

II

Algèbre linéaire Espaces vectoriels

ON a bien compris (du moins, je l'espère) que la notion d'ensembles est au centre de l'étude des mathématiques.

UN ensemble est une collection d'objets. Mais on voit bien que, dans sa généralité, cette notion est au mieux insuffisante, sinon peu manipulable. On préfère déjà les ensembles d'objets de même nature : ensemble de nombres, ensemble de fonctions, ensembles de matrices... sur lesquels on peut donc définir des opérations.

UNE fois un ensemble d'objets de même nature constitué, on peut se demander quelle est sa structure. L'étude des structures algébriques mathématiques est essentielle pour identifier le type d'ensemble.

Plusieurs structures mathématiques existent, en voici trois parmi les plus courantes :

- Introduit en 1893 par Heinrich Weber (1842-1913, allemand) : le groupe. Un ensemble G est un groupe lorsqu'il est muni d'une loi de composition interne (une opération entre éléments), notée par exemple $\oplus$, et qui vérifie : G est stable par $\oplus$, la loi $\oplus$ est associative, il existe un neutre de $\oplus$ appartenant à G , et tout élément de G possède un symétrique par $\oplus$ dans G .

Sont des groupes $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$, l'ensemble des applications bijectives de E dans E (muni de la composition). Ne sont pas des groupes : $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{R}, \times)$, $(\mathbb{R}^*, +)$...

Si de plus, $\oplus$ est commutative, on dit que G est un groupe abélien.

- Introduit en 1877 par Richard Dedekind (1831-1916, allemand) : le corps. Un ensemble $\mathbb{K}$ est un corps lorsqu'il est muni de deux lois de composition internes, notées par exemples $\oplus$ et $\star$, qui vérifient : $\mathbb{K}$ est stable par $\oplus$ et $\star$, $(\mathbb{K}, \oplus)$ est un groupe abélien, $\star$ se distribue sur $\oplus$, $\star$ possède un neutre dans $\mathbb{K}$, tout élément de $\mathbb{K}$ (excepté le neutre de $\oplus$) possède un inverse pour $\star$ dans $\mathbb{K}$. $(\mathbb{Q}, +, \times)$ et $(\mathbb{R}, +, \times)$ sont des corps. Tous les autres ensembles usuels n'en sont pas !
- Manipulé depuis le milieu du XVII^{ème} siècle en géométrie, c'est Giuseppe Peano (1858-1932, italien) qui donna une définition rigoureuse et axiomatique d'espace vectoriel en 1888. Cette structure a le bon goût d'être un bon compromis entre « facile à manipuler » et « de nombreux ensembles peuvent être vus comme des espaces vectoriels » ; rajoutons à cela qu'elle peut avoir une interprétation géométrique.

$\overline{\mathcal{P}}$	$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R}[x]$	$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
$3\vec{i} + 2\vec{j}$	$f - 2g$	$3P + 2Q$	$3A + 2B$	$3(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + 2(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$
$\vec{0}$	$x \mapsto 0_{\mathbb{R}}$	$0_{\mathbb{R}[x]}$	$(0)_{n,p}$	$(0)_{n \in \mathbb{N}}$

FIGURE II.1 : Exemples d'espaces vectoriels

O_N est donc face à une excellente structure algébrique qui est le thème de ce chapitre.

Plan du chapitre

I RAPPELS DE PREMIÈRE ANNÉE	5
I.1 EXEMPLES FONDAMENTAUX	7
II SOUS-ESPACES VECTORIELS	9
II.1 DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS	9
II.2 SOUS-ESPACES VECTORIELS ENGENDRÉS	13
III BASES ET DIMENSION	16
III.1 FAMILLES LIBRES, GÉNÉRATRICES, BASES	16
III.2 DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL	23
III.3 COORDONNÉES DES VECTEURS DANS UNE BASE	26
IV RANG D'UNE FAMILLE DE VECTEURS	28
V RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR L'INVERSIBILITÉ DE MATRICES	30

POUR BIEN DÉMARRER...

1. Définition d'une matrice inversible. Propriétés.

Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Définition. On dit que A est inversible lorsqu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$.
- Propriétés :
 - A est inversible si, et seulement si, il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$.
 - Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
 - Si A est inversible, alors ${}^t A$ est inversible et $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
 - Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2. Conditions suffisantes de non inversibilité d'une matrice.

Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si A contient une ligne (ou colonne) nulle, alors A n'est pas inversible.
- Si l'une des lignes (respectivement colonnes) de A est combinaison linéaire des autres lignes (respectivement colonnes), alors A n'est pas inversible.

3. Inversibilité des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On appelle déterminant de A , noté $\det(A)$, le réel défini par $\det(A) = ad - bc$. On a :

A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$.

Et le cas échéant :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

4. Inversibilité des matrices triangulaires.

Une matrice triangulaire est inversible

si, et seulement si, tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

si, et seulement si, le produit de ses coefficients diagonaux est non nul.

5. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Résoudre $AX = 0_{3,1}$.

On a :

$$\begin{aligned} AX = 0_{3,1} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow[\begin{smallmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{smallmatrix}] \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y - 4z = 0 \\ -2y - 4z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -z \\ y = -2z \\ z = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation $AX = 0_{3,1}$ est $\left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$.

Ce chapitre est une introduction aux espaces vectoriels. Il précède celui sur les *applications linéaires entre espaces vectoriels* qui donnera un tout autre sens aux matrices que nous connaissons déjà...

I. RAPPELS DE PREMIÈRE ANNÉES

Définition 1 – Espaces vectoriels :

Soit E un ensemble non vide muni de deux lois :

D1 • Une loi de *composition interne* notée $+$ (l'addition) :

$$\begin{aligned} + : E \times E &\longrightarrow E \\ (x; y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

D2 • Une loi de *composition externe*, notée $\cdot$ (la multiplication par un scalaire) :

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda; x) &\longmapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un *espace vectoriel sur $\mathbb{R}$* ou *$\mathbb{R}$ -espace vectoriel* abrégé en *$\mathbb{R}$ -ev* lorsque :

D3 • $(E, +)$ est un groupe abélien, *i.e.*

1. $+$ est *associative* : $\forall (x; y; z) \in E^3, (x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$.
2. $+$ est *commutative* : $\forall (x; y) \in E^2, x + y = y + x$.
3. $+$ admet un *élément neutre* noté 0_E et appelé *vecteur nul* :

$$\forall x \in E, \quad x + 0_E = 0_E + x = x.$$

4. Tout élément de E admet un *symétrique* pour $+$ appelé *opposé de x* et noté $-x$:

$$\forall x \in E, \quad x + (-x) = 0_E.$$

D4 • La loi de composition externe vérifie les axiomes suivants :

1. $\forall x \in E, \forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times_{\mathbb{R}} \mu) \cdot x$: *compatibilité avec $\times_{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$* .
2. $\forall x \in E, \forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad (\lambda +_{\mathbb{R}} \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$: *compatibilité $+_{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$* .
3. $\forall (x; y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$: *compatibilité avec $+$ dans E* .
4. $\forall x \in E, \quad 1_{\mathbb{R}} \cdot x = x$: $1_{\mathbb{R}}$ est l'élément neutre pour $\cdot$.

On appelle :

- *vecteurs* les éléments de E .
- *scalaires* les éléments de $\mathbb{R}$.

On dit que $\mathbb{R}$ est le *corps de base* de l'espace vectoriel E .

En gros, un espace vectoriel est un ensemble muni d'une addition interne et d'une multiplication scalaire qui ont les bonnes propriétés habituelles permettant les calculs !

Remarques :

- On notera que l'existence du vecteur nul implique que tout espace vectoriel E est non vide.

💡 Idée

On omettra le symbole $\cdot$ pour la multiplication.

💡 Idée

Dès qu'il n'y aura plus d'ambiguïté, on notera 0 plutôt que 0_E .

⚠ Attention

La loi $\cdot$ est une loi de multiplication externe : ce n'est pas le produit de deux vecteurs.

📌 À retenir

Les vecteurs sont le plus souvent notés sans leur flèche.

- Pour éviter des parenthèses, on définit une priorité de la loi externe sur la loi interne : $\lambda.x + y$ signifie $(\lambda.x) + y$.
- Si elle est non ambiguë, on allège en général l'écriture en notant λu plutôt que $\lambda \cdot \vec{u}$ pour λ un scalaire et $\vec{u}$ un vecteur, même si la notation avec des flèches pour les vecteurs peut être utilisée dans un premier temps pour ne pas mélanger les objets. Les lettres grecques $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \dots$ s'utilisent plutôt pour les scalaires que pour les vecteurs.
- Puisque E est stable par $+$ et par $\cdot$, il est stable par combinaison linéaire :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E, \lambda x + \mu y \in E.$$

Et si c'est vrai pour deux...

Proposition 1 – Opérations :

Soit E un espace vectoriel réel.

P1 • L'élément neutre pour $+$ est unique, noté $\vec{0}_E$, appelé vecteur nul de E .

P2 • Pour tout $x \in E$, x admet un unique opposé, noté $-x$.

En particulier,

$$(1) \forall (x; x'; y) \in E^3, x + y = x' + y \implies x = x'.$$

$$(2) \forall (\lambda; x) \in \mathbb{R} \times E, (-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x).$$

$$(3) (-1_{\mathbb{R}}).x = -x.$$

$$(4) \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x; y) \in E^2, \lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y.$$

$$(5) \forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, (\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x.$$

P3 • $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \left(\lambda \cdot x = 0_E \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ou} \\ x = 0_E \end{cases} \right).$

En particulier,

$$(1) \text{ Si } \lambda \neq 0, \text{ alors } \forall (x; y) \in E^2, \lambda.x = \lambda.y \implies x = y.$$

$$(2) \text{ Si } x \neq 0_E, \text{ alors } \forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda.x = \mu.x \implies \lambda = \mu.$$

P4 • $\forall n \in \mathbb{[2; +\infty[}, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in E.$

Preuve :

P1 • Supposons qu'il existe deux éléments neutres e et e' pour $+$.

Alors,

$$e \underset{\text{def de } e'}{=} e + e' \underset{\text{def de } e}{=} e'.$$

C'est un fait général.

P2 • Soit $x \in E$. Supposons également qu'il existe deux symétriques x' et x'' de x pour $+$.

Alors,

$$x' \underset{\text{def de } 0_E}{=} x' + 0_E \underset{\text{def de } x''}{=} x' + (x + x'') \underset{\text{associativité de } +}{=} (x' + x) + x'' \underset{\text{def de } x'}{=} 0_E + x'' \underset{\text{def de } 0_E}{=} x''.$$

C'est également un fait général.

(1) Simple définition et utilisation du symétrique de $y \in E$;.

Soit $(\lambda; x) \in \mathbb{R} \times E$.

$$(2) \quad (-\lambda).x + \lambda.x = (-\lambda + \lambda).x = 0_{\mathbb{R}}.x = 0_E \implies (-\lambda).x = -(\lambda.x), \text{ et}$$

$$\lambda.(-x) + \lambda.x = \lambda.(-x + x) = \lambda.0_E = 0_E. \implies \lambda.(-x) = -(\lambda.x).$$

$$(3) \quad \text{En prenant } \lambda = 1_{\mathbb{R}} \text{ dans P2.(2), on a : } (-1_{\mathbb{R}}).x = -(1_{\mathbb{R}}.x) = -x.(-1_{\mathbb{R}}).x = -x.$$

$$(4) \quad \text{Conséquence de P2.(2).}$$

$$(5) \quad \text{Conséquence de P2.(2).}$$

$$\text{P3} \bullet \text{ Soit } x \in E. \text{ Alors } 0_{\mathbb{R}}.x = (0_{\mathbb{R}} +_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}).x = 0_{\mathbb{R}}.x +_E 0_{\mathbb{R}}.x \implies 0_{\mathbb{R}}.x = 0_E.$$

$$\text{Pour } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ on a aussi } \lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E + \lambda.0_E \implies \lambda.0_E = 0_E.$$

$$\text{Réciproquement, soit } (\lambda; x) \in \mathbb{R} \times E \text{ tel que } \lambda.x = 0_E.$$

$$\text{Supposons que } \lambda \neq 0_{\mathbb{R}} \text{ et montrons que } x = 0_E.$$

$$\text{On a alors } x = 1_{\mathbb{R}}.x = (\lambda^{-1}\lambda).x = \lambda^{-1}.(\lambda.x) = \lambda^{-1}.0_E = 0_E.$$

$$(1) \quad \text{Conséquence de P2.(4) et P3.}$$

$$(2) \quad \text{Conséquence de P2.(5) et P3.}$$



Méthode

Afin de démontrer la relation $\mathcal{P} \implies (\mathcal{Q} \cup \mathcal{R})$ i.e. $\exists \mathcal{P} \cup (\mathcal{Q} \cup \mathcal{R})$, on a démontré ici $(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}) \implies \mathcal{R}$ i.e. $\exists (\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}) \cup \mathcal{R}$.

Attention

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ne sont pas des $\mathbb{R}$ -ev.

I.1 – Exemples fondamentaux

Exemple 1 – $(\mathbb{R}; +; \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel :

L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de son addition et de sa multiplication est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de vecteur nul $\overrightarrow{0}_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}}$ et muni des lois :

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) &\longmapsto x + y = x +_{\mathbb{R}} y \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda; x) &\longmapsto \lambda \cdot x = \lambda \times_{\mathbb{R}} x. \end{aligned}$$

Exemple 2 – $(\mathbb{R}^n; +; \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel :

Les ensembles $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ identifiés à l'ensemble des vecteurs du plan et de l'espace respectivement munis de la somme vectorielle et du produit des vecteurs par les réels, sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

De manière générale, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}^n$ les lois :

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ ((x_1, x_2, \dots, x_n); (y_1, y_2, \dots, y_n)) &\longmapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\lambda; (x_1, x_2, \dots, x_n)) &\longmapsto (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \end{aligned}$$

Le vecteur nul est $\overrightarrow{0}_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \dots, 0)$

Exemple 3 – $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$:

On munit $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des lois :

$$+ : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

$$\left((a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} ; (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right) \longmapsto (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

et

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

$$\left(\lambda ; (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right) \longmapsto \lambda \cdot (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

Le vecteur nul est la matrice nulle $\overrightarrow{0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}} = (0)_{n,p}$.

En particulier, pour $n = p$, l'ensemble $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ des matrices carrées est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

⚠ Attention

L'ensemble de toutes les matrices (sans spécification de taille) n'est pas un espace vectoriel (on ne peut pas additionner deux matrices de taille différente).

💡 Idée

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est, en fait, un peu plus qu'un ev car on peut le munir d'une multiplication interne.

Exemple 4 – $(\mathcal{F}(\Omega; \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel :

Soient Ω un ensemble quelconque. L'ensemble $\mathcal{F}(\Omega; \mathbb{R})$, noté aussi $\mathbb{R}^\Omega$ des fonctions de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ peut être muni des lois :

$$+ : \mathbb{R}^\Omega \times \mathbb{R}^\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega$$

$$(f; g) \longmapsto f + g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) + g(x)$$

et

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega$$

$$(\lambda; f) \longmapsto \lambda \cdot f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \lambda f(x)$$

Le vecteur nul $\overrightarrow{0_{\mathcal{F}(\Omega; \mathbb{R})}}$ est la fonction nulle $0_{\mathcal{F}(\Omega; \mathbb{R})} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto 0$$
⚠ Attention

$\mathcal{F}(\Omega; Y)$ n'est, en général, pas un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (pour les mêmes lois) si Y n'est pas un $\mathbb{R}$ -ev.

Exemples 5 :

- E1** • Si $\Omega = I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ dans l'exemple (4), on en déduit que l'ensemble $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$ des fonctions de I ou de dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.

Les fonctions $\cos, \exp, \dots$ sont des exemples de vecteurs de cet espace vectoriel.

- E2** • Si $\Omega = \mathbb{N}$, l'exemple (4) affirme que l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel dont le vecteur nul est la suite constante égale à $0_{\mathbb{R}}$.

La somme de deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et le produit d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par un réel λ étant la suite $(\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple 6 – $(\mathbb{R}[x]; +; \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel :

L'ensemble $\mathbb{R}[x]$ de toutes les fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de vecteur nul la fonction nulle et muni des lois :

$$+ : \quad \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}[x]$$

$$\left(x \mapsto \sum_{k \geq 0} a_k x^k ; x \mapsto \sum_{k \geq 0} b_k x^k \right) \mapsto x \mapsto \sum_{k \geq 0} (a_k + b_k) x^k$$

et

$$\cdot : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}[x] \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}[x]$$

$$\left(\lambda ; x \mapsto \sum_{k \geq 0} a_k x^k \right) \mapsto \lambda \cdot \sum_{k \geq 0} a_k x^k : x \mapsto \sum_{k \geq 0} (\lambda a_k) x^k.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel.

Le vecteur nul $\overrightarrow{0_{\mathbb{R}[x]}}$ est la fonction polynomiale nulle.

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel réel, $n \in \llbracket 2 ; +\infty \llbracket$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E .

II. SOUS-ESPACES VECTORIELS

II.1 – Définitions et généralités

Définition 2 – Sous-espace vectoriel :

Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E lorsque :

- D1** • F est non vide.
- D2** • $F \subset E$.
- D3** • $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x, y \in F, \lambda x + \mu y \in F$. (F est stable par combinaison linéaire)

À quoi bon cette histoire de sous-espace vectoriel ? Pour la raison qui suit :

Proposition 2 :

Si F un sous-espace vectoriel de E , alors F est un espace vectoriel.

 **Preuve :**

Idée

$\mathbb{R}[x]$ est, en fait, un peu plus qu'un ev car on peut le munir multiplication interne.

Piège

L'ensemble des fonctions polynomiales de degré exactement égal à n n'est pas un espace vectoriel.

Méthode

En particulier $0_E \in F$. Cela sera utile dans deux cas :

- pour montrer que F est non vide
- parfois pour montrer qu'un sous-ensemble n'est pas un sev !

- L'ensemble F est muni d'une addition et d'une loi externe.
- L'addition reste évidemment associative et commutative car ceci est vraie dans E contenant F .
- Comme $0_E \in F$, l'addition de F possède un élément neutre :

$$\forall x \in F, x +_F 0_E = x +_E 0_E = x.$$

- Soit $x \in F$. Alors $-x = (-1) \cdot_E x = (-1) \cdot_F x \in F$: tout élément de F admet un opposé qui est bien dans F .
- Les dernières propriétés, qui sont vraies lorsque x et y appartiennent à E , sont a fortiori vraies lorsque x et y appartiennent à F .



Exemple 7 :

$\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E ...

Méthode 1 :

Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on vérifiera qu'il est non vide et on montrera que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.

Exemples 8 – Dans les espaces de fonctions :

- L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Les ensembles $\mathcal{C}^\infty(I; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^k(I; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$ sont tous des sev de l'ensemble $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

Ils forment même une suite de sev pour l'inclusion.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[x]$ est un sev du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$.

On retrouve une suite de sev pour l'inclusion :

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_0[x] \subset \mathbb{R}_1[x] \subset \dots \subset \mathbb{R}_n[x] \subset \mathbb{R}_{n+1}[x] \subset \dots \subset \mathbb{R}[x].$$



Idée
La relation « être un sev » est transitive.

Exemples 9 – Dans les espaces de matrices :

Les ensembles

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales,
- $\mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures,
- $\mathcal{T}_{n,I}(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires inférieures,
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques,
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques,

sont des sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemples 10 – Dans l'espace des suites :

Notons $\mathcal{S}$ le $\mathbb{R}$ ev des suites réelles.

- L'ensemble $\mathcal{S}_b$ des suites bornées est un sev de $\mathcal{S}$.
- L'ensemble $\mathcal{S}_c$ des suites convergentes est un sev de $\mathcal{S}_b$.

Exemples 11 – Et bien d'autres :

- L'ensemble des fonctions définies, dérivables deux fois et telles que f'' est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$, muni de l'addition interne usuelle et de la multiplication scalaire.
- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.
- L'ensemble des solutions sur un intervalle I , d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(I; \mathbb{R})$.

Plus précisément,

- $\left\{ y \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}) / y' + a(x)y = 0 \right\}$ est un sev de $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$.
- $\left\{ y \in \mathcal{C}^2(I; \mathbb{R}) / y'' + ay' + by = 0 \right\}$ est un sev de $\mathcal{C}^2(I; \mathbb{R})$.
- L'ensemble des suites récurrentes linéaires est un sev du $\mathbb{R}$ ev des suites réelles ou complexes.

Exemple 12 :

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AM = MA\}$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Par définition : $F \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel.
- La matrice nulle commute avec A , donc $0_n \in F$: F est non vide.
- Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $M, N \in F$. Montrons que $\lambda M + \mu N \in F$.
 - On a déjà $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, donc $\lambda M + \mu N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - Ensuite :

$$\begin{aligned} A(\lambda M + \mu N) &= \lambda AM + \mu AN \\ &= \lambda MA + \mu NA && \begin{cases} M \in F, \text{ donc } AM = MA, \\ N \in F \text{ donc } AN = NA. \end{cases} \\ &= (\lambda M + \mu N)A \end{aligned}$$

Par conséquent : $\lambda M + \mu N \in F$.

Conclusion, F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (donc F est un espace vectoriel réel).

⚠ Attention

Être dans F c'est deux choses : être une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et commuter avec A

Exemple 13 :

Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0\}$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- Par définition : $F \subset \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel.
- La fonction nulle appartient à F : F est non vide.
- Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in F$. Montrons que $\lambda f + \mu g \in F$.
 - On a déjà $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel, donc $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
 - Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned}
 &(\lambda f + \mu g)''(x) - 3(\lambda f + \mu g)'(x) + 2(\lambda f + \mu g)(x) \\
 &= (\lambda f'' + \mu g'')(x) - 3(\lambda f' + \mu g')(x) + 2(\lambda f + \mu g)(x) \\
 &= \lambda f''(x) + \mu g''(x) - 3\lambda f'(x) - 3\mu g'(x) + 2\lambda f(x) + 2\mu g(x), \\
 &= \lambda(f''(x) - 3f'(x) + 2f(x)) + \mu(g''(x) - 3g'(x) + 2g(x)) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, $\lambda f + \mu g \in F$.

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (donc F est un espace vectoriel réel).

Exemples 14 :

- E1** • L'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_2[x] / P(0) = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$ car il ne contient pas la fonction polynomiale nulle.
- E2** • Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{(0, 0)\}, \mathbb{R}^2$ ainsi que les droites passant par $(0, 0)$.

⚠ Attention
 $F \cup G$ n'est un sev que si
 $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exemple 15 :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel réel E .

Montrons que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .

- Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , on a $F \subset E$ et $G \subset E$. Donc $F \cap G \subset E$.
- Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , on a $0_E \in F$ et $0_E \in G$. Ainsi $0_E \in F \cap G$: $F \cap G$ est non vide.
 Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $x, y \in F \cap G$. Montrons que $\lambda x + \mu y \in F \cap G$.
 - On a déjà $x, y \in E$ et E est un espace vectoriel, donc $\lambda x + \mu y \in E$.
 - De la même façon, $\lambda x + \mu y \in F$ et $\lambda x + \mu y \in G$.
 Par conséquent, $\lambda x + \mu y \in F \cap G$.

Conclusion : $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .

II.2 – Sous-espaces vectoriels engendrés

Voyons un cas particulier de sous-espace vectoriel...

Définition 3 – Combinaison linéaire :

Soit $x \in E$.

On dit que x est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ lorsqu'il existe des réels

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$$

Exemples 16 :

E1 • Pour tous réels a et b , la matrice colonne $v = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a + b \end{pmatrix}$ est

une combinaison linéaire de la famille d'éléments $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

E2 • Le vecteur $P = 3 \cdot \mathbb{1} + (-2) \cdot X + X^2 + 6 \cdot X^4 = 3 - 2X + X^2 + 6X^4$ est une combinaison linéaire de la famille d'éléments $(\mathbb{1} : x \mapsto 1, X : x \mapsto x, X^2 : x \mapsto x^2, X^4 : x \mapsto x^4)$ de $\mathbb{R}_4[x]$.

Exemple 17 :

Soient $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

E1 • Montrons que $U = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de X et Y .

E2 • Montrons que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire de X et Y .

E3 • L'ensemble des combinaisons linéaires de X et Y est : $\left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

E1 • Assez facilement, $U = 2Y - 5X$ donc U est combinaison linéaire de X et Y .

E2 • Supposons que V le soit *i.e.* qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $V = aX + bY$.

On aurait alors :

$$\begin{aligned} V = aX + bY &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ b = 2 \\ b = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système ne possède aucune solution donc il n'existe pas de tels a et b .

Conclusion, V n'est pas combinaison linéaire de X et Y .

Théorème 3 :

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ est un sous-espace vectoriel de E .

 **Preuve :** Notons F l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$. Autrement dit :

$$F = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

— Soit $x \in F$. Il existe, par définition, des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$.

Puisque $e_1, \dots, e_n \in E$ et que E est un espace vectoriel : $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \in E$.

Autrement dit, $x \in E$ et $F \subset E$.

— $\overline{0_E} = \sum_{k=1}^n 0 \times e_k$ donc $\overline{0_E} \in F$ et F est non vide.

— Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $x, y \in F$. Montrons que $ax + by \in F$.

Puisque $x \in F$, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$. De même, comme $y \in F$, il existe

des réels $\mu_1, \dots, \mu_n$ tels que $y = \sum_{k=1}^n \mu_k e_k$. Ainsi :

$$\begin{aligned} ax + by &= a \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k + b \sum_{k=1}^n \mu_k e_k \\ &= \sum_{k=1}^n (a\lambda_k + b\mu_k) e_k \end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a\lambda_k + b\mu_k \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $ax + by$ est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \dots, e_n$. Autrement dit,

$$ax + by \in F.$$

Conclusion, F est un sous-espace vectoriel de E . 

Définition 4 – Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs :

L'espace vectoriel des combinaisons linéaires des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ est appelé sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, et noté

$$\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n).$$

Cas particulier : Le sous-espace vectoriel engendré par un unique vecteur est l'ensemble de ses multiples :

$$\text{Vect}(e) = \{\lambda \cdot e, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Exemples 18 :

- E1** • On convient que $\text{Vect}(\emptyset) = \{0\}$.
- E2** • Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $\text{Vect}(\vec{u})$ est une droite vectorielle.
- E3** • Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace, alors $\text{Vect}(\vec{u}; \vec{v})$ est un plan vectoriel.
- E4** • Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel engendré par $X = \{e_n : x \mapsto x^n / n \in \mathbb{N}\}$ est l'espace des fonctions polynomiales.

Méthode 2 :

Pour démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E , on pourra tenter de l'écrire comme le sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs de E .

Exemple 19 :

Considérons $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a & a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a & a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Puisque $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 4 :

Soient $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ des vecteurs de E .

À retenir

C'est le plus petit espace vectoriel, au sens de l'inclusion, contenant les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Méthode

Écrire un ensemble comme un sev engendré équivaut à expliciter cet ensemble. S'il est déjà donné de façon explicite, il n'y a plus grand chose à faire...

Idée

L'intérêt de ces propriétés est de pouvoir « réduire » la famille de vecteurs qui engendre $\text{Vect}(\dots)$.

P1 • Si e_{n+1} est une combinaison linéaire de $e_1, e_2, \dots, e_n$, alors $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{n+1}) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

En particulier : $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n, 0_E) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

P2 • $\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^*, \text{Vect}(\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_2, \dots, \alpha_n e_n) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

P3 • $\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}, \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \text{Vect}\left(e_1, e_2, \dots, e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i\right)$.

 **Preuve** : Pas très difficiles... laissées au lecteur.



Exemple 20 :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+2y+z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} &= \left\{ x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Il semble maintenant que l'on ne puisse plus simplifier la famille obtenue... C'est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Idée

$$\begin{aligned} \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ \parallel \\ \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

III. BASES ET DIMENSION

III.1 – Familles libres, génératrices, bases

Définition 5 :

D1 • On dit que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E lorsque

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k.$$

Autrement dit, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E lorsque

$$E = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n).$$

D2 • On dit que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille libre de E lorsque :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0_E \implies (\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_i = 0).$$

Autrement dit, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est *libre* lorsque la seule combinaison linéaire donnant 0_E est la combinaison linéaire triviale.

Idée

Une famille de vecteurs est liée s'il existe une combinaison linéaire nulle avec des scalaires non tous nuls.

Si la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre, on dit que les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ sont *linéairement indépendants*.

D3 • On dit que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est *liée* lorsque elle n'est pas libre.

D4 • On dit que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une *base* de E lorsque

$$\forall x \in E, \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k.$$

Commençons par donner (sans justifier) quelques bases usuelles :

Exemples 21 – Fondamental :

E1 • La famille $((1, 0), (0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

E2 • La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

E3 • La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

E4 • La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

E5 • La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

E6 • La famille $(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

E7 • La famille $(x \mapsto 1, x \mapsto x, \dots, x \mapsto x^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Exemple 22 :

Montrons que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Supposons $a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{2,1}$.

À retenir

Toutes les bases données sont les *bases canoniques* des EV mentionnés. Ce sont les bases naturelles dans lesquelles on travaille.

Attention

On dit UNE base et non La base.

Idée

Plus généralement, la famille des matrices $E_{i,j}$ dont le seul coefficient non nul égal à 1 est situé sur la i ème ligne et la j ème colonne, forme une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Alors,

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{2,1} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a - b = 0 \\ 3b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Donc, $a = b = 0$.

Conclusion, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

À retenir

Deux vecteurs sont libres ou linéairement indépendants lorsqu'ils sont non co-linéaires.

Exemple 23 :

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est-elle une famille libre de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$?

En remarquant que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{2,1},$$

sans que les scalaires devant les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ soient tous nuls.

Conclusion, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille liée de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

À retenir

Pour montrer qu'une famille est liée, il suffit d'écrire un de ses vecteur en fonction des autres.

Exemple 24 :

Montrons que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

À retenir

Un famille de matrices colonnes dont les coefficients sont échelonnés est toujours libre.

Supposons qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$. Alors,

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{3,1} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 0 \\ a + b &= 0 \\ a + b + c &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc, $a = b = c = 0$. Conclusion, le seul triplet de scalaires $(a; b; c)$ rendant cette combinaison linéaire nulle étant $(0; 0; 0)$, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exemple 25 :

Notons $f_1 : x \mapsto 1$, $f_2 : x \mapsto 1 + x$ et $f_3 : x \mapsto 1 + x + x^2$.

Montrons que (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de $\mathbb{R}_2[x]$.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0_{\mathbb{R}_2[x]}$. Autrement dit,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, 1 + a(1 + x) + b(1 + x + x^2) &= 0 \\ a + b + c + (b + c)x + cx^2 &= 0 \\ (a + b + c)e_0 + (b + c)e_1 + ce_2 &= 0, \end{aligned}$$

où $e_0 : x \mapsto 1$, $e_1 : x \mapsto x$ et $e_2 : x \mapsto x^2$.

Or, (e_0, e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}_2[x]$ (c'est même la base canonique). Elle est, en particulier, libre. Par conséquent,

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

D'où immédiatement, $a = b = c = 0$.

Conclusion, la famille (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de $\mathbb{R}_2[x]$.

Des choses bien utiles :

À retenir :

- Une famille contenant le vecteur nul est liée.
- Une famille contenant deux fois le même vecteur est liée.
- Une famille dont l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des autres est liée.
- Une famille formée d'un seul vecteur est libre si, et seulement si, ce vecteur est non nul.

Attention
Il s'agit d'une égalité de fonctions !

À retenir
Une famille de fonctions polynomiales non nulles échelonnées en degré est libre.

- Une famille formée uniquement de deux vecteurs est libre si, et seulement si, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
- Une famille de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou de $\mathbb{R}^n$ dont les coefficients sont échelonnés est libre.
- Une famille de fonctions polynomiales échelonnées en degré est libre.
- Une sous-famille d'une famille libre est libre.
- Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Les définitions précédentes impliquent naturellement la propriété suivante, qui sera très utile en pratique :

Théorème 5 :

Une famille de vecteurs de E est une base si, et seulement si, elle est libre et génératrice.

À retenir

- Le caractère « générateur » équivaut à l'existence d'une décomposition en combinaison linéaire.
- Le caractère « libre » équivaut à l'unicité (si existence) d'une décomposition en combinaison linéaire.

Preuve : Procédons par double implication.

$\Rightarrow$: Supposons que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

- Montrons que $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E .

Soit $x \in E$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , il existe un unique donc au moins un n -uplet de réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$.

Conclusion, $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E .

- Montrons que $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0_E$.

Or, $\overrightarrow{0_E}$ s'écrit aussi $\overrightarrow{0_E} = \sum_{k=1}^n 0 \times e_k$.

Comme la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , la décomposition de $\overrightarrow{0_E}$ est unique.

D'où, $\forall k \in [1; n], \lambda_k = 0$.

Conclusion, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

$\Leftarrow$: Supposons que $(e_1, \dots, e_n)$ est libre et génératrice et montrons

$$\forall x \in E, \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k.$$

Soit donc x un vecteur quelconque de E .

- Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E , il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$.
L'existence est prouvée.

- Supposons qu'il existe un autre n -uplet $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^n \mu_k e_k$ i.e.

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = \sum_{k=1}^n \mu_k e_k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (\lambda_k - \mu_k) e_k = \overrightarrow{0_E}.$$

Or, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre dans E .

À retenir

- Pour démontrer l'unicité, deux méthodes :
- Par l'absurde : supposer qu'il en existe deux différents et aboutir à une absurdité.
 - Supposer l'existence de deux décompositions et montrer qu'ils sont égaux.

Donc, $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_k - \mu_k = 0$.

Autrement dit, $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_k = \mu_k$ et la décomposition est unique d'où le résultat.

On vient de montrer l'existence et l'unicité de la décomposition de u dans $(e_1, \dots, e_n)$ i.e. que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .



En fait, il existe un théorème hors-programme qui affirme que :

- de toute famille génératrice, on peut extraire une sous-famille libre et génératrice.
- toute famille libre peut être complétée en une famille libre et génératrice.

Exemple 26 :

Donnons une base de l'espace vectoriel F étudié dans l'exemple (19) .

On avait obtenu $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$.

Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$ est :

- génératrice de F par définition.
- libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires.

Autrement dit, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de F .

Exemple 27 :

Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = 0_{3,1}\}$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminons-en une base.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in F \iff AX = 0_{3,1}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x + y + 4z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}]{\iff} \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y = -2z \\ y = -z \\ z = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -z \\ y = -z \\ z = z \end{cases}$$

$$\iff X = z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $F = \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Comme $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

De surcroît, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille de F qui est :

- génératrice de F par définition.
- libre car constituée d'une unique vecteur **non nul**.

Conclusion, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de F .

⚠ Piège

La famille (e) est une famille libre si, et seulement si $e \neq \vec{0}$.
À préciser donc !

Proposition 6 :

Si $\mathcal{F}_l$ est une famille libre de E et $\mathcal{F}_g$ est une famille génératrice de E , alors

$$\text{card}(\mathcal{F}_l) \leq \text{card}(\mathcal{F}_g).$$

 **Preuve :** Résultat admis.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une famille libre $\mathcal{F}_l$ et une famille génératrice $\mathcal{F}_g$ de E telles $\text{card}(\mathcal{F}_l) > \text{card}(\mathcal{F}_g)$.

Notons $n = \text{card}(\mathcal{F}_l) > m = \text{card}(\mathcal{F}_g)$ ainsi que $\mathcal{F}_l = (e_1, \dots, e_m)$ et $\mathcal{F}_g = (f_1, \dots, f_n)$.

- Puisque $(f_1, \dots, f_n)$ est génératrice de E et que $e_1 \in E$, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $e_1 = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$.

Au moins un de ces λ_i est non nul, sinon on aurait $e_1 = 0_E$ et la famille $\mathcal{F}_l$ ne serait pas libre.

Quitte à réordonner les vecteurs de $\mathcal{F}_g$, on peut supposer que $\lambda_n \neq 0$.

On obtient alors :

$$f_n = \frac{1}{\lambda_n} (\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{n-1} f_{n-1} - e_1) \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_{n-1}, e_1).$$

Par conséquent, $E = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_{n-1}, e_1)$: la famille $(f_1, \dots, f_{n-1}, e_1)$ est donc génératrice de E .

- On itère le raisonnement :

De la même façon, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ et μ_1 tels que $e_2 = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{n-1} f_{n-1} + \mu_1 e_1$.

Au moins un des λ_i est non nul, sinon e_2 serait multiple de e_1 et donc la famille $\mathcal{F}_l$ ne serait pas libre.

En procédant comme ci-dessus, on obtient finalement (quitte à réordonner les vecteurs de $(f_1, \dots, f_{n-1})$) que $E = \text{Vect}(f_1, \dots, f_{n-2}, e_1, e_2)$ i.e. la famille $(f_1, \dots, f_{n-2}, e_1, e_2)$ est génératrice de E .

- On poursuit ainsi et au bout de n étapes de ce raisonnement, on obtient que la famille $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ i.e. la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E .

Par conséquent, le vecteur e_{n+1} , qui existe bien car $m > n + 1$, s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \dots, e_n$ ce qui contredit la liberté de la famille $(e_1, \dots, e_m)$.

Conclusion, notre hypothèse initiale ne peut être vraie i.e. $\text{card}(\mathcal{F}_l) \leq \text{card}(\mathcal{F}_g)$. 

III.2 – Dimension d'un espace vectoriel

La **proposition (6)** justifie la définition ci-dessous :

Définition 6 – EV de dimension finie :

On dit que E est de dimension finie lorsqu'il admet une famille génératrice constituée d'un nombre fini de vecteurs.

Théorème 7 :

Si E admet une base de cardinal fini, alors toutes ses bases sont de cardinal fini et de même cardinal.

 **Preuve :** *Résultat admis.*

Supposons que E est de dimension finie.

- Puisque E est de dimension finie, E possède une famille génératrice de cardinal fini, noté n . Par conséquent, d'après la **proposition (6)**, toutes les familles libres de E sont de cardinal inférieur ou égal à n . Ce sera donc le cas des bases de E qui sont, en particulier, libres. sont de cardinal fini, car de cardinal inférieur ou égal à n .

Conclusion : toutes les bases de E sont de cardinal fini.

Rappel

En ECG - Mathématiques appliquées, l'algèbre linéaire se limite au cas des EV de dimension finie.

Attention

Tout EV de dimension finie possède une infinité de bases.

— Considérons maintenant $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E .

Puisque $\mathcal{B}$ est libre et que $\mathcal{B}'$ est génératrice, toujours d'après la **proposition (6)**, $\text{card}(\mathcal{B}) \leq \text{card}(\mathcal{B}')$.

Mais, par symétrie, $\mathcal{B}$ est génératrice et $\mathcal{B}'$ est libre, donc, la **proposition (6)** toujours, $\text{card}(\mathcal{B}') \leq \text{card}(\mathcal{B})$.

Par double inégalité, on obtient donc :

$$\text{card}(\mathcal{B}) = \text{card}(\mathcal{B}').$$

Conclusion, toutes les bases de E ont même cardinal.



Le **théorème (7)** nous permet de donner la définition suivante :

Définition 7 :

Si E est de dimension finie, on appelle *dimension de E* , notée $\dim(E)$, le cardinal commun de toutes ses bases.

Exemples 28 :

- E1** • $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
- E2** • $\dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})) = 2$ et $\dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n$.
- E3** • $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$ et $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = n \times p$.
- E4** • $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$ et $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$.
- E5** • $\mathbb{R}[x]$, $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ... sont des espaces vectoriels de dimension infinie.

À retenir
À savoir parfaitement

On a les propriétés suivantes souvent utiles :

Proposition 8 :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F un sous-ensemble de E et $\mathcal{F}$ une famille de E .

- P1** • Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$, avec égalité si, et seulement si, $F = E$.
- P2** • Si $\mathcal{F}$ est une famille libre de E , alors $\text{card}(\mathcal{F}) \leq \dim(E)$.
- P3** • Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E , alors $\text{card}(\mathcal{F}) \geq \dim(E)$.

Preuve : Résultats admis.

P1 • Posons $n = \dim(E)$.

— Si $F = \{0\}$, $\dim(F) = 0$ et donc $\dim(F) \leq \dim(E)$.

Sinon, il existe un vecteur e_1 non nul dans F . Considérons $\mathcal{F}_1 = \{e_1\}$.

— Si $\mathcal{F}_1$ engendre F , alors F est de dimension finie et $\dim(F) = 1$.

Sinon, il existe $e_2 \in F$ tel que $e_2 \notin \text{Vect}(\mathcal{F}_1)$ i.e. $\mathcal{F}_2 = \{e_1, e_2\}$ est libre.

On réitère le raisonnement et au bout de p étapes, on obtient $\mathcal{F}_p = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ une famille libre, avec $e_1, e_2, \dots, e_p \in F$.

- Si $\mathcal{F}_p$ engendre F , alors F est de dimension finie et $\dim(F) = p$.
- Sinon, il existe $e_{p+1} \in F$ tel que $e_{p+1} \notin \text{Vect}(\mathcal{F}_p)$ i.e. $\mathcal{F}_{p+1} = \{e_1, e_2, \dots, e_{p+1}\}$ est libre.
- ...

Si le procédé ne s'est pas arrêté avant $n + 1$, on aura construit une famille libre de $n + 1$ éléments dans un espace de dimension n ce qui contredira la **proposition (6)**. C'est absurde.

Le procédé s'arrête donc avant n i.e. F est de dimension finie, et $\dim(F) = p \leq n$.

Pour le cas d'égalité, si $F = E$, le résultat est évident.

Malheureusement, la réciproque nécessite le théorème de la base incomplète ou de la base extraite qui n'est pas à notre programme. On l'admettra donc... avec regrets.

P2 • Supposons que $\mathcal{F}$ est une famille libre de E . Considérons $\mathcal{B}$ une base de E .

Puisque $\mathcal{B}$ est génératrice de E , d'après la **proposition (6)**, $\text{card}(\mathcal{F}) \leq \text{card}(\mathcal{B})$.

Or, $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$.

D'où le résultat.

P3 • Supposons que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E . Considérons $\mathcal{B}$ une base de E .

Puisque $\mathcal{B}$ est une famille libre de E , d'après la **proposition (6)**, $\text{card}(\mathcal{F}) \geq \text{card}(\mathcal{B})$.

Or, $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$.

D'où le résultat.



Exemple 29 :

La famille $((1, 0, 1), (0, 1, 0))$ de $\mathbb{R}^3$

- est libre,
- n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$,
- n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Et une dernière propriété, très utile en pratique :

Corollaire 9 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- C1** • Toute famille génératrice de n vecteurs est une base de E .
- C2** • Toute famille libre de n vecteurs est une base de E .

Preuve : Résultats admis.

Les implications directes sont immédiates, les implications réciproques ne sont pas accessibles facilement car elles nécessitent le théorème de la base incomplète, vu en Mathématiques Approfondies...sorry again.

Méthode 3 :

Pour montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel, trois méthodes sont possibles :

- M1** • Montrer qu'elle est libre et génératrice.

À retenir

Une base est une famille libre maximale ou une famille génératrice minimale.

Idée

Quand on connaît la dimension de l'espace vectoriel étudié, on met presque toujours en place la seconde méthode ! F. PUCCI

- M2** • Montrer qu'elle est libre et de cardinal égal à la dimension de l'espace vectoriel en question.
- M3** • Montrer qu'elle est génératrice et de cardinal égal à la dimension de l'espace vectoriel en question.

Exemple 30 :

Montrons que la famille $((1, 2), (-1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

La famille $((1; 2), (-1; 1))$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui est :

- libre car seulement constituée de deux vecteurs **non colinéaires**,
- de cardinal 2, égal à $\dim(\mathbb{R}^2)$.

Conclusion : la famille $((1; 2), (-1; 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 31 :

Montrons que la famille $(x \mapsto 1, x \mapsto 1 + x, x \mapsto 1 + x + x^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

La famille $(x \mapsto 1, x \mapsto 1 + x, x \mapsto 1 + x + x^2)$ est une famille de $\mathbb{R}_2[x]$ qui est :

- libre car constituée de fonctions polynomiales échelonnées en degré,
- de cardinal 3, égal à $\dim(\mathbb{R}_2[x])$.

Conclusion : La famille $(x \mapsto 1, x \mapsto 1 + x, x \mapsto 1 + x + x^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

III.3 – Coordonnées des vecteurs dans une base**Définition 8 – Coordonnées d'un vecteur dans une base, matrice de coordonnées :**

Soient E un espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $x \in E$. Il existe alors un unique n -uplet $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^n u_k e_k$.

- D1** • Le n -uplet $(u_1, \dots, u_n)$ est appelé n -uplet de coordonnées de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.
- D2** • On appelle matrice représentative de x dans la base $\mathcal{B}$ (ou matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$) la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, définie par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

⚠ Attention
La matrice dépend de la base choisie !

i Remarque

Après avoir vu le chapitre sur les applications linéaires, nous pourrions dire que l'application

$$\begin{aligned}\Phi : E &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ x &\longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)\end{aligned}$$

est un isomorphisme de E dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Théorème 10 – Isomorphisme de représentation :

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E .

T1 • $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda x + \mu y) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$

T2 • $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists ! x \in E / X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$

Preuve : Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

T1 • Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $x, y \in E$.

Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , il existe des uniques n -uplets $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $x = \sum_{k=1}^n u_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^n v_k e_k$.

On a ainsi :

$$\begin{aligned}\lambda x + \mu y &= \lambda \sum_{k=1}^n u_k e_k + \mu \sum_{k=1}^n v_k e_k \\ &= \sum_{k=1}^n (\lambda u_k + \mu v_k) e_k\end{aligned}$$

Ainsi, par unicité des coordonnées du vecteur $\lambda x + \mu y$ dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda x + \mu y) &= \begin{pmatrix} \lambda u_1 + \mu v_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n + \mu v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y).\end{aligned}$$

Méthode

Si $u_1, \dots, u_n$ sont les coordonnées de x et $v_1, \dots, v_n$ celles de y , alors $\lambda u_1 + \mu v_1, \dots, \lambda u_n + \mu v_n$ sont celles de $\lambda x + \mu y$.

T2 • Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Existence : Il suffit de poser $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$.

Ainsi, $x \in E$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = X$. D'où l'existence.

Unicité : Supposons qu'il existe $x, y \in E$ tels que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = X$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = X$.

Par conséquent, en notant $(u_1, \dots, u_n)$ et $(v_1, \dots, v_n)$ les n -uplets respectifs des coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \iff \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, u_k = v_k \\ &\implies \sum_{k=1}^n u_k e_k = \sum_{k=1}^n v_k e_k \iff x = y.\end{aligned}$$

D'où l'unicité.



Exemples 32 :

E1 • Notons $x = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$.

— La matrice des coordonnées du vecteur x dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$i.e. \text{Mat}_{bc}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

En effet, $(1, 2) = 1 \cdot (1, 0) + 2 \cdot (0, 1)$.

— Nous avons vu à exemple (30) que $((1, 2), (-1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Dans cette base que nous noterons $\mathcal{B}$, le vecteur $(1; 2)$ s'écrit :

$$(1, 2) = 1 \cdot (1, 2) + 0 \cdot (-1, 1).$$

$$\text{Autrement dit } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

E2 • Notons $\mathcal{B} = (x \mapsto 1, x \mapsto 1 + x, x \mapsto 1 + x + x^2)$. On a vu à l'exemple (31) que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

On sait, d'après le **théorème (10)** qu'il existe une unique fonction $P \in \mathbb{R}_2[x]$ telle

$$\text{que } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Cette fonction est, en fait, la fonction

$$P : x \mapsto 1 \cdot 1 - 1 \cdot (1 + x) + 2 \cdot (1 + x + x^2) = 2 + x + x^2.$$

L'unique fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}_2[x]$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est donc

$$P : x \mapsto 2 + x + x^2.$$

i Remarque

Cette même fonction admet comme matrice de coordonnées dans la base canonique

de $\mathbb{R}_2[x]$ la matrice $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

IV. RANG D'UNE FAMILLE DE VECTEURS

Définition 9 – Rang d'une famille de vecteurs :

On appelle *rang* de la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, noté $\text{rg}(e_1, e_2, \dots, e_n)$, la dimension de $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Proposition 11 :

P1 • Si E est de dimension finie p , alors $\text{rg}(e_1, e_2, \dots, e_n) \leq \min(n, p)$.

P2 • $\text{rg}(e_1, \dots, e_n) = n$ si, et seulement si, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

 **Preuve :** Soit E de dimension finie p .

P1 • Notons $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

 À retenir

$$x \leq \min(n, p)$$



$$\begin{cases} x \leq p \\ \text{et} \\ x \leq n \end{cases}$$

— Comme F est un sous-espace vectoriel de E , d'après la **proposition (8)** **P1** $\dim(F) \leq \dim(E)$ qui s'écrit encore :

$$\text{rg}(e_1, \dots, e_n) \leq p.$$

— Ensuite, par définition, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de F . La **proposition (8)** **P3** donne encore $\text{card}(e_1, \dots, e_n) \geq \dim(F)$ qui se traduit par :

$$n \geq \text{rg}(e_1, \dots, e_n).$$

Conclusion : $\text{rg}(e_1, \dots, e_n) \leq \min(n, p)$.

P2 • Raisonnons par double implication.

$\Rightarrow$: Supposons que $\text{rg}(e_1, \dots, e_n) = n$ i.e. $\dim(\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)) = n$.

Par conséquent, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est :

- génératrice de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ par définition,
- de cardinal égal à $\dim(\text{Vect}(e_1, \dots, e_n))$.

D'après le **corollaire (9)**, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est donc une base de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

En particulier, elle est libre.

$\Leftarrow$: Supposons que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

Étant aussi génératrice de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ par définition, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ en forme une base et ainsi :

$$\text{rg}(e_1, \dots, e_n) = \dim(\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)) = \text{card}(e_1, \dots, e_n) = n.$$



Méthode 4 :

Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, on cherche à la réduire jusqu'à la rendre libre.

La **proposition (11)** **P2** nous assure alors que son cardinal est la valeur cherchée.

Exemple 33 :

Déterminons le rang de la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

On a :

$$\text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \dim \left(\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right)$$

On supprime le vecteur nul et le vecteur lié $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$= \dim \left(\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right)$$

On supprime les vecteurs combinaisons linéaires des autres comme $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$= \dim \left(\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right)$$

Or, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

$$= 2.$$

V. RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR L'INVERSIBILITÉ DE MATRICES

Définition 10 – Matrice inversible :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que la matrice A est inversible lorsqu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$.

Une telle matrice B est appelée inverse de A .

Proposition 12 – Unicité de l'inverse :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A est inversible, alors elle admet une unique matrice inverse que l'on note A^{-1} .

 **Preuve :** Supposons que A est inversible et admette deux inverses B et C . Montrons que $B = C$.

Il suffit de suivre les définitions :

$$\boxed{AB} = BA = I_n = \boxed{AC} = CA$$

$$AB = AC$$

On multiplie à gauche les deux membres par B :

$$\boxed{BA} B = \boxed{BA} C$$

Or, $BA = I_n$

$$B = C.$$

D'où l'unicité



Idée

L'inverse de la transposée est la transposée de l'inverse.

Proposition 13 – Inversibilité de la transposée :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La matrice A est inversible si, et seulement si, la matrice tA est inversible.

Le cas échéant :

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}) \iff A^{-1} = {}^t({}^tA)^{-1}.$$

Preuve : On procède par double implication et, dans les deux cas, on exhibe un inverse conformément à la **définition (10)** :

— Supposons que A est inversible *i.e.* les écritures A^{-1} et ${}^t(A^{-1})$ sont valides.

$$\begin{aligned} {}^tA {}^t(A^{-1}) &= {}^t(A^{-1}A) && \text{(propriété de } {}^t) \\ &= {}^tI_n && \text{(définition de } A^{-1}) \\ &= I_n. \end{aligned}$$

De même,

$${}^t(A^{-1}) {}^tA = {}^tA(A^{-1}) = {}^tI_n = I_n.$$

Par conséquent, tA est inversible d'inverse $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

— Le raisonnement est identique en supposant tA inversible. On forme successivement les deux calculs :

$$A({}^tA)^{-1} = {}^t({}^tA)^{-1} {}^tA = {}^tI_n = I_n.$$

Et,

$$({}^tA)^{-1}A = {}^t({}^tA({}^tA)^{-1}) = {}^tI_n = I_n.$$

Donc, A est inversible d'inverse $A^{-1} = {}^t({}^tA)^{-1}$.

**Théorème 14 – Caractérisations de l'inversibilité d'une matrice :**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- T1** • A est inversible.
- T2** • $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AB = I_n$.
- T3** • $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / BA = I_n$.
- T4** • la famille des colonnes de A est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- T5** • la famille des lignes de A est une base de $\mathbb{R}^n$.
- T6** • pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système linéaire $AX = Y$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, possède une unique solution.
- T7** • pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système linéaire $AX = Y$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, possède au moins une solution.
- T8** • Le système linéaire $AX = 0_{n,1}$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, admet $0_{n,1}$ comme unique solution.

Preuve : On a déjà de façon immédiate :

$$\boxed{\text{T1}} \implies \boxed{\text{T2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{T3}}$$

Ainsi que ,

$$\boxed{\text{T6}} \implies \boxed{\text{T7}} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{T8}}$$

Avant d'aller plus loin, remarquons que, en notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A , si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
alors :

$$AX = x_1 C_1 + \dots + x_n C_n.$$

- **T6** $\Leftrightarrow \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists ! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / Y = AX$
 $\Leftrightarrow \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists ! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / Y = x_1 C_1 + \dots + x_n C_n$
 $\Leftrightarrow$ La famille $(C_1, \dots, C_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
 $\Leftrightarrow$ **T4**
- **T7** $\Leftrightarrow \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / Y = AX$
 $\Leftrightarrow \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / Y = x_1 C_1 + \dots + x_n C_n$
 $\Leftrightarrow$ La famille $(C_1, \dots, C_n)$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de cardinal n .
 $\Leftrightarrow$ D'après le corollaire (9), c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
 $\Leftrightarrow$ **T4**
- **T8** $\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), (AX = 0_{n,1} \Leftrightarrow X = 0_{n,1})$
 $\Leftrightarrow \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, (x_1 C_1 + \dots + x_n C_n = 0_{n,1} \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0)$
 $\Leftrightarrow$ La famille $(C_1, \dots, C_n)$ est libre de cardinal n .
 $\Leftrightarrow$ D'après le corollaire (9), c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
 $\Leftrightarrow$ **T4**.
- On montre **T1** $\Leftrightarrow$ **T6** par double implication.
 - Supposons **T1** i.e. que A est inversible.
 Soient $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y.$$

Le système $AX = Y$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ possède donc une unique solution et **T6** est vérifié.

- Réciproquement, supposons **T6** i.e. que pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le système $AX = Y$ admet une unique solution.

L'objectif est de trouver une matrice B telle que $AB = BA = I_n$. On va la construire colonne par colonne :

- D'après **T6**, pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, si Y_i désigne la i ème colonne de la matrice I_n , alors le système $AX = Y_i$ possède une unique solution, notée B_i .

En posant B la matrice dont les colonnes sont $B_1, B_2, \dots, B_n$, on a bien $AB = I_n$ par construction.

- Il reste à montrer que $BA = I_n$ i.e. que A est bien inversible d'inverse B .

Il est assez clair que $A(BA - I_n) = (AB)A - A = I_n A - A = 0$, donc $BA - I_n$ est solution de l'équation $AX = 0$.

Or, $(0)_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ en est évidemment une autre.

D'après **T6**, ce système ne peut posséder qu'une seule solution par hypothèse.

Donc, $BA - I_n = (0)_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \Leftrightarrow BA = I_n$.

La matrice A est bien inversible et **T1** est vérifié.

À ce stade, par transitivité de $\Leftrightarrow$, nous avons démontré :

$$\begin{aligned}
& \boxed{\text{T1}} \Rightarrow \boxed{\text{T2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{T3}} \\
& \boxed{\text{T6}} \Rightarrow \boxed{\text{T7}} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{T8}} \\
& \boxed{\text{T1}} \Leftrightarrow \boxed{\text{T4}} \Leftrightarrow \boxed{\text{T6}} \Leftrightarrow \boxed{\text{T7}} \Leftrightarrow \boxed{\text{T8}}
\end{aligned}$$

— $\boxed{\text{T1}} \Leftrightarrow {}^tA$ est inversible

$\Leftrightarrow$ La famille des colonnes de tA est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car $\boxed{\text{T1}} \Leftrightarrow \boxed{\text{T4}}$.

$\Leftrightarrow$ La famille des lignes de A est une base de $\mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow \boxed{\text{T5}}$

— Supposons $\boxed{\text{T2}}$ et montrons $\boxed{\text{T7}}$:

Supposons l'existence d'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$.

Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On a $A(BY) = (AB)Y = Y$, donc BY est solution de l'équation $AX = Y$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

C'est bien le résultat de $\boxed{\text{T7}}$.

Comme $\boxed{\text{T1}} \Rightarrow \boxed{\text{T2}} \Rightarrow \boxed{\text{T7}}$ et $\boxed{\text{T7}} \Rightarrow \boxed{\text{T1}}$ car équivalent, on vient de montrer que :

$$\boxed{\text{T1}} \Leftrightarrow \boxed{\text{T2}} \Leftrightarrow \boxed{\text{T7}}$$

$$\boxed{\text{T1}} \Rightarrow \boxed{\text{T3}}$$

Sachant que $\quad \text{et} \quad$,

$$\boxed{\text{T1}} \Leftrightarrow \boxed{\text{T2}} \Leftrightarrow \boxed{\text{T4}} \Leftrightarrow \boxed{\text{T5}} \Leftrightarrow \boxed{\text{T6}} \Leftrightarrow \boxed{\text{T7}} \Leftrightarrow \boxed{\text{T8}}$$

il suffit de montrer que $\boxed{\text{T3}}$ implique l'une quelconque des autres propriétés pour conclure.

— Par exemple, montrons $\boxed{\text{T3}} \Rightarrow \boxed{\text{T8}}$:

Supposons l'existence d'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $BA = I_n$.

— On sait déjà que $0_{n,1}$ est solution de $AX = 0_{n,1}$.

— Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0_{n,1}$ i.e. une autre solution du système $AX = 0_{n,1}$.

Un petit calcul nous donne $X = I_n X = (BA)X = B(AX) = B \times 0_{n,1} = 0_{n,1}$ i.e. $X = 0_{n,1}$.

Le système linéaire $AX = 0_{n,1}$ admet seulement $0_{n,1}$ comme unique solution. c'est $\boxed{\text{T8}}$.

On triomphe en écrivant finalement :

$$\boxed{\text{T1}} \Leftrightarrow \boxed{\text{T2}} \Leftrightarrow \boxed{\text{T3}} \Leftrightarrow \boxed{\text{T4}} \Leftrightarrow \boxed{\text{T5}} \Leftrightarrow \boxed{\text{T6}} \Leftrightarrow \boxed{\text{T7}} \Leftrightarrow \boxed{\text{T8}}$$



INDEX

Corps, 5

Dimension, 24

Élément

neutre, 5

Espace

vectorel, 5

Groupe

abélien, 5

Loi

externe, 5

interne, 5

Scalaire, 5

Symétrique

d'un élément, 5

Vecteur, 5

nul, 5