0$, on peut directement arrêter la prépa !

Pourquoi ?

- D'une part, pour la définition que nous avons adoptée, l'écriture $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0$ n'est pas permise.



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

ATTENTION

Si un jour on arrive à écrire $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0$, on peut directement arrêter la prépa !

Pourquoi ?

- D'une part, pour la définition que nous avons adoptée, l'écriture $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0$ n'est pas permise.
- D'autre part, les seules suites équivalentes à la suite nulle sont les suites nulles à partir d'un certain rang.



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Exemples 4 :

$$\blacksquare n^2 + 2n + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2.$$



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Exemples 4 :

$$\blacksquare n^2 + 2n + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2.$$

$$\blacksquare \sqrt{2n^2 - 5n + 2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2}n.$$



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Exemples 4 :

- $n^2 + 2n + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2.$
- $\sqrt{2n^2 - 5n + 2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2}n.$
- Par croissances comparées, $e^n + n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^n.$



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Exemple 5 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \leq u_n \leq 2n$.
Donnons un équivalent de $\ln(u_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Proposition 3 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

P1

$$\bullet \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n.$$

(réflexivité)



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Proposition 3 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

P1

$$\bullet \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n.$$

(réflexivité)

P2

$$\bullet \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n.$$

(symétrie)



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Proposition 3 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

$$\boxed{\text{P1}} \quad \bullet \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n. \quad (\text{réflexivité})$$

$$\boxed{\text{P2}} \quad \bullet \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n. \quad (\text{symétrie})$$

$$\boxed{\text{P3}} \quad \bullet \quad \left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n \end{array} \right\} \implies u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n. \quad (\text{transitivité})$$



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Proposition 3 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

P1 • $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$. (réflexivité)

P2 • $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$. (symétrie)

P3 • $\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n \end{array} \right\} \implies u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$. (transitivité)

P4 • $\forall \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Proposition 3 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

P1 • $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$. (réflexivité)

P2 • $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$. (symétrie)

P3 • $\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n \end{array} \right\} \implies u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$. (transitivité)

P4 • $\forall \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

P5 • $\forall \ell \in \mathbb{R}^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \implies u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$.



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Proposition 3 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

$$\boxed{\text{P6}} \quad \bullet \quad \left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v'_n \end{array} \right\} \Rightarrow u_n u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n v'_n \quad (\text{compatibilité avec le produit})$$

En particulier, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \lambda u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda v_n$.



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Proposition 3 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

$$\boxed{\text{P6}} \quad \bullet \quad \left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v'_n \end{array} \right\} \Rightarrow u_n u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n v'_n \quad (\text{compatibilité avec le produit})$$

En particulier, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \lambda u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda v_n$.

$$\boxed{\text{P7}} \quad \bullet \quad \left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v'_n \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{u_n}{u'_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{v_n}{v'_n}. \quad (\text{compatibilité avec le quotient})$$

En particulier, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \frac{1}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Proposition 3 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

$$\boxed{\text{P6}} \quad \bullet \quad \left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v'_n \end{array} \right\} \Rightarrow u_n u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n v'_n \quad (\text{compatibilité avec le produit})$$

En particulier, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \lambda u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda v_n$.

$$\boxed{\text{P7}} \quad \bullet \quad \left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v'_n \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{u_n}{u'_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{v_n}{v'_n}. \quad (\text{compatibilité avec le quotient})$$

En particulier, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \frac{1}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$

$$\boxed{\text{P8}} \quad \bullet \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}, u_n^m \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^m. \quad (\text{compatibilité avec la puissance})$$



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Proposition 3 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

$$\boxed{\text{P9}} \quad \bullet \quad \left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont strictement} \\ \text{positives à partir d'un certain rang} \end{array} \right\} \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}, u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^\alpha.$$



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Proposition 3 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

$$\boxed{\text{P9}} \quad \left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont strictement} \\ \text{positives à partir d'un certain rang} \end{array} \right\} \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}, u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^\alpha.$$

$$\boxed{\text{P10}} \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow |u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |v_n| \text{ (compatibilité avec la valeur absolue)}$$



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Proposition 3 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

$$\boxed{\text{P9}} \quad \left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont strictement} \\ \text{positives à partir d'un certain rang} \end{array} \right\} \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}, u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^\alpha.$$

$$\boxed{\text{P10}} \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow |u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |v_n| \text{ (compatibilité avec la valeur absolue)}$$

$$\boxed{\text{P11}} \quad \text{Si } u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n, \text{ alors, à partir d'un certain rang, } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ont même signe.}$$



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Proposition 3 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

P12

• Trois choses souvent utiles

(liens entre $\sim$ et o)



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Proposition 3 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

P12

• Trois choses souvent utiles

(liens entre $\sim$ et o)

$$(1). \left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ v_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(w_n) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(w_n)$$



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Proposition 3 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

P12

• Trois choses souvent utiles

(liens entre $\sim$ et o)

$$(1). \left. \begin{array}{l} u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n \\ v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$$

$$(2). \left. \begin{array}{l} u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n \\ u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n + u'_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Proposition 3 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

P12

• Trois choses souvent utiles

(liens entre $\sim$ et o)

$$(1). \left. \begin{array}{l} u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n \\ v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$$

$$(2). \left. \begin{array}{l} u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n \\ u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n + u'_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

$$(3). \quad u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n \iff u_n = v_n + o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \iff u_n = v_n + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n) \\ = v_n \left(1 + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \right).$$



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Vocabulaire : Une relation entre deux objets d'un même ensemble qui est réflexive, symétrique et transitive est une relation d'équivalence.



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Vocabulaire : Une relation entre deux objets d'un même ensemble qui est réflexive, symétrique et transitive est une relation d'équivalence.

C'est le cas de $\sim_{n \rightarrow +\infty}$ sur l'ensemble des suites réelles mais également de $\Leftrightarrow$ sur l'ensemble des assertions mathématiques.



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Exemple 6 :

Donnons un équivalent simple de $\frac{(n^2 + 1)^4 + n + 7}{2n(n^3 + 5)}$ en $+\infty$.



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Exemple 6 :

Donnons un équivalent simple de $\frac{(n^2 + 1)^4 + n + 7}{2n(n^3 + 5)}$ en $+\infty$.

$$\frac{(n^2 + 1)^4 + n + 7}{2n(n^3 + 5)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^4}{2}.$$



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Exemple 7 :

Donnons un équivalent simple de $n^3 2^n + n 3^n$ en $+\infty$.

II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Exemple 7 :

Donnons un équivalent simple de $n^3 2^n + n 3^n$ en $+\infty$.

$$n^3 2^n + n 3^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n 3^n.$$



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Exemple 8 :

Les suites $(\ln(n+1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont-elles équivalentes en $+\infty$?



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Exemple 8 :

Les suites $(\ln(n+1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont-elles équivalentes en $+\infty$?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1. \text{ Autrement dit } \ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Exemple 9 – Il est interdit de composer à gauche par une fonction :

Les suites $(\exp(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\exp(n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont-elles équivalentes en $+\infty$?



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Exemple 9 – Il est interdit de composer à gauche par une fonction :

Les suites $(\exp(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\exp(n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont-elles équivalentes en $+\infty$?

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\exp(n+1)}{\exp(n)} = e \neq 1$ et les suites $(\exp(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\exp(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne sont pas équivalentes en $+\infty$.



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Théorème 4 – Équivalents usuels :

- T1** • Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \dots, a_k$ des réels et $b_0, b_1, \dots, b_k$ des réels tels que $b_0 < b_1 < \dots < b_k$.
- Si $a_k \neq 0$, alors $a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \dots + a_k n^{b_k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_k n^{b_k}$.

Autrement dit, une expression polynomiale est équivalente en $+\infty$ à son terme non nul de plus haut degré.



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Théorème 4 – Équivalents usuels :

T1 • Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \dots, a_k$ des réels et $b_0, b_1, \dots, b_k$ des réels tels que $b_0 < b_1 < \dots < b_k$.
Si $a_k \neq 0$, alors $a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \dots + a_k n^{b_k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_k n^{b_k}$.

T2 • Si, à partir d'un certain rang $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas **et** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
alors

Autrement dit, une expression polynomiale est équivalente en $+\infty$ à son terme non nul de plus haut degré.



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Théorème 4 – Équivalents usuels :

T1 • Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \dots, a_k$ des réels et $b_0, b_1, \dots, b_k$ des réels tels que $b_0 < b_1 < \dots < b_k$.

Si $a_k \neq 0$, alors $a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \dots + a_k n^{b_k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_k n^{b_k}$.

T2 • Si, à partir d'un certain rang $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas **et** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ alors

$$(1). \ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$$

Autrement dit, une expression polynomiale est équivalente en $+\infty$ à son terme non nul de plus haut degré.



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Théorème 4 – Équivalents usuels :

T1 • Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \dots, a_k$ des réels et $b_0, b_1, \dots, b_k$ des réels tels que $b_0 < b_1 < \dots < b_k$.

Si $a_k \neq 0$, alors $a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \dots + a_k n^{b_k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_k n^{b_k}$.

T2 • Si, à partir d'un certain rang $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas **et** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ alors

(1). $\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$

(2). $e^{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$

Autrement dit, une expression polynomiale est équivalente en $+\infty$ à son terme non nul de plus haut degré.



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Théorème 4 – Équivalents usuels :

T1 • Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \dots, a_k$ des réels et $b_0, b_1, \dots, b_k$ des réels tels que $b_0 < b_1 < \dots < b_k$.

Si $a_k \neq 0$, alors $a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \dots + a_k n^{b_k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_k n^{b_k}$.

T2 • Si, à partir d'un certain rang $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas **et** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ alors

(1). $\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$

(2). $e^{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$

(3). $\forall a \in \mathbb{R}^*, (1 + u_n)^a - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a u_n$

Autrement dit, une expression polynomiale est équivalente en $+\infty$ à son terme non nul de plus haut degré.



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Rappel :

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Rappel :

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Méthode 1 :

Pour retrouver ces limites, les voir comme des limites de taux d'accroissements de fonctions dérivables entre 0 et x .



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Rappel :

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$\blacksquare \forall a \in \mathbb{R}^*, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$$

Méthode 1 :

Pour retrouver ces limites, les voir comme des limites de taux d'accroissements de fonctions dérivables entre 0 et x .



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Exemple 10 :

Déterminons la limite de la suite de terme général $\frac{7n^6 - 3n^5 + n^3 - n^2 + 3}{3n^6 + 7n^2 + 1}$.



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Exemple 10 :

Déterminons la limite de la suite de terme général $\frac{7n^6 - 3n^5 + n^3 - n^2 + 3}{3n^6 + 7n^2 + 1}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^6 - 3n^5 + n^3 - n^2 + 3}{3n^6 + 7n^2 + 1} = \frac{7}{3}.$$



II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Exemple 11 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

II. Relations de comparaison

2. Équivalence de suites

Exemple 11 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$



III. Séries numériques

1 Relations de comparaison

2 Séries numériques

- Premiers exemples et rappels de première année
- Séries à terme positif



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Définition 3 – Suites des sommes partielles :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

D1 • On appelle **série de terme général** u_n , notée $\sum_{n \geq 0} u_n$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ ou $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Définition 3 – Suites des sommes partielles :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

D1 • On appelle **série de terme général** u_n , notée $\sum_{n \geq 0} u_n$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ ou $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Vocabulaire : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

- u_n s'appelle le **terme général** de rang n .



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Définition 3 – Suites des sommes partielles :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

D1 • On appelle **série de terme général** u_n , notée $\sum_{n \geq 0} u_n$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ ou $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Vocabulaire : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

- u_n s'appelle le **terme général** de rang n .
- S_n s'appelle la **somme partielle** de rang n .



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Définition 3 – Suites des sommes partielles :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- D2** • On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Définition 3 – Suites des sommes partielles :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

D2 • On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Vocabulaire : Dans ce cas,

■ la limite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et appelée somme de la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Définition 3 – Suites des sommes partielles :

⚠ Attention

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

D2

• On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge lorsque la suite des sommes partielles

R_n n'existe que si série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge !

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Vocabulaire : Dans ce cas,

- la limite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et appelée **somme de la série** :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

- On appelle **reste de rang n** l'élément R_n défini par :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Définition 3 – Suites des sommes partielles :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

D3

- Lorsque la série ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Définition 3 – Suites des sommes partielles :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- D3** • Lorsque la série ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Vocabulaire : Déterminer la nature d'une série revient à se poser la question de sa convergence.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Définition 3 – Suites des sommes partielles :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- D3** • Lorsque la série ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Vocabulaire : Déterminer la nature d'une série revient à se poser la question de sa convergence.

En particulier, deux séries sont dites **de même nature** si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Attention

Deux séries peuvent être de même nature sans avoir la même somme.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Remarques :

- Ne pas confondre suite et série : $\sum u_n$ est une série. C'est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles des $n + 1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Remarques :

- Ne pas confondre suite et série : $\sum u_n$ est une série. C'est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles des $n + 1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- On s'intéresse essentiellement à la nature de la série et non de la suite, notions qui n'ont souvent rien à voir.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Remarques :

- Ne pas confondre suite et série : $\sum u_n$ est une série. C'est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles des $n + 1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- On s'intéresse essentiellement à la nature de la série et non de la suite, notions qui n'ont souvent rien à voir.
- La notation $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ ne présume en rien de la convergence de la série et donc de l'existence de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Remarques :

- Ne pas confondre suite et série : $\sum u_n$ est une série. C'est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles des $n + 1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- On s'intéresse essentiellement à la nature de la série et non de la suite, notions qui n'ont souvent rien à voir.
- La notation $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ ne présume en rien de la convergence de la série et donc de l'existence de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Écrire la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ suppose implicitement que la série converge. On prendra donc bien garde à n'utiliser ce symbole que dans ce cas.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Remarques :

- Ne pas confondre suite et série : $\sum u_n$ est une série. C'est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles des $n + 1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- On s'intéresse essentiellement à la nature de la série et non de la suite, notions qui n'ont souvent rien à voir.
- La notation $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ ne présume en rien de la convergence de la série et donc de l'existence de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Écrire la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ suppose implicitement que la série converge. On prendra donc bien garde à n'utiliser ce symbole que dans ce cas.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la somme de la série. C'est un nombre réel.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Remarques :

- Dans le cas de convergence, on peut remarquer que la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S - S_n = 0.$$

Le reste d'ordre n représente l'erreur commise lorsque l'on remplace la somme S par la $n^{\text{ème}}$ somme partielle.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Remarques :

- Dans le cas de convergence, on peut remarquer que la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S - S_n = 0.$$

Le reste d'ordre n représente l'erreur commise lorsque l'on remplace la somme S par la $n^{\text{ème}}$ somme partielle.

- Les premiers termes d'une suite ne changent pas la nature de la série : $\sum_{n \geq n_0} u_n$

converge si et seulement si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Remarques :

- Enfin, remarquez que $S_0 = u_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - S_{n-1}$.

Le terme général définit la série et la réciproque est vraie : si l'on connaît la série, on peut donc retrouver son terme général.

Par exemple, si on sait que, $\forall n \in \mathbb{N}$, la somme partielle S_n est définie par

$$\begin{aligned} S_n &= 1 - \frac{1}{n+2}, \text{ alors } S_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ u_n &= S_n - S_{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Exemple 12 – La série harmonique :

La série harmonique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Définition 4 – Série géométrique :

On appelle **série géométrique** de raison $q \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} q^n$.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Définition 4 – Série géométrique :

On appelle **série géométrique** de raison $q \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} q^n$.

Proposition 5 :

La série $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{et} \quad R_p = \sum_{k=p+1}^{+\infty} q^k = \frac{q^{p+1}}{1-q}.$$



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Proposition 6 – Séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2 :

- P1** • La série $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Proposition 6 – Séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2 :

- P1** • La série $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

- P2** • La série $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Remarque : La dérivation d'une série n'est pas permise au programme cependant elle constitue un bon moyen mnémotechnique pour retenir les résultats :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (q^k)' = \left(\frac{1}{1-q} \right)' = \frac{1}{(1-q)^2}$$



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Remarque : La dérivation d'une série n'est pas permise au programme cependant elle constitue un bon moyen mnémotechnique pour retenir les résultats :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (q^k)' = \left(\frac{1}{1-q} \right)' = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} (q^k)'' = \left(\frac{1}{1-q} \right)'' = \frac{2}{(1-q)^3}.$$



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Définition 5 – Série exponentielle :

Pour tout réel x , on appelle série exponentielle de x la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Définition 5 – Série exponentielle :

Pour tout réel x , on appelle série exponentielle de x la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.

Proposition 7 :

Pour tout réel x , la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Exercice 1 :

Après avoir démontré son existence, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Proposition 8 – Série télescopique :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Proposition 8 – Série télescopique :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

On peut donc étudier une suite en se servant des techniques spécifiques de la théorie des séries, ou au contraire étudier une série au moyen des techniques spécifiques de la théorie des suites.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Exemple 13 :

Montrons que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Proposition 9 – Combinaison linéaire de séries convergentes :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors, la série $\sum (\lambda u_n + v_n)$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Proposition 9 – Combinaison linéaire de séries convergentes :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors, la série $\sum (\lambda u_n + v_n)$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Corollaire 1 – Structure de l'ensemble des suites convergentes :

L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Proposition 9 – Combinaison linéaire de séries convergentes :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors, la série $\sum (\lambda u_n + v_n)$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Corollaire 1 – Structure de l'ensemble des suites convergentes :

L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel.

Pour le produit, c'est un peu plus compliqué et demande une notion de convergence un peu plus forte...



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

ATTENTION

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, il est possible que $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge ...



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

ATTENTION

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, il est possible que $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge ...

L'ensemble des séries divergentes n'est pas stable par combinaisons linéaires.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

ATTENTION

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, il est possible que $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge ...

L'ensemble des séries divergentes n'est pas stable par combinaisons linéaires.

Pire pour vous, même si $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, il est possible que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

ATTENTION

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, il est possible que $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge ...

L'ensemble des séries divergentes n'est pas stable par combinaisons linéaires.

Pire pour vous, même si $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, il est possible que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent.

Il est donc INTERDIT de découper une somme de série en deux comme écrire
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$$
 sans avoir vérifié que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ étaient convergentes.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

ATTENTION

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, il est possible que $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge ...

L'ensemble des séries divergentes n'est pas stable par combinaisons linéaires.

Pire pour vous, même si $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, il est possible que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent.

Il est donc INTERDIT de découper une somme de série en deux comme écrire $\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ sans avoir vérifié que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ étaient convergentes.

Retenez pour cela l'exemple (13) : La série $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ converge au contraire des deux séries harmoniques $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Une première conséquence des théorèmes généraux, condition nécessaire de convergence qui sera le plus souvent un critère de divergence :

Proposition 10 – Condition nécessaire de convergence :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Une première conséquence des théorèmes généraux, condition nécessaire de convergence qui sera le plus souvent un critère de divergence :

Proposition 10 – Condition nécessaire de convergence :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Par la contraposée, si le terme général ne tend pas vers 0, pas alors la série diverge. On dit dans ce cas que la série **diverge grossièrement**.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Exemples 14 :

■ Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{n+1}$ diverge.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Exemples 14 :

- Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{n+1}$ diverge.
- De même, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement) si $\alpha \leq 0$.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Exemples 14 :

- Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{n+1}$ diverge.
- De même, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement) si $\alpha \leq 0$.
- Enfin, comme $(-1)^n$ n'a pas de limite, la série $\sum (-1)^n$ diverge de même que les séries du type $\sum \sin(n)$.



III. Séries numériques

1. Premiers exemples et rappels de première année

Exemples 14 :

- Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{n+1}$ diverge.
- De même, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement) si $\alpha \leq 0$.
- Enfin, comme $(-1)^n$ n'a pas de limite, la série $\sum (-1)^n$ diverge de même que les séries du type $\sum \sin(n)$.

ATTENTION

La réciproque est fautive comme le montre la divergence de la série harmonique

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \text{ ou de } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Le **théorème (14)** donnera une place toute particulière aux séries à terme positif par la condition suffisante de convergence :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \text{ converge} \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge.}$$



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Le **théorème (14)** donnera une place toute particulière aux séries à terme positif par la condition suffisante de convergence :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \text{ converge} \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge.}$$

Dans tout ce paragraphe, on considèrera des séries numériques réelles à terme positif (au moins à partir d'un certain rang) **a fortiori** réel.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Le **théorème (14)** donnera une place toute particulière aux séries à terme positif par la condition suffisante de convergence :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \text{ converge} \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge.}$$

Dans tout ce paragraphe, on considèrera des séries numériques réelles à terme positif (au moins à partir d'un certain rang) **a fortiori** réel.

Si les séries sont à terme négatif, en travaillant sur la série des opposés et en utilisant la linéarité de la somme, on obtient les mêmes résultats. Les théorèmes de ce paragraphe s'appliquent donc à toutes les séries à **terme de signe constant**.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Théorème 11 :

T1 • Une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ à terme positif converge si, et seulement si la suite

$\left(S_n = \sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles est majorée :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge} \iff \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k \leq M.$$



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Théorème 11 :

T1 • Une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ à terme positif converge si, et seulement si la suite

$\left(S_n = \sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles est majorée :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge} \iff \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k \leq M.$$

T2 • Le seul cas de divergence est la limite infinie.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Exemple 15 :

La série harmonique $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n}$ à terme positif diverge donc vers $+\infty$.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Exemple 15 :

La série harmonique $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n}$ à terme positif diverge donc vers $+\infty$.

Exemple 16 :

$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Théorème 12 – Critère de comparaison par inégalité :

$$\boxed{\text{T1}} \cdot \left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est convergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est convergente.}$$



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Théorème 12 – Critère de comparaison par inégalité :

$$\boxed{\text{T1}} \cdot \left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est convergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est convergente.}$$

$$\boxed{\text{T2}} \cdot \left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est divergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est divergente.}$$



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Théorème 12 – Critère de comparaison par inégalité :

$$\boxed{\text{T1}} \cdot \left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est convergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est convergente.}$$

$$\boxed{\text{T2}} \cdot \left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est divergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est divergente.}$$

Ces critères sont encore valables si les inégalités ne sont vraies qu'à partir d'un certain rang.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Théorème 12 – Critère de comparaison par inégalité :

$$\boxed{\text{T1}} \cdot \left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est convergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est convergente.}$$

$$\boxed{\text{T2}} \cdot \left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est divergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est divergente.}$$

Ces critères sont encore valables si les inégalités ne sont vraies qu'à partir d'un certain rang.

Remarque : Si le terme général est négatif, il suffit de le multiplier par -1 et se ramener aux critères qui suivent.

En fait, le problème est seulement si le terme général n'est jamais de signe constant !



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Définition 6 – Séries de Riemann :

On appelle **série de Riemann** de paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Définition 6 – Séries de Riemann :

On appelle **série de Riemann** de paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Proposition 13 :

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Le **théorème (12)** permet d'élargir notre champ d'étude à des séries dont le terme général n'est pas nécessairement positif.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Le **théorème (12)** permet d'élargir notre champ d'étude à des séries dont le terme général n'est pas nécessairement positif.

Définition 7 – Série absolument convergente :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.

On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ **converge absolument** si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Le **théorème (12)** permet d'élargir notre champ d'étude à des séries dont le terme général n'est pas nécessairement positif.

Définition 7 – Série absolument convergente :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.

On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ **converge absolument** si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge.

Théorème 14 – La convergence absolue entraîne la convergence :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente alors elle converge, et on a :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Théorème 15 – Critère de comparaison par négligeabilité :

$$\boxed{\text{T1}} \cdot \left. \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est convergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est convergente.}$$



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Théorème 15 – Critère de comparaison par négligeabilité :

$$\begin{array}{l} \boxed{\text{T1}} \cdot \left. \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est convergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est convergente.} \\ \\ \boxed{\text{T2}} \cdot \left. \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est divergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est divergente.} \end{array}$$



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Théorème 16 – Critère de comparaison par équivalence :

$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ et } \sum_{n \geq 0} v_n \text{ ont même nature.}$$



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Théorème 16 – Critère de comparaison par équivalence :

$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ et } \sum_{n \geq 0} v_n \text{ ont même nature.}$$

Remarque : Bien sûr, les critères sont encore valables si les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne sont à termes positifs qu'à partir d'un certain rang.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Méthode 2 :

- M1** • Si l'énoncé ne demande que la nature de $\sum u_n$:



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Méthode 2 :

- M1** • Si l'énoncé ne demande que la nature de $\sum u_n$:
- (1). Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 , alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Méthode 2 :

- M1** • Si l'énoncé ne demande que la nature de $\sum u_n$:
- (1). Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 , alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
 - (2). On regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Méthode 2 :

- M1** • Si l'énoncé ne demande que la nature de $\sum u_n$:
- (1). Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 , alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
 - (2). On regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles.
 - (3). Sinon :



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Méthode 2 :

- M1** • Si l'énoncé ne demande que la nature de $\sum u_n$:
- (1). Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 , alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
 - (2). On regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles.
 - (3). Sinon :
 - Si $\sum u_n$ est à terme général positif : on peut utiliser un des trois critères ci-dessus (en comparant avec le terme général d'une série de Riemann par exemple).



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Méthode 2 :

- M1** • Si l'énoncé ne demande que la nature de $\sum u_n$:
- (1). Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 , alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
 - (2). On regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles.
 - (3). Sinon :
 - Si $\sum u_n$ est à terme général positif : on peut utiliser un des trois critères ci-dessus (en comparant avec le terme général d'une série de Riemann par exemple).
 - si $\sum u_n$ est à terme général négatif : on utilise le fait que $-\sum u_n = \sum -u_n$ et que les séries $-\sum u_n$ et $\sum u_n$ ont même nature, puis on se ramène au cas précédent.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Méthode 2 :

M1 • Si l'énoncé ne demande que la nature de $\sum u_n$:

- (1). Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 , alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
- (2). On regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles.
- (3). Sinon :
 - Si $\sum u_n$ est à terme général positif : on peut utiliser un des trois critères ci-dessus (en comparant avec le terme général d'une série de Riemann par exemple).
 - si $\sum u_n$ est à terme général négatif : on utilise le fait que $-\sum u_n = \sum -u_n$ et que les séries $-\sum u_n$ et $\sum u_n$ ont même nature, puis on se ramène au cas précédent.
 - Si le terme général de $\sum u_n$ n'est pas de signe constant (alterné) :



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Méthode 2 :

- M1** • Si l'énoncé ne demande que la nature de $\sum u_n$:
- (1). Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 , alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
 - (2). On regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles.
 - (3). Sinon :
 - Si $\sum u_n$ est à terme général positif : on peut utiliser un des trois critères ci-dessus (en comparant avec le terme général d'une série de Riemann par exemple).
 - si $\sum u_n$ est à terme général négatif : on utilise le fait que $-\sum u_n = \sum -u_n$ et que les séries $-\sum u_n$ et $\sum u_n$ ont même nature, puis on se ramène au cas précédent.
 - Si le terme général de $\sum u_n$ n'est pas de signe constant (alterné) :
 - Étudier la convergence absolue : si $\sum |u_n|$ converge alors $\sum u_n$ converge.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Méthode 2 :

- M1** • Si l'énoncé ne demande que la nature de $\sum u_n$:
- (1). Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 , alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
 - (2). On regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles.
 - (3). Sinon :
 - Si $\sum u_n$ est à terme général positif : on peut utiliser un des trois critères ci-dessus (en comparant avec le terme général d'une série de Riemann par exemple).
 - si $\sum u_n$ est à terme général négatif : on utilise le fait que $-\sum u_n = \sum -u_n$ et que les séries $-\sum u_n$ et $\sum u_n$ ont même nature, puis on se ramène au cas précédent.
 - Si le terme général de $\sum u_n$ n'est pas de signe constant (alterné) :
 - Étudier la convergence absolue : si $\sum |u_n|$ converge alors $\sum u_n$ converge.
 - Revenir à la suite des sommes partielles.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Méthode 2 :

- M1** • Si l'énoncé ne demande que la nature de $\sum u_n$:
- (1). Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 , alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
 - (2). On regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles.
 - (3). Sinon :
 - Si $\sum u_n$ est à terme général positif : on peut utiliser un des trois critères ci-dessus (en comparant avec le terme général d'une série de Riemann par exemple).
 - si $\sum u_n$ est à terme général négatif : on utilise le fait que $-\sum u_n = \sum -u_n$ et que les séries $-\sum u_n$ et $\sum u_n$ ont même nature, puis on se ramène au cas précédent.
 - Si le terme général de $\sum u_n$ n'est pas de signe constant (alterné) :
 - Étudier la convergence absolue : si $\sum |u_n|$ converge alors $\sum u_n$ converge.
 - Revenir à la suite des sommes partielles.
 - Utiliser le résultat : la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente si, et seulement si, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Méthode 2 :

- M2** • Si l'énoncé demande de justifier la convergence et de calculer la somme d'une série :



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Méthode 2 :

- M2** • Si l'énoncé demande de justifier la convergence et de calculer la somme d'une série :
- (1). On regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Méthode 2 :

- M2** • Si l'énoncé demande de justifier la convergence et de calculer la somme d'une série :
- (1). On regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles.
 - (2). On regarde si l'on peut mettre en place un télescopage.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Méthode 2 :

M2 • Si l'énoncé demande de justifier la convergence et de calculer la somme d'une série :

- (1). On regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles.
- (2). On regarde si l'on peut mettre en place un télescopage.

Dans tous les cas, on regarde si l'énoncé fournit des pistes en mettant par exemple en place une comparaison série/intégrale.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Exemples 17 :

Déterminons la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^3}$.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Exemples 17 :

Déterminons la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^3}$.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^3}$ est absolument convergente donc convergente.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Exemples 18 :

Déterminons la nature de $\sum_{n \geq 0} \frac{2n+7}{n^3+5n^2+3}$.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Exemples 18 :

Déterminons la nature de $\sum_{n \geq 0} \frac{2n+7}{n^3+5n^2+3}$.

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{2n+7}{n^3+5n^2+3}$ est convergente.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Exemples 19 :

Déterminons la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$.



III. Séries numériques

2. Séries à terme positif

Exemples 19 :

Déterminons la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$ est convergente.

