

EXERCICE 1

PARTIE A : ÉTUDE DE LA SUITE $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On considère la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n e^{1/u_n}.$$

1. 1.a. Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Procédons par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
 $u_0 = 1 > 0$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$.
 On a :

$$u_{n+1} = u_n e^{1/u_n}$$

Or :

- * $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence,
- * $e^{1/u_n} > 0$.

D'où :

$$u_{n+1} > 0$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

1.b. Donner le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n e^{1/u_n} - u_n \\ &= u_n (e^{1/u_n} - 1) \end{aligned}$$

Or :

- d'une part, $u_n > 0$ d'après la question précédente ;
- et, puisque $u_n > 0$, on a

$$\frac{1}{u_n} > 0$$

et donc, par stricte croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$:

$$e^{1/u_n} > 1$$

Par conséquent :

$$u_n (e^{1/u_n} - 1) > 0$$

Autrement dit :

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

1.c. Démontrer, en raisonnant par l'absurde, que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $+\infty$ comme limite.

- Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, d'après le théorème de limite monotone, elle admet une limite en $+\infty$. Et même :
 - * si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, cette limite est finie ;
 - * si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée, cette limite est égale à $+\infty$.
- Montrons donc que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Pour cela, raisonnons par l'absurde. Supposons donc que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
 Dans ce cas, d'après ce qui a été dit au-dessus (ou par théorème de convergence monotone), la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ .
 Or :

♥ L'avis du chef ! ♥

Un exercice très classique sur l'étude d'une suite récurrente. Presque entièrement du programme de 1A. Un peu trop guidé par moments peut-être, mais il contient quelques questions un peu plus techniques qui permettent de faire la différence.

Remarque

L'énoncé aurait pu demander d'établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$. On aurait procédé de la même façon...

♣ Méthode !

Bien-sûr qu'il est inutile de travailler sur $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Ce n'est pas plus simple !

📖 Rappels...

Théorème de limite monotone : toute suite monotone admet une limite en $+\infty$.
 Il se précise dans deux cas :
 • Théorème de convergence monotone : toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.
 • Théorème de divergence monotone : toute suite croissante et majorée tend vers $+\infty$; toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

* $u_0 = 1$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, donc on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$$

Et donc :

$$\ell \in [1; +\infty[$$

* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{1/u_n}$. D'où, en passant à la limite, licite car la fonction $x \mapsto x e^{1/x}$ est continue sur $[1; +\infty[$:

Mais :

$$\begin{aligned} \ell &= \ell e^{1/\ell} \iff \ell - \ell e^{1/\ell} = 0 \\ &\iff \ell(1 - e^{1/\ell}) = 0 \\ &\iff \begin{cases} \ell = 0 \\ \text{ou} \\ e^{1/\ell} = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \ell = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{1}{\ell} = 0 \end{cases} \\ &\iff \ell = 0 \end{aligned}$$

D'où $\ell = 0$: absurde (car $\ell \geq 1$) !

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, donc par théorème de divergence monotone,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

★ Classique ! ★

Question très classique sur les suites récurrentes. Attention à ne pas s'embrouiller. Le raisonnement doit être bien travaillé pour ne pas perdre le fil. On retient qu'il faut démontrer par l'absurde que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

2. Compléter le programme Python suivant pour qu'il affiche le premier entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 10^6$:

```
1 import numpy as np
2 u=1
3 n=0
4 while ... :
5     u=...
6     n=...
7 print(...)
```

Voici :

```
1 import numpy as np
2 u=1
3 n=0
4 while u<10**6 :
5     u=u*np.exp(1/u)
6     n=n+1
7 print(n)
```

♥ L'avis du chef ! ♥

L'énoncé aurait pu demander une autonomie complète sur cette question...

PARTIE B : ÉTUDE DE LA FONCTION f

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, f(x) = x e^{1/x}.$$

3. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en 0.

- En $+\infty$:
On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Donc, par composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

Conclusion : par opérations, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- En 0 (par la droite) :
On a, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$$

Or :

$$\checkmark \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty;$$

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{X} = +\infty \text{ par croissances comparées.}$$

Ainsi, par composition :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = +\infty$$

Conclusion : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty.$

♣ Méthode !

Il y a une FI. On transforme donc cette FI pour obtenir une CC de la forme $\frac{e^X}{X}$ quand $X \rightarrow +\infty$...

4. Dresser le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$.

On sait que :

$$\checkmark x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est dérivable sur }]0; +\infty[;$$

$$\checkmark \exp \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.$$

Donc $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$. Par conséquent, f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$f'(x) = e^{1/x} + x \frac{-1}{x^2} e^{1/x}$$

$$= e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x} \right)$$

$$= e^{1/x} \frac{x-1}{x} \quad \text{Règle de L'Hôpital}$$

D'où :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f	$+\infty$	e	$+\infty$

📖 Rappel...

Justification d'un caractère [...]

Si :

✓ u est [...] sur I à valeurs dans J .

✓ g est [...] sur J ;

Alors : $g \circ u$ est [...] sur I .

Les fonctions u et g ne sont donc, en général, pas dérivables sur les mêmes intervalles. On ne dit donc pas de phrase toute prête du type

"composée de fonctions dérivables sur I ".

5. Soit $x > 0$.

5.a. Justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{x^{-k}}{k!}$ et calculer sa somme.

On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{x^{-k}}{k!} = \left(\frac{1}{x} \right)^k$$

Or la série $\sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{x} \right)^k$ est une série exponentielle; elle est donc convergente, de somme égale à $e^{1/x}$.

Conclusion : la série $\sum_{k \geq 0} \frac{x^{-k}}{k!}$ est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} = e^{1/x}$.

5.b. En déduire que :

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$$

On a :

$$f(x) = xe^{1/x}$$

$$= x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!}$$

$$= x \left(1 + x^{-1} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} \right)$$

$$= x \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \right)$$

↪ question précédente

$$= x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$$

$$\text{Conclusion : } f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}.$$

6. Soit $x \geq 1$.

6.a. Établir séparément les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq e$$

• Remarquons que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} &= \frac{x^0}{2!} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \\ &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$x > 0 \text{ donc } \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \geq 0$$

Remarque

Établir une égalité, c'est transformer l'information. Mais établir une inégalité, c'est perdre de l'information. C'est pour cela qu'il est parfois compliqué de le faire : on ne sait pas trop comment procéder et quelle information perdre...

• Pour l'autre inégalité, puisque $x \geq 1$, on a déjà :

$$\frac{1}{x} \leq 1$$

D'où, pour tout $k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, puisque $k-2 \geq 0$, par croissance de la fonction $\cdot^{k-2}$ sur $\mathbb{R}^+$, licite car $\frac{1}{x} > 0$:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{k-2} \leq 1$$

Puis :

$$\forall k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket, \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{k-2}}{k!} \leq \frac{1}{k!}$$

Ainsi, en sommant de 2 à $+\infty$, licite car les séries en jeu sont des troncatures de séries exponentielles, donc convergentes, on a :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{k-2}}{k!} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

Mais :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$$

D'où

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{-k+2}}{k!} \leq e$$

$$\text{Conclusion : } \frac{1}{2} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq e.$$

Important !

Il vient de là ce e . C'est ce qui justifie, *a posteriori*, le début de la démarche.

♥ L'avis du chef ! ♥

Sur un sujet classique et relativement simple, cette question (surtout l'inégalité de droite) permet de se démarquer.

6.b. En déduire que :

$$(*) \quad \frac{1}{2x} \leq f(x) - (x+1) \leq \frac{e}{x}$$

D'après la question précédente :

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq e$$

D'où, en divisant par x , avec $x > 0$:

$$\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq \frac{e}{x}$$

$$\text{Conclusion : d'après la question 5.b., on obtient } \frac{1}{2x} \leq f(x) - (x+1) \leq \frac{e}{x}.$$

7. Montrer que $f(x) = x + 1 + \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(1)$ au voisinage de $+\infty$.

D'après la question précédente :

$$\forall x \geq 1, \frac{1}{2x} \leq f(x) - (x + 1) \leq \frac{e}{x}$$

Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} = 0$.

Donc, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = 0$$

Autrement dit :

$$f(x) - (x + 1) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(1)$$

Conclusion : $f(x) = x + 1 + \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(1)$.

Rappel...

$$g = o_a(h) \iff \lim_{h \rightarrow a} \frac{g}{h} = 0.$$

Par conséquent :

$$g = o_a(1) \iff \lim_{h \rightarrow a} g = 0$$

OU ALORS...

J'ai fait le choix d'utiliser ce qui précède. on peut procéder autrement :

On sait que :

$$\checkmark e^u = 1 + u + \underset{u \rightarrow 0}{o}(u)$$

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

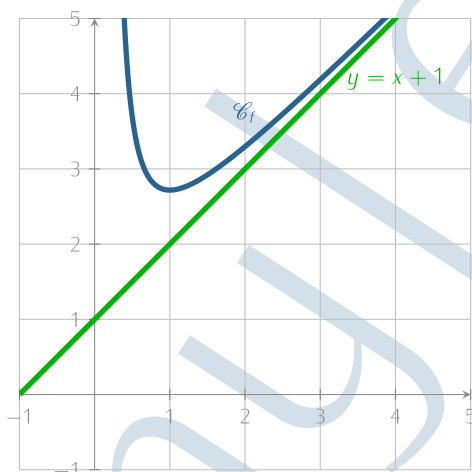
D'où :

$$e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + \underset{x \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Puis :

$$xe^{1/x} = x + 1 + \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(1)$$

8. Représenter sur un même dessin la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x + 1$.



Important !

On fait figurer :

- l'asymptote d'équation $x = 0$ à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0 à droite,
- la tangente horizontale à $\mathcal{C}_f$ en 1,
- le fait que $f(x) - (x + 1) \geq \frac{1}{2x} \geq 0$,
- le fait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = 0$: la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

PARTIE C : COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SUITE $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

9. 9.a. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \frac{1}{u_k}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) &= \ln(u_k e^{1/u_k}) - \ln(u_k) \\ &= \ln(u_k) + \frac{1}{u_k} - \ln(u_k) \\ &= \frac{1}{u_k} \end{aligned}$$

$$\leftarrow u_k > 0 \text{ et } e^{1/u_k} > 0$$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}, \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \frac{1}{u_k}$.

Attention !

La relation $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ n'est valable que si $a, b > 0$.
Si $a, b < 0$, on a $\ln(ab) = \ln(|a|) + \ln(|b|)$.

9.b. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \frac{1}{u_k}$$

D'où, en sommant de 0 à $n-1$ (licite car $n \geq 1$) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$$

D'où, par télescope :

$$\ln(u_n) - \ln(u_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$$

Or $u_0 = 1$...

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}.$$

10.10.a. À l'aide de l'encadrement (*) montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$1 + \frac{1}{2u_k} \leq u_{k+1} - u_k \leq 1 + \frac{e}{u_k}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Appliquons (*) avec $x = u_k$, licite car $u_k \geq 1$ (puisque $u_0 = 1$ et que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante) :

$$\frac{1}{2u_k} \leq f(u_k) - (u_k + 1) \leq \frac{e}{u_k}$$

Autrement dit :

$$\frac{1}{2u_k} \leq u_{k+1} - u_k - 1 \leq \frac{e}{u_k}$$

$$\text{Conclusion : } \forall k \in \mathbb{N}, 1 + \frac{1}{2u_k} \leq u_{k+1} - u_k \leq 1 + \frac{e}{u_k}.$$

✓ **Rigueur !**

Quand on utilise un théorème, on vérifie au préalable ses hypothèses. Même chose ici : (*) n'a été démontrée que pour $x \geq 1$...

10.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, établir :

$$n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \leq u_n - 1 \leq n + e \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$$

puis :

$$1 + \frac{1}{2} \ln(u_n) \leq u_n - n \leq 1 + e \ln(u_n)$$

- D'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}, 1 + \frac{1}{2u_k} \leq u_{k+1} - u_k \leq 1 + \frac{e}{u_k}$$

D'où, en sommant de 0 à $n-1$ (licite car $n \geq 1$) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2u_k} \right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{e}{u_k} \right)$$

Autrement dit, avec un télescope sur la somme du milieu :

$$n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \leq u_n - u_0 \leq n + e \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$$

D'où le résultat puisque $u_0 = 1$.

- La fin est immédiate puisque, d'après la question 9.b., $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$.

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + \frac{1}{2} \ln(u_n) \leq u_n - n \leq 1 + e \ln(u_n).$$

✗ **Attention !**

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 = n \dots$$

11.11.a. Justifier que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$.

✓ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ d'après la question 1.c. ;

✓ $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ par croissances comparées.

$$\text{Conclusion : par composition, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0.$$

♥ **L'avis du chef !** ♥

Là encore, l'énoncé est très détaillé. Ce résultat, utile dans la question suivante aurait pu ne pas être demandé...

11.b. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

D'après la question précédente, puisque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{u_n} + \frac{1}{2} \frac{\ln(u_n)}{u_n} \leq \frac{u_n - n}{u_n} \leq \frac{1}{u_n} + e \frac{\ln(u_n)}{u_n}$$

Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{u_n} + \frac{1}{2} \frac{\ln(u_n)}{u_n} \leq 1 - \frac{n}{u_n} \leq \frac{1}{u_n} + e \frac{\ln(u_n)}{u_n}$$

Or :

$$\checkmark \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0;$$

$$\checkmark \text{ d'après la question précédente, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} + \frac{1}{2} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0 ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} + e \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$$

D'où, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{n}{u_n} = 0$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{u_n} = 1$, donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

► Réflexe !

Il est assez fréquent d'obtenir un équivalent en revenant à la définition et à l'aide d'un encadrement ! Utilisons donc ce qui précède...

Remarque

Bien évidemment, il est possible de manipuler encore cet encadrement pour obtenir des membres de gauche et droite qui tendent vers 1... avec $\frac{n}{u_n}$ au milieu.

☞ Rappel...

La relation d'équivalence $\sim$ est symétrique... Autrement dit :
 $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n \iff w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

12. Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

D'après la question 9.b., on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} &= \ln(u_n) \\ &= \ln\left(\frac{u_n}{n} \times n\right) \\ &= \ln\left(\frac{u_n}{n}\right) + \ln(n) \end{aligned}$$

$\leftarrow \frac{u_n}{n} > 0 \text{ et } n > 0$

D'où, pour $n \geq 2$ (pour que $\ln(n) \neq 0$) :

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{u_n}{n}\right)}{\ln(n)}$$

Or, d'après la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$, d'où par composition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{u_n}{n}\right) = 0$$

et par opérations :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln\left(\frac{u_n}{n}\right)}{\ln(n)} = 1$$

Par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}}{\ln(n)} = 1$$

Conclusion : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Remarque

On peut poursuivre cette égalité en disant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{u_n}{n}\right) = 0$, donc $\ln\left(\frac{u_n}{n}\right) = o_{n \rightarrow +\infty}(1)$. Ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} = \ln(n) + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$$

Et donc $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$...

Remarque

Question plus délicate, qui demande davantage de recul.

EXERCICE 2

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.

PARTIE A : RÉDUCTION SIMULTANÉE ET SPECTRE

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On pose :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $E = \text{Vect}(I, J, K)$.

1. Montrer que (I, J, K) est une base de E , en déduire la dimension de E .

- Montrons que la famille (I, J, K) est une famille libre de E .
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons $aI + bJ + cK = 0_3$. On a :

$$\begin{aligned} aI + bJ + cK = 0_3 &\iff \begin{pmatrix} a+c & b & b \\ b & a & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff a = b = c = 0 \end{aligned}$$

D'où : $a = b = c = 0$. La famille (I, J, K) est donc libre.

- la famille (I, J, K) est ainsi :
 - ✓ génératrice de E , car $E = \text{Vect}(I, J, K)$;
 - ✓ libre d'après ce qui précède.

Conclusion : la famille (I, J, K) est une base de E et $\dim(E) = \text{Card}(I, J, K) = 3$.

2. Justifier sans calcul que les matrices J et K sont diagonalisables.

Conclusion : les matrices J et K sont symétriques (à coefficients réels), elles sont donc diagonalisables.

3. 3.a. Exprimer la matrice J^3 comme un multiple de J .

On trouve

$$J^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $J^3 = 2J$.

3.b. En déduire que les valeurs propres de J appartiennent à l'ensemble $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$.

D'après la question précédente, le polynôme $X^3 - 2X$ est annulateur de la matrice J . Le spectre de J est alors inclus dans l'ensemble des racines de $X^3 - 2X$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x^3 - 2x = 0 &\iff x(x^2 - 2) = 0 \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \sqrt{2} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion : $\text{Sp}(J) \subset \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$.

4. On pose :

$$U_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4.a. Vérifier que U_1 et U_2 sont des vecteurs propres de J .

Remarquons déjà que les vecteurs U_1 et U_2 sont non nuls... Ensuite :

♥ L'avis du chef ! ♥

Deux parties qui n'ont aucun rapport (pourquoi faire un seul exercice ?). La partie A est très classique et très (trop ?) guidée. Peu de chance de réellement se démarquer sur cette partie... La partie B est intéressante, elle fait la part belle à **Python**, même si l'énoncé aurait pu ne pas guider autant certaines questions comme les questions 9. ou 10. par exemple.

- d'une part

$$\begin{aligned} JU_1 &= \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2}U_1 \end{aligned}$$

Conclusion : $\sqrt{2}$ est valeur propre de J et U_1 en est un vecteur propre associé.

- d'autre part

$$JU_2 = 0_{3,1}$$

Conclusion : 0 est valeur propre de J et U_2 en est un vecteur propre associé.

4.b. Déterminer un vecteur propre U_3 de J associé à la valeur propre $-\sqrt{2}$.

On a :

$$J + \sqrt{2}I = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

et remarquons que $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. En notant $U_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, on a ainsi :

- ✓ $U_3 \neq 0_{3,1}$,
- ✓ $(J + \sqrt{2}I)U_3 = 0_{3,1}$.

Conclusion : $-\sqrt{2}$ est valeur propre de J et le vecteur U_3 , avec $U_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé.

5. 5.a. Justifier que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

La famille (U_1, U_2, U_3) est une famille de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est :

- ✓ libre car constituée de vecteurs propres de J associés à des valeurs propres distinctes,
- ✓ de cardinal 3, égal à $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

Conclusion : la famille (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

5.b. Donner une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$P^{-1}JP = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vers la base (U_1, U_2, U_3) convient (par formule de changement de base). Elle est bien inversible car c'est une matrice de passage.

Conclusion : on prend $P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

6. 6.a. Montrer que (U_1, U_2, U_3) est aussi une base de vecteurs propres de K .

- On sait déjà que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$...
- Ensuite, on trouve :

$$KU_1 = U_1 ; \quad KU_2 = -U_2 ; \quad KU_3 = U_3$$

Par conséquent :

- * 1 est valeur propre de K et les vecteurs U_1 et U_3 en sont des vecteurs propres associés,
- * -1 est valeur propre de K et le vecteur U_2 en est un vecteur propre associé.

Conclusion : (U_1, U_2, U_3) est aussi une base de vecteurs propres de K .

Remarque

L'énoncé devrait être formulé autrement : 'Montrer que $-\sqrt{2}$ est valeur propre de J et en déterminer un vecteur propre U_3 associé.' En effet, nous ne savons pas encore que $-\sqrt{2}$ est valeur propre de J ...

Pourquoi ?

Pour trouver 'de tête' un vecteur propre, on raisonne ici sur les lignes 2 et 3 de la matrice $J + \sqrt{2}I$: on cherche un vecteur qui sera dans son noyau... et on vérifie avec la première ligne. C'est en général relativement faisable quand la matrice contient quelques zéros, comme c'est le cas ici. Je recommande de s'entraîner ! Bien évidemment, on peut aussi résoudre le système $JX = -\sqrt{2}X$...

6.b. Déterminer la matrice $P^{-1}KP$.

On sait que P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans la base (U_1, U_2, U_3) , qui est une base de vecteurs propres de K . Ainsi $P^{-1}KP$ est diagonale, contenant les valeurs propres associées aux vecteurs propres U_1, U_2, U_3 respectivement.

$$\text{Conclusion : } P^{-1}KP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque

Tout l'enjeu ici est de ne pas effectuer le produit matriciel (qui demanderait de calculer P^{-1}). Il faut donc procéder de façon plus théorique... Ce qui a été fait en question précédente nous guide très fortement !

7. Soit M une matrice de E de coordonnées $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ dans la base (I, J, K) .

7.a. Exprimer $P^{-1}MP$ sous la forme d'un tableau de nombres dépendant de a, b et c .

Puisque M a pour coordonnées (a, b, c) dans la base (I, J, K) , on a $M = aI + bJ + cK$. D'où :

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= P^{-1}(aI + bJ + cK)P \\ &= aI + bP^{-1}JP + cP^{-1}KP \\ &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + b\sqrt{2} + c & 0 & 0 \\ 0 & a - c & 0 \\ 0 & 0 & a - b\sqrt{2} + c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

← questions 5.b. et 6.b.

Remarque

Remarquons que toute matrice $M \in E$ est symétrique (combinaison linéaire de matrices symétriques), elle est donc diagonalisable : nous venons de le démontrer dans cette question puisque M est semblable à une matrice diagonale.

7.b. En déduire les valeurs propres de M .

Notons $D = \begin{pmatrix} a + b\sqrt{2} + c & 0 & 0 \\ 0 & a - c & 0 \\ 0 & 0 & a - b\sqrt{2} + c \end{pmatrix}$. La matrice D est diagonale, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Mais, d'après la question précédente, $D = P^{-1}MP$. Donc les matrices M et D sont semblables. Or, deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

Conclusion : les valeurs propres de M sont $a + b\sqrt{2} + c$, $a - c$ et $a - b\sqrt{2} + c$.

Remarque

Ces valeurs peuvent ne pas être distinctes (prendre $b = 0$ par exemple...). On préfère donc cette conclusion à l'écriture $\text{Sp}(M) = \{a + b\sqrt{2} + c, a - c, a - b\sqrt{2} + c\}$ qui n'est pas correcte car un ensemble ne peut contenir deux valeurs identiques.

8. On considère l'application linéaire $s : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$s(M) = s(aI + bJ + cK) = (a + b\sqrt{2} + c, a - c, a - b\sqrt{2} + c)$$

8.a. Donner la matrice S de s relativement à la base (I, J, K) de E et à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$s(I) = (1, 1, 1) ; \quad s(J) = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) ; \quad s(K) = (1, -1, 1)$$

$$\text{Conclusion : } S = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérification

L'énoncé permet de vérifier le résultat de la question précédente ! En fait, l'application s associe à une matrice $M \in E$ un triplet formé par son spectre.

8.b. Montrer que l'application linéaire s est bijective.

Travaillons sur la matrice S , associée à s . Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} SX = 0_{3,1} &\iff \begin{cases} x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ x - z = 0 \\ x - \sqrt{2}y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ -\sqrt{2}y - 2z = 0 \\ -2\sqrt{2}y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\iff X = 0_{3,1} \end{aligned}$$

Par conséquent $\ker(S) = \{0_{3,1}\}$.

Conclusion : la matrice S est inversible, donc l'application linéaire s est bijective.