

Compléments sur les suites et séries réelles

LORSQUE l'on parle de comportement asymptotique d'une suite, la première idée à avoir est l'étude de l'existence et, le cas échéant, la recherche de la limite de cette suite. Il s'agit en effet du premier élément à étudier. Mais ce qui nous intéresse ensuite, c'est la vitesse à laquelle la suite tend vers cette limite. Autant il semble relativement simple de répondre à cette question dans le cas des suites dont on connaît le terme général ; autant cela sera nettement plus délicat pour les suites récurrentes ou les suites implicites.

L'IDÉAL quand on souhaite étudier précisément une suite est d'en obtenir un développement asymptotique : en gros, une somme de suites simples ayant des comportements de plus en plus précis, dont la suite étudiée serait très proche. Cette notion n'est pas au programme, même si nous pourrions rencontrer des recherches de tels développements en exercices. Nous nous limiterons donc bien souvent au premier terme de ce développement asymptotique : un équivalent de la suite.

L'OBJECTIF de ce chapitre est d'affiner l'étude du comportement asymptotique des suites en voyant deux notions qui seront essentiellement illustrées sur des suites dont le terme général est connu, puis d'en voir une application dans l'étude des séries. Dans les cas où le terme général de la suite étudiée n'est pas connu, l'exercice guidera.

Plan du chapitre

I RELATIONS DE COMPARAISON	3
I.1 NÉGLIGEABILITÉ DE SUITES	3
I.2 ÉQUIVALENCE DE SUITES	5
II SÉRIES NUMÉRIQUES	10
II.1 PREMIERS EXEMPLES ET RAPPELS DE PREMIÈRE ANNÉE	10
II.2 SÉRIES À TERME POSITIF	15

POUR BIEN DÉMARRER

1. Quelles méthodes peut-on mettre en œuvre pour étudier les variations d'une suite ?

2. Définition quantifiée de suite convergente, de suite divergente vers $+\infty$.

— Suite *convergente* :

— Suite *divergente* vers $+\infty$:

3. Définition de suites adjacentes. Conséquence ?

4. Définition de convergence d'une série. Condition nécessaire de convergence, est-elle suffisante ? Convergence absolue, lien avec la convergence.

5. Séries usuelles.

I. RELATIONS DE COMPARAISON

I.1 – Négligeabilité de suites

Définition 1 – Négligeabilité :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *négligeable* devant la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

Notations (de Landau) : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

- On note $\underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ l'ensemble des suites négligeables devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$.
 - Par abus, on écrira $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ ou $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ au lieu de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$.
- On lira « u_n est un petit o de v_n quand n tend vers $+\infty$ ».

Exemples 1 :

$$1. n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^2), n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^3), \dots,$$

$$2. \frac{1}{n^2} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$3. \text{ Comme } \frac{2}{3} \in]-1; 1[, 2^n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(3^n).$$

$$4. \text{ Par croissances comparées : } \left(\frac{1}{2}\right)^n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$\forall p \leq q, n^p = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^q)$$

$$\forall p \leq q, \frac{1}{n^q} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

Interprétons cette nouvelle notion dans trois cas classiques...

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$:

Dans ce cas, $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ si, et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend moins vite vers $+\infty$ que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$:

Dans ce cas, $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ si, et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend plus vite vers 0 que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1)$ si, et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Proposition 1 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites de réels telles qu'à partir d'un certain rang les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annulent pas.

$$\boxed{\text{P1}} \cdot \left. \begin{array}{l} u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \end{array} \right\} \Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u_n + \mu u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$$

$$\boxed{\text{P2}} \cdot \left. \begin{array}{l} u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n) \quad (\text{transitivité})$$

$$\boxed{\text{P3}} \cdot u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \Rightarrow u_n w_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n w_n)$$

$$\boxed{\text{P4}} \cdot \left. \begin{array}{l} u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v'_n) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n v'_n)$$

$$\boxed{\text{P5}} \cdot u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(\lambda v_n)$$

$$\boxed{\text{P6}} \cdot \text{Si } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ne s'annule pas à partir d'un certain rang :}$$

$$u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \Rightarrow \frac{1}{v_n} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{u_n}\right)$$

De façon générale, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsqu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0 \text{ et } \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n = \varepsilon_n v_n.$$

Remarque : Dans l'écriture « $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ », le n est muet.

Un peu d'histoire : Edmund Landau (1877-1938, allemand) a concentré son travail sur la théorie des nombres ; il a, entre autres, fourni une démonstration du théorème des nombres premiers plus simple que celles alors connues. Il a également popularisé les notations o et $\sim$ vues dans ce chapitre.

Exemples 2 :

$$\text{— On a } n^2 = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3), n = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3) \text{ et } 1 = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3).$$

$$\text{D'où, } n^2 + 2n + 1 = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3).$$

$$\text{— } n^4 + n^2 + 2n + 1 = n^4 + o_{n \rightarrow +\infty}(n^3).$$

ATTENTION

On rappelle que « $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ » est un abus de notation. Ce n'est pas une égalité comme on la connaît.

En particulier :

$$\left. \begin{array}{l} u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \end{array} \right\} \not\Rightarrow u_n = u'_n.$$

$$n^2 = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3) \text{ et } n = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3) \text{ mais } n^2 \neq n \text{ dès que } n \geq 2.$$

On peut réécrire les croissances comparées avec la notation ci-dessus :

Proposition 2 – Croissances comparées :

- P1** • $\forall p, q \in \mathbb{N}$ si $p < q$ alors $n^p = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^q)$.
- P2** • $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ si $a < b$ alors $a^n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(b^n)$.
- P3** • $\forall p \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(n)^p = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^q)$.
- P4** • $\forall p \in \mathbb{R}, \forall q \in]1; +\infty[, n^p = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(q^n)$.
- P5** • $\forall q \in \mathbb{R}, q^n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n!)$.
- P6** • $n! = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^n)$.

On les retient parfois ainsi :

Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$(\ln(n))^\alpha \underset{0 \leq \alpha < \alpha'}{\ll} (\ln(n))^{\alpha'} \ll n^\beta \underset{0 < \beta < \beta'}{\ll} n^{\beta'} \ll a^n \underset{1 < a < b}{\ll} b^n \ll n! \ll n^n.$$

Vocabulaire : Le symbole « $\ll$ » se lisant alors « est négligeable devant ».

Exemples 3 :

- Par croissances comparées, on a $\ln(n) = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(\sqrt{n})$, donc $\frac{\ln(n)}{n} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
- Par croissances comparées, on a $\ln(n) = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(\sqrt{n})$ et $e^{-n} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $\frac{\ln(n)}{e^n} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Parfois, on écrira $u_n = v_n + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ qui se lit « u_n égale v_n + un petit o de v_n ». Cette écriture est équivalente à dire qu'il existe une suite (h_n) , négligeable devant (v_n) , telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + h_n$.

I.2 – Équivalence de suites**Définition 2 – Équivalence de suites :**

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *équivalente* à la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Dans ce cas, on écrira : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

De façon générale, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsqu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1 \quad \text{et } \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n = \alpha_n v_n.$$

ATTENTION

Si un jour on arrive à écrire $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0$, on peut directement arrêter la prépa !

Pourquoi ?

- D'une part, pour la définition que nous avons adoptée, l'écriture $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0$ n'est pas permise.
- D'autre part, les seules suites équivalentes à la suite nulle sont les suites nulles à partir d'un certain rang.

Exemples 4 :

- $n^2 + 2n + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2$.
- $\sqrt{2n^2 - 5n + 2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2}n$.
- Par croissances comparées, $e^n + n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^n$.

Trouver une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ équivalente à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ c'est trouver une suite qui a le même comportement que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$.

Le but étant de trouver une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont l'expression est plus simple que celle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$...

Exemple 5 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \leq u_n \leq 2n$.

Donnons un équivalent de $\ln(u_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Proposition 3 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}, (u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

P1 • $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$. (réflexivité)

P2 • $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$. (symétrie)

P3 • $\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n \end{array} \right\} \implies u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$. (transitivité)

P4 • $\forall \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

P5 • $\forall \ell \in \mathbb{R}^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \implies u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$.

P6 • $\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v'_n \end{array} \right\} \implies u_n u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n v'_n$ (compatibilité avec le produit)

En particulier, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \implies \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \lambda u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda v_n$.

P7 • $\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v'_n \end{array} \right\} \implies \frac{u_n}{u'_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{v_n}{v'_n}$. (compatibilité avec le quotient)

En particulier, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \implies \frac{1}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$

P8 • $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \implies \forall m \in \mathbb{N}, u_n^m \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^m$. (compatibilité avec la puissance)

P9 • $\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont strictement} \\ \text{positives à partir d'un certain rang} \end{array} \right\} \implies \forall \alpha \in \mathbb{R}, u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^\alpha$.

P10 • $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \implies |u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |v_n|$ (compatibilité avec la valeur absolue)

P11 • Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors, à partir d'un certain rang, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont même signe.

P12 • Trois choses souvent utiles (liens entre $\sim$ et o)

(1). $\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n) \end{array} \right\} \implies u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$

(2). $\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \end{array} \right\} \implies u_n + u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$

(3). $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff u_n = v_n + o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \iff u_n = v_n + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n) \\ = v_n \left(1 + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \right).$

Vocabulaire : Une relation entre deux objets d'un même ensemble qui est réflexive, symétrique et transitive est une relation d'équivalence.

C'est le cas de $\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}$ sur l'ensemble des suites réelles mais également de $\iff$ sur l'ensemble des assertions mathématiques.

Attention
L'exposant de la puissance
ne doit pas dépendre de la
variable !

Remarque : Si on utilise **P11**, on voit qu'une seule des deux hypothèses de stricte positivité suffit en pratique...

Exemple 6 :

Donnons un équivalent simple de $\frac{(n^2 + 1)^4 + n + 7}{2n(n^3 + 5)}$ en $+\infty$.

Exemple 7 :

Donnons un équivalent simple de $n^3 2^n + n 3^n$ en $+\infty$.

Exemple 8 :

Les suites $(\ln(n + 1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont-elles équivalentes en $+\infty$?

Exemple 9 – Il est interdit de composer à gauche par une fonction :

Les suites $(\exp(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\exp(n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont-elles équivalentes en $+\infty$?

Théorème 4 – Équivalents usuels :

- T1** • Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \dots, a_k$ des réels et $b_0, b_1, \dots, b_k$ des réels tels que $b_0 < b_1 < \dots < b_k$.

$$\text{Si } a_k \neq 0, \text{ alors } a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \dots + a_k n^{b_k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_k n^{b_k}.$$

- T2** • Si, à partir d'un certain rang $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ alors

$$(1). \ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$$

$$(2). e^{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$$

$$(3). \forall a \in \mathbb{R}^*, (1 + u_n)^a - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a u_n$$

Autrement dit, une expression polynomiale est équivalente en $+\infty$ à son terme non nul de plus haut degré.

Exemple 10 :

Déterminons la limite de la suite de terme général $\frac{7n^6 - 3n^5 + n^3 - n^2 + 3}{3n^6 + 7n^2 + 1}$.

Exemple 11 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

II. SÉRIES NUMÉRIQUES

II.1 – Premiers exemples et rappels de première année

Définition 3 – Suites des sommes partielles :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

D1 • On appelle *série de terme général* u_n , notée $\sum_{n \geq 0} u_n$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ ou $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Vocabulaire : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

- u_n s'appelle le *terme général* de rang n .
- S_n s'appelle la *somme partielle* de rang n .

D2 • On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Vocabulaire : Dans ce cas,

— la limite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et appelée *somme de la série* :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

— On appelle *reste de rang n* l'élément R_n défini par :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

D3 • Lorsque la série ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*.

Vocabulaire : Déterminer la nature d'une série revient à se poser la question de sa convergence.

En particulier, deux séries sont dites *de même nature* si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

⚠ Attention

R_n n'existe que si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge !

⚠ Attention

Deux séries peuvent être de même nature sans avoir la même somme.

Remarques :

- Ne pas confondre suite et série : $\sum u_n$ est une série. C'est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles des $n + 1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- On s'intéresse essentiellement à la nature de la série et non de la suite, notions qui n'ont souvent rien à voir.
- La notation $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ ne présume en rien de la convergence de la série et donc de l'existence de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

- Écrire la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ suppose implicitement que la série converge. On prendra donc bien garde à n'utiliser ce symbole que dans ce cas.

- $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la somme de la série. C'est un nombre réel ^[1].

- Dans le cas de convergence, on peut remarquer que la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S - S_n = 0.$$

Le reste d'ordre n représente l'erreur commise lorsque l'on remplace la somme S par la $n^{\text{ème}}$ somme partielle.

[1]. En conséquence, il ne diverge ou ne converge pas, il n'est équivalent à rien, il ne se dérive pas autrement que pour donner 0, il ne bouge pas, ...

- Les premiers termes d'une suite ne changent pas la nature de la série : $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Enfin, remarquez que $S_0 = u_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$.

Le terme général définit la série et la réciproque est vraie : si l'on connaît la série, on peut donc retrouver son terme général.

Par exemple, si on sait que, $\forall n \in \mathbb{N}$, la somme partielle S_n est définie par $S_n = 1 - \frac{1}{n+2}$, alors $S_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Exemple 12 – La série harmonique :

La série harmonique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge. ^[2]

Définition 4 – Série géométrique :

On appelle *série géométrique* de raison $q \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} q^n$.

Proposition 5 :

La série $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{et} \quad R_p = \sum_{k=p+1}^{+\infty} q^k = \frac{q^{p+1}}{1-q}.$$

[2]. Son nom *harmonique* vient du fait qu'un terme est la moyenne harmonique des termes qui l'encadrent. Rappelons que la moyenne harmonique m_h de deux réels positifs a et b est définie par $\frac{2}{m_h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Ici, on a bien $2 \left(\frac{1}{n}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{n-1}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{-1}$.

Proposition 6 – Séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2 :

P1 • La série $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

P2 • La série $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Remarque : La dérivation d'une série n'est pas permise au programme cependant elle constitue un bon moyen mnémotechnique pour retenir les résultats :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (q^k)' = \left(\frac{1}{1-q} \right)' = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} (q^k)'' = \left(\frac{1}{1-q} \right)'' = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Définition 5 – Série exponentielle :

Pour tout réel x , on appelle série exponentielle de x la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.

Proposition 7 :

Pour tout réel x , la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Exercice I.1

Après avoir démontré son existence, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Proposition 8 – Série télescopique :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

On peut donc étudier une suite en se servant des techniques spécifiques de la théorie des séries, ou au contraire étudier une série au moyen des techniques spécifiques de la théorie des suites.

Exemple 13 :

Montrons que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Proposition 9 – Combinaison linéaire de séries convergentes :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors, la série $\sum (\lambda u_n + v_n)$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Corollaire 10 – Structure de l'ensemble des suites convergentes :

L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel.

Pour le produit, c'est un peu plus compliqué et demande une notion de convergence un peu plus forte...

ATTENTION

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, il est possible que $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge ... L'ensemble des séries divergentes n'est pas stable par combinaisons linéaires.

Pire pour vous, même si $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, il est possible que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent.

Il est donc INTERDIT de découper une somme de série en deux comme écrire $\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ sans avoir vérifié que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ étaient convergentes.

Retenez pour cela l'exemple (13) : La série $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ converge au contraire des deux séries harmoniques $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$.

Une première conséquence des théorèmes généraux, condition nécessaire de convergence qui sera le plus souvent un critère de divergence :

Proposition 11 – Condition nécessaire de convergence :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

À retenir

Le terme général d'une série convergente doit tendre vers 0.

Par la contraposée, si le terme général ne tend pas vers 0, pas alors la série diverge. On dit dans ce cas que la série *diverge grossièrement*.

Exemples 14 :

- Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{n+1}$ diverge.
- De même, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement) si $\alpha \leq 0$.
- Enfin, comme $(-1)^n$ n'a pas de limite, la série $\sum (-1)^n$ diverge de même que les séries du type $\sum \sin(n)$.

ATTENTION

La réciproque est fausse comme le montre la divergence de la série harmonique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ ou de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$.

II.2 – Séries à terme positif

Le **théorème (15)** donnera une place toute particulière aux séries à terme positif par la condition suffisante de convergence :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \text{ converge} \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge.}$$

Dans tout ce paragraphe, on considèrera des séries numériques réelles à terme positif (au moins à partir d'un certain rang) *a fortiori* réel.

Si les séries sont à terme négatif, en travaillant sur la série des opposés et en utilisant la linéarité de la somme, on obtient les mêmes résultats. Les théorèmes de ce paragraphe s'appliquent donc à toutes les séries à *terme de signe constant*.

1 — Condition nécessaire et suffisante de convergence

Dans le cas des séries à terme positif, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante. Montrer la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est donc équivalent à trouver un majorant.

Théorème 12 :

T1 • Une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ à terme positif converge si, et seulement si la suite $\left(S_n = \sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles est majorée :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge} \iff \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k \leq M.$$

T2 • Le seul cas de divergence est la limite infinie.

Exemple 15 :

La série harmonique $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n}$ à terme positif diverge donc vers $+\infty$.

Exemple 16 :

$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge.

2 — Application des relations de comparaison à l'étude des séries

Voyons trois critères pour étudier la nature de séries à **terme général positif**.

Théorème 13 – Critère de comparaison par inégalité :

T1 • $\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est convergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est convergente.}$

T2 • $\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est divergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est divergente.}$

Ces critères sont encore valables si les inégalités ne sont vraies qu'à partir d'un certain rang.

Remarque : Si le terme général est négatif, il suffit de le multiplier par -1 et se ramener aux critères qui suivent.

En fait, le problème est seulement si le terme général n'est jamais de signe constant !

Définition 6 – Séries de Riemann :

On appelle *série de Riemann* de paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Proposition 14 :

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Le **théorème (13)** permet d'élargir notre champ d'étude à des séries dont le terme général n'est pas nécessairement positif.

Définition 7 – Série absolument convergente :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.

On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge.

Théorème 15 – La convergence absolue entraîne la convergence :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente alors elle converge, et on a :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

On déduit aussi du **théorème (13)** les deux suivants :

Théorème 16 – Critère de comparaison par négligeabilité :

$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ \text{T1} \cdot \begin{array}{l} u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est convergente} \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est convergente.}$$

$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ \text{T2} \cdot \begin{array}{l} u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est divergente} \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est divergente.}$$

On utilise souvent le premier point dans le cas où $\sum_{n \geq 1} v_n$ est une série de Riemann convergente.

Attention
Si $\sum |u_n|$ est divergente, alors on ne peut pas conclure sur la nature de $\sum u_n$!

Autrement dit, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs et qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, alors on pourra conclure sur la convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Théorème 17 – Critère de comparaison par équivalence :

$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ et } \sum_{n \geq 0} v_n \text{ ont même nature.}$$

Remarque : Bien sûr, les critères sont encore valables si les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne sont à termes positifs qu'à partir d'un certain rang.

Méthode 1 :

M1 • Si l'énoncé ne demande que la nature de $\sum u_n$:

- (1). Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
- (2). On regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles.
- (3). Sinon :
 - Si $\sum u_n$ est à terme général positif : on peut utiliser un des trois critères ci-dessus (en comparant avec le terme général d'une série de Riemann par exemple).
 - si $\sum u_n$ est à terme général négatif : on utilise le fait que $-\sum u_n = \sum -u_n$ et que les séries $-\sum u_n$ et $\sum u_n$ ont même nature, puis on se ramène au cas précédent.
 - Si le terme général de $\sum u_n$ n'est pas de signe constant (alterné) :
 - Étudier la convergence absolue : si $\sum |u_n|$ converge alors $\sum u_n$ converge.
 - Revenir à la suite des sommes partielles.
 - Utiliser le résultat : la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente si, et seulement si, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

M2 • Si l'énoncé demande de justifier la convergence et de calculer la somme d'une série :

- (1). On regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles.
- (2). On regarde si l'on peut mettre en place un télescope.

Dans tous les cas, on regarde si l'énoncé fournit des pistes en mettant par exemple en place une comparaison série/intégrale.

Exemples 17 :

Déterminons la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^3}$.

Exemples 18 :

Déterminons la nature de $\sum_{n \geq 0} \frac{2n+7}{n^3+5n^2+3}$.

Exemples 19 :

Déterminons la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$.