

Compléments sur les suites et séries réelles

LORSQUE l'on parle de comportement asymptotique d'une suite, la première idée à avoir est l'étude de l'existence et, le cas échéant, la recherche de la limite de cette suite. Il s'agit en effet du premier élément à étudier. Mais ce qui nous intéresse ensuite, c'est la vitesse à laquelle la suite tend vers cette limite. Autant il semble relativement simple de répondre à cette question dans le cas des suites dont on connaît le terme général ; autant cela sera nettement plus délicat pour les suites récurrentes ou les suites implicites.

L'IDÉAL quand on souhaite étudier précisément une suite est d'en obtenir un développement asymptotique : en gros, une somme de suites simples ayant des comportements de plus en plus précis, dont la suite étudiée serait très proche. Cette notion n'est pas au programme, même si nous pourrions rencontrer des recherches de tels développements en exercices. Nous nous limiterons donc bien souvent au premier terme de ce développement asymptotique : un équivalent de la suite.

L'OBJECTIF de ce chapitre est d'affiner l'étude du comportement asymptotique des suites en voyant deux notions qui seront essentiellement illustrées sur des suites dont le terme général est connu, puis d'en voir une application dans l'étude des séries. Dans les cas où le terme général de la suite étudiée n'est pas connu, l'exercice guidera.

Plan du chapitre

I RELATIONS DE COMPARAISON	3
I.1 NÉGLIGEABILITÉ DE SUITES	3
I.2 ÉQUIVALENCE DE SUITES	7
II SÉRIES NUMÉRIQUES	16
II.1 PREMIERS EXEMPLES ET RAPPELS DE PREMIÈRE ANNÉE	16
II.2 SÉRIES À TERME POSITIF	22

POUR BIEN DÉMARRER

- Quelles méthodes peut-on mettre en œuvre pour étudier les variations d'une suite ?
 - Étudier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de $u_{n+1} - u_n$.
 - Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de signe constant et ne s'annule pas, comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
- Définition quantifiée de suite convergente, de suite divergente vers $+\infty$.
 - Suite *convergente* : $\exists \ell \in \mathbb{R} / \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$.
 - Suite *divergente* vers $+\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \geq A)$.
- Définition de suites adjacentes. Conséquence ?
 - Définition : On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont *adjacentes* lorsque :
 - l'une de ces suites est croissante,
 - l'autre est décroissante,
 - $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.
 - Propriété : Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors elles convergent et ont la même limite.
- Définition de convergence d'une série. Condition nécessaire de convergence, est-elle suffisante ? Convergence absolue, lien avec la convergence.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. On définit la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

- Définition : On dit que la série de terme général u_n est *convergente* lorsque la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- Condition nécessaire : Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
 Cette condition n'est pas suffisante, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et pourtant $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.
- Définition : On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est *absolument convergente* lorsque $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est convergente.
- Propriété : Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est *absolument convergente*, alors elle est convergente (la réciproque est fausse ...).

5. Séries usuelles.

- Les séries $\sum_{n \geq 0} q^n$, $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ sont convergentes si, et seulement si, $q \in]-1; 1[$ et en cas de convergence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

- La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.

I. RELATIONS DE COMPARAISON

I.1 – Négligeabilité de suites

Définition 1 – Négligeabilité :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *négligeable* devant la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

Notations (de Landau) : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

— On note $\underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ l'ensemble des suites négligeables devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$.

— Par abus, on écrira $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ ou $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ au lieu de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$.

On lira « u_n est un petit o de v_n quand n tend vers $+\infty$ ».

Exemples 1 :

$$1. n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^2), n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^3), \dots,$$

$$\forall p \leq q, n^p = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^q)$$

$$2. \frac{1}{n^2} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\forall p \leq q, \frac{1}{n^p} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

$$3. \text{ Comme } \frac{2}{3} \in]-1; 1[, 2^n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(3^n).$$

$$4. \text{ Par croissances comparées : } \left(\frac{1}{2}\right)^n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Interprétons cette nouvelle notion dans trois cas classiques...

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$:

Dans ce cas, $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ si, et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend moins vite vers $+\infty$ que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$:

Dans ce cas, $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ si, et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend plus vite vers 0 que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1)$ si, et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Proposition 1 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites de réels telles qu'à partir d'un certain rang les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annulent pas.

$$\boxed{\text{P1}} \cdot \left. \begin{array}{l} u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \\ u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \end{array} \right\} \Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u_n + \mu u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$$

$$\boxed{\text{P2}} \bullet \left. \begin{array}{l} u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \\ v_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(w_n) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(w_n) \quad (\text{transitivité})$$

$$\boxed{\text{P3}} \bullet u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \Rightarrow u_n w_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n w_n)$$

$$\boxed{\text{P4}} \bullet \left. \begin{array}{l} u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \\ u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v'_n) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n v'_n)$$

$$\boxed{\text{P5}} \bullet u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(\lambda v_n)$$

$$\boxed{\text{P6}} \bullet \text{ Si } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ne s'annule pas à partir d'un certain rang :}$$

$$u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \Rightarrow \frac{1}{v_n} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{u_n}\right)$$

De façon générale, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsqu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0 \text{ et } \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n = \varepsilon_n v_n.$$

Remarque : Dans l'écriture « $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ », le n est muet.

Un peu d'histoire : Edmund Landau (1877-1938, allemand) a concentré son travail sur la théorie des nombres ; il a, entre autres, fourni une démonstration du théorème des nombres premiers plus simple que celles alors connues. Il a également popularisé les notations o et $\sim$ vues dans ce chapitre.

 **Preuve :**

$$\boxed{\text{P1}} \bullet \text{ Supposons } \left\{ \begin{array}{l} u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \\ u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \end{array} \right. \text{ et soient } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et

$$\frac{\lambda u_n + \mu u'_n}{v_n} = \lambda \frac{u_n}{v_n} + \mu \frac{u'_n}{v_n}.$$

Or, $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et $u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u'_n}{v_n} = 0$.

D'où, par opérations :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda u_n + \mu u'_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda \frac{u_n}{v_n} + \mu \frac{u'_n}{v_n} = 0.$$

Autrement dit, $\lambda u_n + \mu u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$.

$$\boxed{\text{P2}} \bullet \text{ Supposons } \left\{ \begin{array}{l} u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \\ v_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(w_n) \end{array} \right. .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $w_n \neq 0$ puis

$$\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n}.$$

Or, $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et $v_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(w_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{w_n} = 0$. D'où, par opérations :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{w_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} \frac{v_n}{w_n} = 0.$$

Autrement dit, $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(w_n)$.

P3 • Supposons $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $w_n \neq 0$ puis

$$\frac{u_n w_n}{v_n w_n} = \frac{u_n}{v_n}.$$

Or, $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n w_n}{v_n w_n} = 0$, autrement dit, $u_n w_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n w_n)$.

P4 • Supposons $\begin{cases} u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \\ u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v'_n) \end{cases}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $v'_n \neq 0$ puis

$$\frac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{u'_n}{v'_n}.$$

Or, $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et $u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v'_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u'_n}{v'_n} = 0$.

D'où, par opérations :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} \times \frac{u'_n}{v'_n} = 0.$$

Autrement dit, $u_n u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n v'_n)$.

P5 • Supposons $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et

$$\frac{u_n}{\lambda v_n} = \frac{1}{\lambda} \times \frac{u_n}{v_n}.$$

Or, $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

D'où, par opérations :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\lambda v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \times \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Autrement dit, $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(\lambda v_n)$.

P6 • Supposons qu'à partir d'un certain rang, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas et que $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $u_n \neq 0$ puis

$$\frac{\frac{1}{v_n}}{\frac{1}{u_n}} = \frac{u_n}{v_n}.$$

Or, $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{v_n}}{\frac{1}{u_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, autrement dit, $\frac{1}{v_n} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{u_n}\right)$.



Exemples 2 :

— On a $n^2 = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$, $n = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$ et $1 = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$.

D'où, $n^2 + 2n + 1 = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$.

— $n^4 + n^2 + 2n + 1 = n^4 + o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$.

ATTENTION

On rappelle que « $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ » est un abus de notation. Ce n'est pas une égalité comme on la connaît.

En particulier :

$$\left. \begin{array}{l} u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \end{array} \right\} \not\Rightarrow u_n = u'_n.$$

$n^2 = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$ et $n = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$ mais $n^2 \neq n$ dès que $n \geq 2$.

On peut réécrire les croissances comparées avec la notation ci-dessus :

Proposition 2 – Croissances comparées :

P1 • $\forall p, q \in \mathbb{N}$ si $p < q$ alors $n^p = o_{n \rightarrow +\infty}(n^q)$.

P2 • $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ si $a < b$ alors $a^n = o_{n \rightarrow +\infty}(b^n)$.

P3 • $\forall p \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(n)^p = o_{n \rightarrow +\infty}(n^q)$.

P4 • $\forall p \in \mathbb{R}, \forall q \in]1; +\infty[, n^p = o_{n \rightarrow +\infty}(q^n)$.

P5 • $\forall q \in \mathbb{R}, q^n = o_{n \rightarrow +\infty}(n!)$.

P6 • $n! = o_{n \rightarrow +\infty}(n^n)$.

 **Preuve :** Non exigible.

Il suffit simplement de réécrire les limites des quotients sous la forme d'un $o()$. 

On les retient parfois ainsi :

Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$(\ln(n))^\alpha \ll_{0 \leq \alpha < \alpha'} (\ln(n))^{\alpha'} \ll_{0 < \beta < \beta'} n^\beta \ll_{0 < \beta < \beta'} n^{\beta'} \ll_{1 < a < b} a^n \ll_{1 < a < b} b^n \ll n! \ll n^n.$$

Vocabulaire : Le symbole « $\ll$ » se lisant alors « est négligeable devant ».

Exemples 3 :

— Par croissances comparées, on a $\ln(n) = o_{n \rightarrow +\infty}(\sqrt{n})$, donc $\frac{\ln(n)}{n} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

— Par croissances comparées, on a $\ln(n) = o_{n \rightarrow +\infty}(\sqrt{n})$ et $e^{-n} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$, donc

$$\frac{\ln(n)}{e^n} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Parfois, on écrira $u_n = v_n + o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ qui se lit « u_n égale v_n + un petit o de v_n ». Cette écriture est équivalente à dire qu'il existe une suite (h_n) , négligeable devant (v_n) , telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + h_n$.

I.2 – Équivalence de suites

Définition 2 – Équivalence de suites :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *équivalente* à la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Dans ce cas, on écrira : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

De façon générale, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsqu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1 \quad \text{et} \quad \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n = \alpha_n v_n.$$

ATTENTION

Si un jour on arrive à écrire $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0$, on peut directement arrêter la prépa !

Pourquoi ?

- D'une part, pour la définition que nous avons adoptée, l'écriture $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0$ n'est pas permise.
- D'autre part, les seules suites équivalentes à la suite nulle sont les suites nulles à partir d'un certain rang.

Exemples 4 :

- $n^2 + 2n + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2$.
- $\sqrt{2n^2 - 5n + 2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2}n$.
- Par croissances comparées, $e^n + n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^n$.

Trouver une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ équivalente à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ c'est trouver une suite qui a le même comportement que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$.

Le but étant de trouver une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont l'expression est plus simple que celle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$...

Exemple 5 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \leq u_n \leq 2n$.

Donnons un équivalent de $\ln(u_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < n \leq u_n \leq 2n.$$

D'où, par croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{+*}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n) \leq \ln(u_n) \leq \ln(2) + \ln(n).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, suffisamment proche de $+\infty$, $\ln(n) > 0$ donc :

$$1 \leq \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)}.$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)} = 1.$$

Donc, d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} = 1.$$

Autrement dit :

$$\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

Proposition 3 :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}, (u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

$$\text{P1} \bullet u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n. \quad (\text{réflexivité})$$

$$\text{P2} \bullet u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n. \quad (\text{symétrie})$$

$$\text{P3} \bullet \left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n \end{array} \right\} \implies u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n. \quad (\text{transitivité})$$

$$\text{P4} \bullet \forall \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

$$\text{P5} \bullet \forall \ell \in \mathbb{R}^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \implies u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell.$$

$$\text{P6} \bullet \left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v'_n \end{array} \right\} \implies u_n u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n v'_n \quad (\text{compatibilité avec le produit})$$

$$\text{En particulier, } u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \implies \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \lambda u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda v_n.$$

$$\text{P7} \bullet \left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v'_n \end{array} \right\} \implies \frac{u_n}{u'_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{v_n}{v'_n}. \quad (\text{compatibilité avec le quotient})$$

$$\text{En particulier, } u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \implies \frac{1}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$$

⚠ Attention

L'exposant de la puissance ne doit pas dépendre de la variable !

P8 • $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \implies \forall m \in \mathbb{N}, u_n^m \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^m$. (compatibilité avec la puissance)

P9 • $\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont strictement} \\ \text{positives à partir d'un certain rang} \end{array} \right\} \implies \forall \alpha \in \mathbb{R}, u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^\alpha$.

P10 • $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \implies |u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |v_n|$ (compatibilité avec la valeur absolue)

P11 • Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors, à partir d'un certain rang, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont même signe.

P12 • Trois choses souvent utiles (liens entre $\sim$ et o)

$$(1). \left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ v_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(w_n) \end{array} \right\} \implies u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(w_n)$$

$$(2). \left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \end{array} \right\} \implies u_n + u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$$

$$(3). u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff u_n = v_n + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \iff u_n = v_n + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(u_n) \\ = v_n \left(1 + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1) \right).$$

Vocabulaire : Une relation entre deux objets d'un même ensemble qui est réflexive, symétrique et transitive est une relation d'équivalence.

C'est le cas de $\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}$ sur l'ensemble des suites réelles mais également de $\iff$ sur l'ensemble des assertions mathématiques.

Remarque : Si on utilise **P11**, on voit qu'une seule des deux hypothèses de stricte positivité suffit en pratique...

🔗 Preuve :

P1 • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $u_n \neq 0$ et $\frac{u_n}{u_n} = 1$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_n} = 1$, autrement dit $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.

P2 • Procédons par double implication.

$\implies$: Supposons $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ puis $\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{v_n}}$.

Or, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{u_n}{v_n}} = 1$, autrement dit $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.

$\impliedby$: De même, en échangeant u_n et v_n .

P3 • Supposons $\left\{ \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n \end{array} \right.$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $w_n \neq 0$ puis $\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n}$.

Or, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (w_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{w_n} = 1$.

Par opérations $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{w_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} \frac{v_n}{w_n} = 1$.

Autrement dit, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (w_n)$.

P4 • Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Supposons $\begin{cases} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \end{cases}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $u_n = \frac{u_n}{v_n} \times v_n$.

Or, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

Par opération, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

P5 • Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$. Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Puisque $\ell \neq 0$, on a, par opération, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ell} = 1$.

Conclusion : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$.

P6 • Supposons $\begin{cases} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v'_n \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $v'_n \neq 0$ puis $\frac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{u'_n}{v'_n}$.

Or, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et $u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v'_n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u'_n}{v'_n} = 1$.

D'où, par opération, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} \times \frac{u'_n}{v'_n} = 1$.

Autrement dit $u_n u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n v'_n$.

P7 • Supposons $\begin{cases} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v'_n \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $u'_n \neq 0$, $v_n \neq 0$ et $v'_n \neq 0$ puis $\frac{\frac{u_n}{u'_n}}{\frac{v_n}{v'_n}} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v'_n}{u'_n}$.

Or, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et $u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v'_n$, donc d'après **P2**, $v'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u'_n$, et ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v'_n}{u'_n} = 1$.

D'où, par opération, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{u_n}{u'_n}}{\frac{v_n}{v'_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v'_n}{u'_n} = 1$.

Autrement dit $\frac{u_n}{u'_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{v_n}{v'_n}$.

P8 • Supposons $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et soit $m \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$, donc $v_n^m \neq 0$ et $\frac{u_n^m}{v_n^m} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^m$.

Or, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

D'où, par opération, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^m}{v_n^m} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right)^m = 1$.

Autrement dit $u_n^m \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^m$.

Remarque : Il s'agit bien d'une opération sur les limites, car m ne dépend pas de n .

P9 • On procède de la même façon mais  Les puissances à exposants non entiers ne sont bien définies que pour des réels strictement positifs ! Ce qui est bien le cas ici.

P10 • Supposons $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $\frac{|u_n|}{|v_n|} = \left| \frac{u_n}{v_n} \right|$.

Or, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, dont $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_n|}{|v_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_n}{v_n} \right| = 1$.

Autrement dit $|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |v_n|$.

P11 •

Rappel :

$(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |w_n - \ell| \leq \varepsilon).$$

Supposons $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$. Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Par conséquent :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N \Rightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \varepsilon \right).$$

En particulier, avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}$, que nous considérons ensuite, tel que :

$$\forall n \geq N, \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}.$$

D'où,

$$\forall n \geq N, \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}.$$

En particulier :

$$\forall n \geq N, \frac{u_n}{v_n} > 0.$$

Par conséquent, à partir d'un certain rang (ici N) u_n et v_n ont même signe.

P12 • (1). Supposons $\begin{cases} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n) \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $w_n \neq 0$ et $\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n}$.

Or, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et $v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{w_n} = 0$.

D'où, par opération, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{w_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n} = 0$.

Autrement dit, $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$.

À retenir
Deux réels non nuls ont même signe si, et seulement si, leur produit (ou quotient) est strictement positif.

(2). Supposons $\begin{cases} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \end{cases}.$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $\frac{u_n + u'_n}{v_n} = \frac{u_n}{v_n} + \frac{u'_n}{v_n}$.

Or, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et $u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u'_n}{v_n} = 0$.

D'où, par opération $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n + u'_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} + \frac{u'_n}{v_n} = 1$.

Autrement dit, $u_n + u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

(3). Par équivalences, on a :

$$\begin{aligned} u_n = v_n + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) &\Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} = 1 + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1) \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \\ &\Leftrightarrow u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_n = v_n + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(u_n) &\Leftrightarrow 1 = \frac{v_n}{u_n} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1) \\ &\Leftrightarrow \frac{v_n}{u_n} = 1 + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1) \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1 \\ &\Leftrightarrow v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n \\ &\Leftrightarrow u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n. \end{aligned}$$



Exemple 6 :

Donnons un équivalent simple de $\frac{(n^2 + 1)^4 + n + 7}{2n(n^3 + 5)}$ en $+\infty$.

On a :

$$\begin{aligned} - n^2 + 1 &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2, \text{ donc } (n^2 + 1)^4 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^8, \\ - n + 7 &= \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^8). \end{aligned}$$

D'où $(n^2 + 1)^4 + n + 7 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^8$.

De la même manière, $2n(n^3 + 5) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n^4$.

Conclusion : $\frac{(n^2 + 1)^4 + n + 7}{2n(n^3 + 5)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^8}{2n^4}$.

Exemple 7 :

Donnons un équivalent simple de $n^3 2^n + n 3^n$ en $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, suffisamment proche de $+\infty$, en particulier non nul, on a :

$$n^3 2^n + n 3^n = n 3^n \left(n^2 \left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right).$$

Or, $\frac{2}{3} \in]-1; 1[$. Donc, par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$.

Par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 = 1.$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 2^n + n 3^n}{n 3^n} = 1$, autrement dit $n^3 2^n + n 3^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n 3^n$.

Exemple 8 :

Les suites $(\ln(n+1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont-elles équivalentes en $+\infty$?

Pour tout $n \geq 2$, on a $\ln(n) \neq 0$ et

$$\begin{aligned} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} &= \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \quad n \neq 0 \\ &= 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \end{aligned}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$.

D'où, par opérations :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1.$$

Autrement dit $\ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exemple 9 – Il est interdit de composer à gauche par une fonction :

Les suites $(\exp(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\exp(n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont-elles équivalentes en $+\infty$?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\exp(n) \neq 0$ et

$$\frac{\exp(n+1)}{\exp(n)} = e.$$

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\exp(n+1)}{\exp(n)} = e \neq 1$ et les suites $(\exp(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\exp(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne sont pas équivalentes en $+\infty$.

Théorème 4 – Équivalents usuels :

T1 • Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \dots, a_k$ des réels et $b_0, b_1, \dots, b_k$ des réels tels que $b_0 < b_1 < \dots < b_k$.

Si $a_k \neq 0$, alors $a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \dots + a_k n^{b_k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_k n^{b_k}$.

T2 • Si, à partir d'un certain rang $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ alors

(1). $\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$

(2). $e^{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$

(3). $\forall a \in \mathbb{R}^*, (1 + u_n)^a - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a u_n$

Autrement dit, une expression polynomiale est équivalente en $+\infty$ à son terme non nul de plus haut degré.

 **Preuve :**

T1 • Supposons $a_k \neq 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \dots + a_k n^{b_k}}{a_k n^{b_k}} = \frac{a_0}{a_k n^{b_k - b_0}} + \frac{a_1}{a_k n^{b_k - b_1}} + \dots + 1.$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket$, $b_k - b_i > 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{b_k - b_i} = +\infty$.

Ainsi, par opérations :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0}{a_k n^{b_k - b_0}} + \frac{a_1}{a_k n^{b_k - b_1}} + \dots + 1 = 1.$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \dots + a_k n^{b_k}}{a_k n^{b_k}} = 1$, autrement dit $a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \dots + a_k n^{b_k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_k n^{b_k}$.

T2 • Supposons qu'à partir d'un certain rang $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Rappel :

$$- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$- \forall a \in \mathbb{R}^*, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$$

Méthode 1 :

Pour retrouver ces limites, les voir comme des limites de taux d'accroissements de fonctions dérivables entre 0 et x .

(1). On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

$$\text{Donc, par composition, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1.$$

$$\text{Conclusion : } \ln(1+u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n.$$

(2). On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

$$\text{Donc, par composition, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{u_n} - 1}{u_n} = 1.$$

$$\text{Conclusion : } e^{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n.$$

(3). Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, $1 + u_n > 0$.

Donc, par composition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1+u_n)^a - 1}{u_n} = a$.

Conclusion : $(1+u_n)^a - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} au_n$.



Exemple 10 :

Déterminons la limite de la suite de terme général $\frac{7n^6 - 3n^5 + n^3 - n^2 + 3}{3n^6 + 7n^2 + 1}$.

On a $\frac{7n^6 - 3n^5 + n^3 - n^2 + 3}{3n^6 + 7n^2 + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{7n^6}{3n^6} = \frac{7}{3}$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^6 - 3n^5 + n^3 - n^2 + 3}{3n^6 + 7n^2 + 1} = \frac{7}{3}$.

Exemple 11 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Distinguons deux cas :

— Si $x = 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{0}{n}\right)^n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1$.

— Si $x \neq 0$:

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{n} = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment proche de $+\infty$, on a $1 + \frac{x}{n} > 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand, on peut écrire :

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right).$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{x}{n} \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = 0$.

Par conséquent, $\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n}$.

Ainsi, $n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x$.

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x.$$

Et donc, par continuité de l'exponentielle en x :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) = \exp(x).$$

Les deux cas se regroupent :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

À retenir

En particulier :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

II. SÉRIES NUMÉRIQUES

II.1 – Premiers exemples et rappels de première année

Définition 3 – Suites des sommes partielles :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

D1 • On appelle *série de terme général* u_n , notée $\sum_{n \geq 0} u_n$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ ou $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Vocabulaire : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

- u_n s'appelle le *terme général* de rang n .
- S_n s'appelle la *somme partielle* de rang n .

D2 • On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Vocabulaire : Dans ce cas,

- la limite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et appelée *somme de la série* :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

- On appelle *reste de rang* n l'élément R_n défini par :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

D3 • Lorsque la série ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*.

Vocabulaire : Déterminer la nature d'une série revient à se poser la question de sa convergence.

En particulier, deux séries sont dites *de même nature* si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Remarques :

- Ne pas confondre suite et série : $\sum u_n$ est une série. C'est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles des $n + 1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- On s'intéresse essentiellement à la nature de la série et non de la suite, notions qui n'ont souvent rien à voir.

⚠ Attention
 R_n n'existe que si série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge !

⚠ Attention
 Deux séries peuvent être de même nature sans avoir la même somme.

— La notation $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ ne présume en rien de la convergence de la série et donc de l'existence de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

— Écrire la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ suppose implicitement que la série converge. On prendra donc bien garde à n'utiliser ce symbole que dans ce cas.

— $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la somme de la série. C'est un nombre réel^[1].

— Dans le cas de convergence, on peut remarquer que la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S - S_n = 0.$$

Le reste d'ordre n représente l'erreur commise lorsque l'on remplace la somme S par la $n^{\text{ème}}$ somme partielle.

— Les premiers termes d'une suite ne changent pas la nature de la série : $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

— Enfin, remarquez que $S_0 = u_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$.

Le terme général définit la série et la réciproque est vraie : si l'on connaît la série, on peut donc retrouver son terme général.

Par exemple, si on sait que, $\forall n \in \mathbb{N}$, la somme partielle S_n est définie par $S_n = 1 - \frac{1}{n+2}$, alors $S_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Exemple 12 – La série harmonique :

La série harmonique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge.^[2]

Les manières de montrer ce résultat sont nombreuses.

On a, par exemple,

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Si la série convergait vers un réel S , on aurait alors, par passage à la limite, $0 = S - S \geq \frac{1}{2}$ ce qui est impossible.

Donc H_n diverge.

Comme la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, d'après le théorème de la limite monotone, on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty.$$

[1]. En conséquence, il ne diverge ou ne converge pas, il n'est équivalent à rien, il ne se dérive pas autrement que pour donner 0, il ne bouge pas, ...

⚠ Attention
Les sommes infinies ne se manipulent pas comme les sommes finies. En général, on calculera d'abord les sommes partielles qui sont finies, et donc manipulable facilement, avant de passer à la limite.

Définition 4 – Série géométrique :

On appelle *série géométrique* de raison $q \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} q^n$.

Proposition 5 :

La série $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{et} \quad R_p = \sum_{k=p+1}^{+\infty} q^k = \frac{q^{p+1}}{1-q}.$$

 **Preuve :** Il suffit de se rappeler la formule de la somme des termes d'une suite géométrique de raison q :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{|q| < 1} \frac{1}{1-q}.$$

De plus, lorsque $|q| < 1$, on a $R_n = \frac{q^{n+1}}{1-q}$.

**Proposition 6 – Séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2 :**

P1 • La série $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

P2 • La série $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Remarque : La dérivation d'une série n'est pas permise au programme cependant elle constitue un bon moyen mnémotechnique pour retenir les résultats :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (q^k)' = \left(\frac{1}{1-q} \right)' = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} (q^k)'' = \left(\frac{1}{1-q} \right)'' = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Définition 5 – Série exponentielle :

Pour tout réel x , on appelle *série exponentielle* de x la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.

[2]. Son nom *harmonique* vient du fait qu'un terme est la moyenne harmonique des termes qui l'encadrent. Rappelons que la moyenne harmonique m_h de deux réels positifs a et b est définie par $\frac{2}{m_h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Ici, on a bien $2 \left(\frac{1}{n} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{n-1} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{n+1} \right)^{-1}$.

Proposition 7 :

Pour tout réel x , la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Preuve : *Résultat admis.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f : t \mapsto \exp(xt)$ est clairement de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est $x \mapsto x^n \exp(xt)$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0; 1]$ s'écrit :

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| = \left| \exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{0 \leq t \leq 1} |x^{n+1} \exp(xt)|.$$

Or, pour $0 \leq t \leq 1$, $|x^{n+1} \exp(xt)| \leq |x^{n+1}| \exp(x)$.

Comme, pour tout x fixé dans $\mathbb{R}$, $x^{n+1} = o_{n \rightarrow +\infty}((n+1)!)$, on en déduit :

$$\left| \exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \exp(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On conclut avec le théorème d'encadrement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x$$

**Exercice I.1**

Après avoir démontré son existence, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Proposition 8 – Série télescopique :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

On peut donc étudier une suite en se servant des techniques spécifiques de la théorie des séries, ou au contraire étudier une série au moyen des techniques spécifiques de la théorie des suites.

Exemple 13 :

Montrons que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

$$\begin{aligned}
 \text{En effet, } S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \right) + \dots - \cancel{\frac{1}{n}} + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.
 \end{aligned}$$

Proposition 9 – Combinaison linéaire de séries convergentes :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors, la série $\sum (\lambda u_n + v_n)$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

 **Preuve :** La somme partielle associée à la série de terme général $\lambda u_n + v_n$ est $S_n = \sum_{k=0}^n (\lambda u_k + v_k)$.

La linéarité de la somme permet d'écrire :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=0}^n v_k.$$

Or, l'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel.

Donc, la suite $\left(\lambda \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=0}^n v_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est également convergente *i.e.* la série $\sum (\lambda u_n + v_n)$ converge.

Il suffit alors d'utiliser la linéarité de l'application limite sur ce même espace :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lambda \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=0}^n v_k \right) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n v_k = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Donc, $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$ 

Corollaire 10 – Structure de l'ensemble des suites convergentes :

L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel.

Pour le produit, c'est un peu plus compliqué et demande une notion de convergence un peu plus forte...

ATTENTION

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, il est possible que $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge ... L'ensemble des séries divergentes n'est pas stable par combinaisons linéaires.

Pire pour vous, même si $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, il est possible que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent.

Il est donc **INTERDIT** de découper une somme de série en deux comme écrire $\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ sans avoir vérifié que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ étaient convergentes.

Retenez pour cela l'exemple (13) : La série $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ converge au contraire des deux séries harmoniques $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$.

Une première conséquence des théorèmes généraux, condition nécessaire de convergence qui sera le plus souvent un critère de divergence :

Proposition 11 – Condition nécessaire de convergence :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

À retenir

Le terme général d'une série convergente doit tendre vers 0.

Preuve : Il suffit de remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$.

Par linéarité de la limite, si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers S alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente également et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = S - S = 0$.



Par la contraposée, si le terme général ne tend pas vers 0, pas alors la série diverge. On dit dans ce cas que la série *diverge grossièrement*.

Exemples 14 :

- Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{n+1}$ diverge.
- De même, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement) si $\alpha \leq 0$.
- Enfin, comme $(-1)^n$ n'a pas de limite, la série $\sum (-1)^n$ diverge de même que les séries du type $\sum \sin(n)$.

ATTENTION

La réciproque est fausse comme le montre la divergence de la série harmonique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ ou de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$.

II.2 – Séries à terme positif

Le **théorème (15)** donnera une place toute particulière aux séries à terme positif par la condition suffisante de convergence :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \text{ converge} \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge.}$$

Dans tout ce paragraphe, on considèrera des séries numériques réelles à terme positif (au moins à partir d'un certain rang) *a fortiori* réel.

Si les séries sont à terme négatif, en travaillant sur la série des opposés et en utilisant la linéarité de la somme, on obtient les mêmes résultats. Les théorèmes de ce paragraphe s'appliquent donc à toutes les séries à *terme de signe constant*.

1 — Condition nécessaire et suffisante de convergence

Dans le cas des séries à terme positif, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante. Montrer la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est donc équivalent à trouver un majorant.

Théorème 12 :

T1 • Une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ à terme positif converge si, et seulement si la suite $\left(S_n = \sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles est majorée :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge} \iff \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k \leq M.$$

T2 • Le seul cas de divergence est la limite infinie.

Preuve : Comme $\sum u_n$ est une série à terme positif, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles est une suite croissante.

Il suffit alors d'appliquer le théorème de la limite monotone ...



Exemple 15 :

La série harmonique $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n}$ à terme positif diverge donc vers $+\infty$.

Exemple 16 :

$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge.

En effet, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 2 - \frac{1}{n}$.

À retenir

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

La suite des sommes partielles est donc majorée. Elle converge vers un réel inférieur à 2.

2 — Application des relations de comparaison à l'étude des séries

Voyons trois critères pour étudier la nature de séries à **terme général positif**.

Théorème 13 – Critère de comparaison par inégalité :

$$\begin{aligned} \text{T1} \cdot \left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est convergente} \end{array} \right\} &\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est convergente.} \\ \text{T2} \cdot \left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est divergente} \end{array} \right\} &\Rightarrow \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est divergente.} \end{aligned}$$

Ces critères sont encore valables si les inégalités ne sont vraies qu'à partir d'un certain rang.

Remarque : Si le terme général est négatif, il suffit de le multiplier par -1 et se ramener aux critères qui suivent.

En fait, le problème est seulement si le terme général n'est jamais de signe constant !

Preuve : Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$.

T1 • Supposons : $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est convergente} \end{array} \right.$ et montrons que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée.

— Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = u_{n+1} \geq 0.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $\forall k \in \mathbb{N}, u_k \leq v_k$.

D'où, en sommant de 0 à n :

$$U_n \leq V_n.$$

Mais, de façon analogue au point précédent, la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et convergente.

Elle est donc majorée par sa limite, égale à $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.

Par transitivité, on obtient :

$$U_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc majorée.

D'après le théorème de convergence monotone, la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Autrement dit, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

T2 • Supposons $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est divergente.} \end{cases}$

On sait que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante comme **T1**. D'après le théorème de limite monotone, comme $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty.$$

Or, comme dans **T1** :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n.$$

D'après le théorème de comparaison, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$. Par conséquent, la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est divergente.



Définition 6 – Séries de Riemann :

On appelle *série de Riemann* de paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Proposition 14 :

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve :

- Si $\alpha = 1$, c'est le résultat de l'exemple (12).
- Si $\alpha \leq 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$

Or, la série harmonique est divergente.

D'après les critères de comparaison de séries à terme positifs, on en déduit que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Remarque : Si $\alpha \leq 0$, la série est grossièrement divergente.

- Supposons que $\alpha > 1$. Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est de terme général positif, sa convergence ne dépend que d'une majoration de sa somme partielle $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$. Pour tout $t \in \llbracket k ; k+1 \rrbracket$, on a :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}.$$

D'après l'inégalité de la moyenne, on peut intégrer cette inégalité entre k et $k+1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \int_k^{k+1} dt &\leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt. \\ \frac{1}{(k+1)^\alpha} &\leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt. \end{aligned}$$

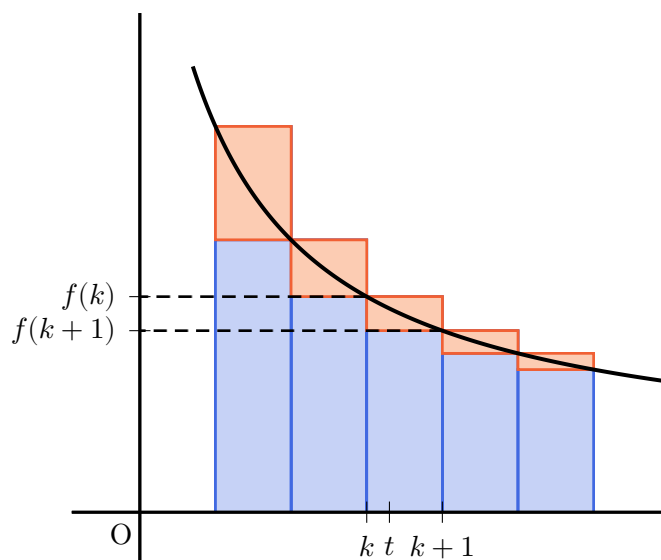


FIGURE I.1 : Une fonction continue positive et décroissante permet d'encadrer son intégrale.

En sommant ces inégalités de même sens pour k variant de 1 à n , on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

On effectue un changement d'indice :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

On se ramène à notre série en ajoutant et retranchant ce qu'il manque :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt + 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt + 1.$$

$$\text{Or, } \int_1^n f(t) dt = \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \left[-\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]_1^n = \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) \leq \frac{1}{\alpha-1} < +\infty.$$

La somme partielle est donc majorée par $\frac{1}{\alpha-1} + 1$ indépendant de n . Le **théorème (13)** nous affirme alors que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.



Le **théorème (13)** permet d'élargir notre champ d'étude à des séries dont le terme général n'est pas nécessairement positif.

Définition 7 – Série absolument convergente :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.

On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge.

Théorème 15 – La convergence absolue entraîne la convergence :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.

⚠ Attention

Si $\sum |u_n|$ est divergente, alors on ne peut pas conclure sur la nature de $\sum u_n$.

F. PUCCI



Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente alors elle converge, et on a :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

 **Preuve :** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose alors $\begin{cases} u_n^+ = \max(0, u_n) \\ u_n^- = \max(0, -u_n) \end{cases}$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} 0 \leq u_n^+ \leq |u_n| \\ 0 \leq u_n^- \leq |u_n| \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_n = u_n^+ - u_n^- \\ |u_n| = u_n^+ + u_n^- \end{cases}$.

Comme $\sum |u_n|$ converge, les séries à terme positif $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont donc convergentes. Soient ℓ^+, ℓ^- leurs limites.

On a $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (u_k^+ - u_k^-) = \sum_{k=0}^n u_k^+ - \sum_{k=0}^n u_k^- \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell^+ - \ell^-$ i.e. la série $\sum u_n$ converge.

De plus, on a $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| = |\ell^+ - \ell^-| \leq |\ell^+| + |\ell^-| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. 

On déduit aussi du **théorème (13)** les deux suivants :

Théorème 16 – Critère de comparaison par négligeabilité :

$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ \text{T1} \cdot \begin{cases} u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est convergente} \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est convergente.}$$

$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ \text{T2} \cdot \begin{cases} u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est divergente} \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est divergente.}$$

 **Preuve :**

T1 • Supposons $\begin{cases} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est convergente} \end{cases}$

On va montrer que $\sum_{n \geq 0} v_n$ est divergente en montrant, via le théorème de comparaison sur les suites, que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

On sait que $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$, donc à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} \right| \leq \varepsilon).$$

En particulier, avec $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$, que nous considérons ensuite, tel que :

$$\forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, \left| \frac{u_n}{v_n} \right| \leq 1.$$

D'où :

$$\forall n \geq N, 0 \leq |u_n| \leq |v_n|.$$

Et comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs :

$$\forall n \geq N, 0 \leq |u_n| \leq v_n.$$

Or, $\sum_{n \geq 0} v_n$ est convergente.

D'après le critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, on en déduit que $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est convergente, donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

Remarque : Il n'est donc pas nécessaire ici que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ soit à terme positif. La convergence absolue suffit à prouver sa convergence.

T2 • De la même façon qu'en **T1**, on obtient :

$$\forall n \geq N, 0 \leq |u_n| \leq v_n \implies \forall n \geq N, 0 \leq u_n \leq v_n.$$

Or, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente.

D'après le critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, on en déduit que $\sum_{n \geq 0} v_n$ est divergente.

Remarque : Ici, il est nécessaire que $\sum_{n \geq 0} u_n$ soit à terme positif.



On utilise souvent le premier point dans le cas où $\sum_{n \geq 1} v_n$ est une série de Riemann convergente.

Autrement dit, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs et qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$, alors on pourra conclure sur la convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Théorème 17 – Critère de comparaison par équivalence :

$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \end{array} \right\} \implies \sum_{n \geq 0} u_n \text{ et } \sum_{n \geq 0} v_n \text{ ont même nature.}$$

Preuve : Supposons $\left\{ \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n. \end{array} \right.$

On sait que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.
Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(n \geq N \implies \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \varepsilon \right)$$

En particulier, avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}$, que nous considérons ensuite, tel que :

$$\forall n \geq N, \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \frac{1}{2} \iff \forall n \geq N, -\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} - 1 \leq \frac{1}{2}.$$

Et comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs :

$$\forall n \geq N, \underbrace{\frac{1}{2} v_n \leq u_n}_{(1)} \leq \underbrace{u_n \leq \frac{3}{2} v_n}_{(2)}.$$

D'après l'inégalité (1) :

- Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente alors d'après le critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est convergente.
- Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ est divergente alors d'après le critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente.

Et, d'après l'inégalité (2) :

- Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ est convergente alors d'après le critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.
- Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente alors d'après le critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est divergente.

Autrement dit, dans tous les cas, les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ ont même nature. 

Remarque : Bien sûr, les critères sont encore valables si les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne sont à termes positifs qu'à partir d'un certain rang.

Méthode 2 :

M1 • Si l'énoncé ne demande que la nature de $\sum u_n$:

- (1). Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
- (2). On regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles.
- (3). Sinon :

- Si $\sum u_n$ est à terme général positif : on peut utiliser un des trois critères ci-dessus (en comparant avec le terme général d'une série de Riemann par exemple).
- si $\sum u_n$ est à terme général négatif : on utilise le fait que $-\sum u_n = \sum -u_n$ et que les séries $-\sum u_n$ et $\sum u_n$ ont même nature, puis on se ramène au cas précédent.
- Si le terme général de $\sum u_n$ n'est pas de signe constant (alterné) :

- Étudier la convergence absolue : si $\sum |u_n|$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- Revenir à la suite des sommes partielles.
- Utiliser le résultat : la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente si, et seulement si, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

M2 • Si l'énoncé demande de justifier la convergence et de calculer la somme d'une série :

- (1). On regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles.
- (2). On regarde si l'on peut mettre en place un télescopage.

Dans tous les cas, on regarde si l'énoncé fournit des pistes en mettant par exemple en place une comparaison série/intégrale.

Exemples 17 :

Déterminons la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^3}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{(-1)^n}{n^3} \right| = \frac{1}{n^3}$.

Or, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann d'exposant $3 > 1$, donc elle est convergente.

Conclusion : La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^3}$ est absolument convergente donc convergente.

Exemples 18 :

Déterminons la nature de $\sum_{n \geq 0} \frac{2n+7}{n^3+5n^2+3}$.

On a :

$$\frac{2n+7}{n^3+5n^2+3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}.$$

En particulier, pour n assez proche de $+\infty$, $\frac{2n+7}{n^3+5n^2+3}$ et $\frac{2}{n^2}$ sont de même signe positif.

Or, $\sum_{n \geq 1} \frac{2}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle est convergente.

Ainsi, d'après le critère de comparaison (par équivalence) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{2n+7}{n^3+5n^2+3}$ est convergente, donc la série $\sum_{n \geq 0} \frac{2n+7}{n^3+5n^2+3}$ également.

Exemples 19 :

Déterminons la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$.

Par croissances comparées $\frac{\ln(n)}{n^3} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\ln(n)}{n^3} \geq 0$ et $\frac{1}{n^2} \geq 0$.

Or, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle est convergente.

Donc, d'après le critère de comparaison (par négligeabilité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$ est convergente.

INDEX

- Combinaison
 - linéaire
 - de séries convergentes, 20
- Compatibilité
 - avec les opérations, 8
- Convergence
 - absolue, 25, 26
- Critère
 - de comparaison, 23, 26, 28
 - de divergence, 21
- Croissances
 - comparées, 6
- Divergence
 - grossière, 21, 28
- Espace
 - vectériel, 20
- Fonction
 - dérivable, 14
- Nature
 - d'une série, 16
- $o()$, 3
- Reste
 - d'une série, 16
- Réflexivité, 8
- Somme
 - d'une série, 16
 - partielle, 16, 22
- Suite
 - adjacente, 2
 - convergente, 2, 11
 - divergente, 2
 - négligeable, 3, 6
 - équivalente, 7, 13
- Symétrie, 8
- Série, 2, 16
 - absolument convergente, 25, 26
 - convergente, 2, 16
 - de Riemann, 2, 24
 - divergente, 16
 - grossièrement, 21
 - dérivée, 18
 - géométrique, 2, 18
 - harmonique, 17, 21
 - télescopique, 19, 29
 - à terme positif, 22
- Taux
 - d'accroissement, 14
- Terme
 - général, 16
- Terme général
 - d'une série, 16
- Théorème
 - d'encadrement, 19
 - de la limite monotone, 22
- Transitivité, 4, 8
- Variations
 - d'une suite, 2