

Sujet 1

Suites et Séries

Question de cours :

Quelle est la définition de la négligeabilité d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ devant une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Quelle condition imposée à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Quelle est la définition générale avec l'existence d'une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice 1 :

Étudier le sens de variation de la suite définie par :

$$u_n = n^2 - n + 2.$$

La fonction $t \mapsto t^2 - n + 2$ est croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir de $n = 1$.

Exercice 2 :

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Montrons que $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sim \frac{1}{n}$.

En utilisant le développement limité de $\ln(1+x)$ en 0, on a : $\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} + o \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$.

De là on tire que $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$.

Par équivalence, la série de terme général $n^{-(1+\frac{1}{n})}$ est donc divergente.

Exercice 3 :

Déterminer un équivalent et la limite de :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Sujet 2

Suites et Séries

Question de cours :

Donner la définition de deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ équivalentes en $+\infty$.
 Peut-on écrire $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0$? Justifier.

Exercice 1 :

Étudier le sens de variation de la suite définie par :

$$e_n = \frac{2^n}{(n+1)!}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}, e_n \neq 0$ et $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{2}{n+1}$ donc $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir de $n = 1$.

Exercice 2 :

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Montrons que $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sim \frac{1}{n}$.

En utilisant le développement limité de $\ln(1+x)$ en 0, on a : $\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} + o \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$.

De là on tire que $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$.

Par équivalence, la série de terme général $n^{-(1+\frac{1}{n})}$ est donc divergente.

Exercice 3 – Terme dominant et quotient de polynômes :

Déterminer la limite et un équivalent simple en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \frac{2n^3 - 3n + 1}{n^2 + 5n} - \frac{2n^2 + 1}{n + 1}.$$

La méthode classique consiste à mettre au même dénominateur ou à effectuer le développement terme à terme. Mettons d'abord chaque fraction sous forme d'un équivalent simple :

$$\frac{2n^3 - 3n + 1}{n^2 + 5n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n^3}{n^2} = 2n \quad \text{et} \quad \frac{2n^2 + 1}{n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n^2}{n} = 2n.$$

Comme la différence des équivalents est nulle ($2n - 2n = 0$), **on ne peut pas soustraire les équivalents**. Il faut réduire au même dénominateur :

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{(2n^3 - 3n + 1)(n + 1) - (2n^2 + 1)(n^2 + 5n)}{(n^2 + 5n)(n + 1)} \\&= \frac{(2n^4 + 2n^3 - 3n^2 - 2n + 1) - (2n^4 + 10n^3 + n^2 + 5n)}{n^3 + 6n^2 + 5n} \\&= \frac{-8n^3 - 4n^2 - 7n + 1}{n^3 + 6n^2 + 5n}.\end{aligned}$$

Au dénominateur et au numérateur, on extrait le terme de plus haut degré :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-8n^3}{n^3} = -8.$$

On en déduit immédiatement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -8$.

Sujet 3

Suites et Séries

Question de cours :

Parmi les opérations suivantes sur les équivalents de suites, lesquelles sont **autorisées** et lesquelles sont **interdites** ?

- Produit et quotient d'équivalents
- Somme d'équivalents
- Équivalents sous une puissance fixée $\alpha \in \mathbb{R}$
- Composition à gauche par une fonction (ex : appliquer exp ou ln)

Exercice 1 :

Étudier le sens de variation de la suite définie par :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0 \text{ donc } (H_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante.}$$

Exercice 2 :

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$n^{-(1+\frac{1}{n})}.$$

Montrons que $n^{-(1+\frac{1}{n})} \sim n^{-1}$.

$$\text{On a } \frac{n^{-(1+\frac{1}{n})}}{n^{-1}} = n^{-\frac{1}{n}} = e^{-\frac{\ln n}{n}}.$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0, \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{\ln n}{n}} = 1 \text{ et l'équivalence.}$$

La série de terme général $n^{-(1+\frac{1}{n})}$ est donc divergente car la série harmonique est divergente.

Exercice 3 – Utilisation des équivalents usuels :

Déterminer la limite et un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = n^2 \left(e^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 \right) \ln \left(1 + \frac{3}{n} \right).$$

Utilisons les équivalents usuels issus des taux de variation :

$$\text{— On sait que } e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x. \text{ Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0, \text{ donc par composition :}$$

$$e^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

— On sait que $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$, donc par composition :

$$\ln\left(1 + \frac{3}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{n}.$$

Par produit d'équivalents (ce qui est ****toujours autorisé****, contrairement à la somme) :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2 \times \frac{1}{n^2} \times \frac{3}{n} = \frac{3}{n}.$$

Conclusion : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Sujet 4

Suites et Séries

Question de cours :

Rappeler l'échelle des croissances comparées sous forme de négligeabilités successives ($\ll$) faisant intervenir $(\ln n)^\alpha$, n^β , a^n , $n!$ et n^n .

Exercice 1 :

Étudier le sens de variation de la suite définie par :

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_{n+1} = (n^2 + 1)\alpha_n \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \neq 0$ à montrer par récurrence $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = n^2 + 1 \geq 1$ donc $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 2 :

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}.$$

On sait que : $\ln(e^n - 1) \leq \ln e^n = n$.

De plus, $\ln n \geq 1$ pour n assez grand, par conséquent $\frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)} \geq \frac{1}{n}$.

On conclut par comparaison des termes généraux de signe positif que la série $\sum \frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}$ est divergente.

Exercice 3 – Somme géométrique et équivalent :

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \sum_{k=0}^n 3^k = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n.$$

Déterminer la limite de u_n , puis donner un équivalent simple de u_n quand $n \rightarrow +\infty$.

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q = 3 \neq 1$:

$$u_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = \frac{3^{n+1} - 1}{2} = \frac{3}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}.$$

Comme $3 > 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Pour trouver un équivalent, on met en facteur le terme dominant (3^n) :

$$u_n = \frac{3}{2} \times 3^n \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = 0$, la parenthèse tend vers 1. On en déduit l'équivalent :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{2} \times 3^n.$$

Exercice 4 – Croissances comparées et factorisation :

Déterminer la limite et un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \frac{2^n - n^3 + \ln n}{3^n + n^2}.$$

Au numérateur et au dénominateur, les termes exponentiels 2^n et 3^n l'emportent sur les termes polynomiaux et logarithmiques par **croissances comparées** :

— Au numérateur, on factorise par le terme dominant 2^n :

$$2^n - n^3 + \ln n = 2^n \left(1 - \frac{n^3}{2^n} + \frac{\ln n}{2^n} \right).$$

Par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{2^n} = 0$. Donc : $2^n - n^3 + \ln n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2^n$.

— Au dénominateur, on factorise par 3^n :

$$3^n + n^2 = 3^n \left(1 + \frac{n^2}{3^n} \right).$$

De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0$, donc $3^n + n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3^n$.

Par quotient d'équivalents :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3} \right)^n.$$

Comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$, on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Sujet 5

Suites et Séries

Question de cours :

Quelle est la condition nécessaire pour qu'une série $\sum u_n$ converge ?

Que peut-on conclure si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$?

La réciproque est-elle vraie (donner un contre-exemple) ?

Exercice 1 :

Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Il suffit d'étudier le signe de deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{=\frac{1}{2} \frac{1}{n+1}} + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{> \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+1} > 0.$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (strictement) croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{=\frac{1}{2} \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{< \frac{1}{2n}} - \frac{1}{n} < 0.$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (strictement) décroissante.

Exercice 2 :

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$2 \ln(n^3 + 1) - 3 \ln(n^2 + 1).$$

$$\sim -\frac{3}{n^2} \Rightarrow \text{CV}.$$

Exercice 3 – Somme géométrique et équivalent :

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \sum_{k=0}^n 3^k = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n.$$

Déterminer la limite de u_n , puis donner un équivalent simple de u_n quand $n \rightarrow +\infty$.

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q = 3 \neq 1$:

$$u_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = \frac{3^{n+1} - 1}{2} = \frac{3}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}.$$

Comme $3 > 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Pour trouver un équivalent, on met en facteur le terme dominant (3^n) :

$$u_n = \frac{3}{2} \times 3^n \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = 0$, la parenthèse tend vers 1. On en déduit l'équivalent :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{2} \times 3^n.$$

Sujet 6

Suites et Séries

Question de cours :

Rappeler la condition nécessaire et suffisante de convergence des séries suivantes ainsi que la valeur de leur somme :

1. $\sum_{n \geq 0} q^n$
2. $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$
3. $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$

Exercice 1 :

Étudier le sens de variation de la suite définie par :

$$v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2}{3} < 1$ donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice 2 :

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}.$$

$$\sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow \text{CV}.$$

Exercice 3 – Croissances comparées et factorisation :

Déterminer la limite et un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \frac{2^n - n^3 + \ln n}{3^n + n^2}.$$

Au numérateur et au dénominateur, les termes exponentiels 2^n et 3^n l'emportent sur les termes polynomiaux et logarithmiques par **croissances comparées** :

— Au numérateur, on factorise par le terme dominant 2^n :

$$2^n - n^3 + \ln n = 2^n \left(1 - \frac{n^3}{2^n} + \frac{\ln n}{2^n}\right).$$

Par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{2^n} = 0$. Donc : $2^n - n^3 + \ln n \sim_{n \rightarrow +\infty} 2^n$.

— Au dénominateur, on factorise par 3^n :

$$3^n + n^2 = 3^n \left(1 + \frac{n^2}{3^n} \right).$$

De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0$, donc $3^n + n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3^n$.

Par quotient d'équivalents :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3} \right)^n.$$

Comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$, on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Sujet 7

Suites et Séries

Question de cours :

Donner la définition et énoncer le théorème concernant la convergence des séries de Riemann.
Même question pour la série exponentielle.

Exercice 1 :

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n} \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 < v_n < 3$.
2. Étudier la monotonie de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. En déduire l'éventuelle convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $0 < v_0 = 1 < 3$ et, en supposant $0 < v_n < 3$, on a :

$$0 < 3 < 6 - v_n < 6 \implies \frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3} \implies 0 < \frac{3}{2} = \frac{9}{6} < v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n} < \frac{9}{3} = 3.$$

$$2. \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \frac{9}{6 - v_n} - v_n = \frac{9 - 6v_n + v_n^2}{6 - v_n} = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}.$$

D'après la question précédente, $6 - v_n > 0$ dont $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

3. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante minorée donc elle converge vers une limite $\ell \leq 3$.

Exercice 2 :

1. Trouver des réels a , b et c tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}. \quad (.1)$$

2. En déduire le calcul de $K_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

1. Considérons l'équation, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$ en admettant qu'une telle écriture existe.

En multipliant les deux membres par $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient
$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = a + \left(\frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} \right) \times k.$$

Enfin pour $k = 0$, $a = \frac{1}{2}$.

Multipliant successivement l'équation (.1) par $k+1$ et évaluant en $k = -1$ puis par $k+2$, évaluant en $k = -2$, on trouve : $b = -1$ et $c = \frac{1}{2}$.

Réciproquement, on vérifie que $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ et $c = \frac{1}{2}$ conviennent.

Donc, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$.

2. Par un petit miracle, on peut écrire, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$.

On conclut alors par linéarité et télescopage :

$$\begin{aligned} K_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right). \end{aligned}$$

Sujet 8

Suites et Séries

Question de cours :

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

1. Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, que conclut-on pour $\sum u_n$?
2. Si $u_n \sim v_n$, que peut-on dire des natures respectives des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$?

Exercice 1 :

Étudier le sens de variation de la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = w_n - n \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - w_n = -n < 0$ donc $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice 2 :

Déterminer un équivalent et la limite de :

$$\frac{n+1}{\sqrt{n} + \sin^2(n)}.$$

$$\frac{n+1}{\sqrt{n} + \sin^2 n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 3 – Combinaison d'exponentielles et factorisation :

Déterminer la limite et un équivalent simple en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \frac{e^{\frac{2}{n}} + 3}{e^{\frac{1}{n}} - 1}.$$

Il faut analyser le comportement du numérateur et du dénominateur séparément :

— **Au numérateur :** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$, donc par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{2}{n}} + 3 \right) = e^0 + 3 = 1 + 3 = 4.$$

La limite étant une **constante non nulle**, le numérateur est simplement équivalent à sa limite :

$$e^{\frac{2}{n}} + 3 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 4.$$

— **Au dénominateur :** Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on utilise l'équivalent usuel :

$$e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Par quotient d'équivalents :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4}{\frac{1}{n}} = 4n.$$

Conclusion : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 4n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Sujet 9

Suites et Séries

Question de cours :

Définir la convergence absolue d'une série $\sum u_n$.

Quel est le lien entre la convergence absolue et la convergence simple ?

Quelle inégalité relie leurs sommes ?

Exercice 1 :

Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies pour $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$ sont adjacentes.

$$- \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^3} \geq 0.$$

Donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

$$- \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{-(n^2 + 3n + 1)}{(n+1)^3 n^2} \leq 0.$$

Donc la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

$$- v_n - u_n = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

Exercice 2 – Logarithme et équivalents usuels :

Déterminer la limite et un équivalent simple en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = n^2 [\ln(n+2) - \ln(n)] \left(e^{\frac{3}{n}} - 1 \right).$$

1. On regroupe les logarithmes :

$$\ln(n+2) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right).$$

2. On utilise les équivalents usuels du cours :

$$- \text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0, \text{ on a } \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}.$$

$$- \text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0, \text{ on a } e^{\frac{3}{n}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{n}.$$

3. Par produit d'équivalents :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2 \times \frac{2}{n} \times \frac{3}{n} = 6.$$

Conclusion : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 6$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$.