

DM 1

D'après EM Lyon 2025

Exercice I.1

Partie A : Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On s'intéresse à la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n e^{1/u_n}.$$

1.
 - a. Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - b. Donner le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - c. Démontrer, en raisonnant par l'absurde, que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $+\infty$ comme limite.
2. Recopier et compléter le programme Python ci-dessous de sorte qu'il affiche le premier entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 10^6$.

```

1  import numpy as np
2  u = 1
3  n = 0
4  while ... :
5      u = ...
6      n = ...
7  print(...)
```

Partie B : Étude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x e^{1/x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

3. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en 0 .
4. Dresser le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$.
5. Soit $x > 0$.
 - a. Justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{x^{-k}}{k!}$ et calculer sa somme.
 - b. En déduire que :

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}.$$

6. Soit $x \geq 1$.
 - a. Établir séparément les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq e.$$

- b. En déduire que :

$$(\star) \quad \frac{1}{2x} \leq f(x) - (x + 1) \leq \frac{e}{x}.$$

7. Montrer que $f(x) = x + 1 + o_{x \rightarrow +\infty}(1)$ au voisinage de $+\infty$.
8. Représenter sur un même dessin la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x + 1$.

Partie C : Comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

9. a. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \frac{1}{u_k}$.
- b. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$.
10. a. À l'aide de l'encadrement $(\star)$ montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
- $$1 + \frac{1}{2u_k} \leq u_{k+1} - u_k \leq 1 + \frac{e}{u_k}.$$
- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, établir :
- $$n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \leq u_n - 1 \leq n + e \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k},$$
- puis
- $$1 + \frac{1}{2} \ln(u_n) \leq u_n - n \leq 1 + e \ln(u_n).$$
11. a. Justifier que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$.
- b. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
12. Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice I.2 – (Partie A : Réduction simultanée et spectre)

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois à coefficients réels.

On pose :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et on considère $\mathcal{E} = \text{Vect}(I, J, K)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par les matrices I, J et K .

1. Montrer que (I, J, K) est une base de $\mathcal{E}$, en déduire la dimension de $\mathcal{E}$.
2. **(khûbe)** Justifier sans calcul que les matrices J et K sont diagonalisables.
3. a. Exprimer la matrice J^3 comme un multiple de J .
b. **(khûbe)** En déduire que les valeurs propres de J appartiennent à l'ensemble $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$.

On pose $U_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. a. **(khûbe)** Vérifier que U_1 et U_2 sont des vecteurs propres de J .
a. Vérifier que $JU_1 = \sqrt{2}U_1$ et $JU_2 = 0_{3,1}$.
b. **(khûbe)** Déterminer un vecteur propre U_3 de J associé à la valeur propre $-\sqrt{2}$.
b. Montrer que $JU_3 = -\sqrt{2}U_3$ où l'on a posé $U_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
5. a. Justifier que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
b. Donner une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$P^{-1}JP = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

6. a. Montrer que (U_1, U_2, U_3) est aussi une base (de vecteurs propres) de K .
b. Déterminer la matrice $P^{-1}KP$.
7. Soit M une matrice de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ dans la base (I, J, K) .
a. Exprimer la matrice $P^{-1}MP$ sous la forme d'un tableau de nombres dépendant de a, b et c .
b. **(khûbe)** En déduire les valeurs propres de M .
8. On considère l'application linéaire $s : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$s(M) = s(aI + bJ + cK) = (a + b\sqrt{2} + c, a - c, a - b\sqrt{2} + c)$$

pour toute matrice $M = aI + bJ + cK$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- a. **(khûbe)** Donner la matrice S de s relativement à la base (I, J, K) de $\mathcal{E}$ et à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
b. **(khûbe)** Montrer que l'application linéaire s est bijective.