

I. SOUS-ESPACES VECTORIELS

Exercice II.1 – (Sous-espaces vectoriels)

Parmi les sous-ensembles E_i de E ci-dessous dire lesquels sont des sous-espaces vectoriels.

1. $E = \mathbb{R}^4$.
 - a. $E_1 = \{(x, y, z, t) \in E / x = 1\}$.
 - b. $E_2 = \{(x, y, z, t) \in E / x = 0\}$.
 - c. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in E / y = z = t = 0\}$.
 - d. $E_4 = \{(x, y, z, t) \in E / x \neq y\}$.
2. E espace vectoriel de dimension finie tel que $E \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
 - a. $E_1 = \{f \in E / f \text{ dérivable}\}$.
 - b. $E_2 = \{f \in E / f \text{ continue}\}$.
 - c. $E_3 = \{f \in E / f \text{ discontinue}\}$.
 - d. $E_4 = \{f \in E / f \text{ croissante}\}$.
3. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - a. $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in E / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
 - b. $E_2 = \{A \in E / AB = BA, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\}$.
 - c. $E_3 = \{A \in E / A^2 = A\}$.
4. Soit $E = \mathbb{R}_5[x]$.
 - a. $E_1 = \{P \in E / P(0) = 0\}$.
 - b. $E_2 = \{P \in E / \deg(P) \geq 3\}$.

Exercice II.2 – (Pas des sous-espaces vectoriels!)

Dans chaque cas, F n'est pas un sous-espace vectoriel de E . Justifier pourquoi.

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 1\}$
2. $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) / y = x^2 \right\}$
3. $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $F = \left\{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
4. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / M^2 = 0_2\}$

Exercice II.3 – (L'ensemble des matrices symétriques)

Soit $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices symétriques sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Rappeler la définition d'une matrice symétrique et donner la forme générale des éléments de $\mathcal{S}_2$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice II.4 – (Combinaisons linéaires, colinéarité)

1. Dans $\mathbb{R}^2$,
 - a. $(3, 7)$ est-il combinaison linéaire de $(1, 1)$ et $(2, 3)$?
 - b. $(1, 1)$ est-il combinaison linéaire de $(2, 1)$ et $(3, 1)$?

- c. $(1, 1)$ est-il combinaison linéaire de $(2, 1)$, $(3, 1)$ et $(2, 4)$?
2. Dans $\mathbb{R}^3$, $(2, 4, 2)$ est-il combinaison linéaire de $(2, 1, 2)$, $(1, 1, 2)$ et $(0, 1, 1)$?
3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?
4. Dans $\mathbb{R}_3[x]$, donner deux vecteurs colinéaires?
5. Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donner deux vecteurs colinéaires?
6. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les fonctions $x \mapsto e^{2x}$ et $x \mapsto e^x$ sont-elles colinéaires? Les fonctions $x \mapsto 3^x$ et $x \mapsto 3^{x+1}$ sont-elles colinéaires?
7. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donner deux vecteurs colinéaires.

Exercice II.5 – (Familles libres, familles génératrices, bases)

Parmi les familles de vecteurs de E ci-dessous dire lesquelles sont libres, génératrices ou forment une base.

1. Dans $E = \mathbb{R}^3$.
 - a. $E_1 = ((1, 0, 1), (-1, 1, 2), (-2, 1, 2))$.
 - b. $E_2 = ((1, 0, 1), (-1, 1, 2), (0, 1, 3))$.
 - c. $E_3 = ((1, 0, 1), (2, 0, 3))$.
 - d. $E_4 = ((1, 0, 1), (2, 0, 3), (-1, 1, 1), (0, 0, 1))$.
2. $E = \mathbb{R}_3[x]$.
 - a. $E_1 = (1, X - 2, (X - 2)^2)$.
 - b. $E_2 = (3, X^2, -X^3, X)$.
3. E est un espace vectoriel de dimension 5 avec $E \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que E_1 et E_2 sont des familles d'éléments de E et $E_1 = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ où, $\forall i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, f_i est la fonction définie par $f_i(x) = e^{ix}$.
4. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - a. $E_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$.
 - b. $E_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$.
 - c. $E_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right)$.
5. $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $E_1 = (A, A^2)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice II.6 – (Sous-espaces vectoriels engendrés, base et dimension)

1. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ puis donner leur dimension :
 - a. $A = \text{Vect}((1, 2), (-3, -6))$.
 - b. $B = \text{Vect}((1, 2), (3, 4), (5, 6))$.
2. Déterminer une base de $A = \text{Vect}((1, 3, -3), (4, 2, -3), (-1, 7, 6))$ sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Quelle est alors la dimension de A ?
3. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ puis donner leur dimension :
 - a. $A = \text{Vect}((1, 2, -3, 4), (2, 4, -5, 1), (-2, -1, 2, 0), (3, 0, -1, -4))$.
 - b. $B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = 2y - z, t = x + y + z\}$.
4. Déterminer une base du sous-espace vectoriel $\text{Vect}(X - 1, (X - 1)^2)$ de $\mathbb{R}_3[x]$ puis donner sa dimension.
5. On suppose que la famille $\left(\left(\left(\frac{1}{2} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\left(\frac{1}{3} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}} \right)$ appartienne à un espace vectoriel de dimension finie E , $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Déterminer une base du sous-espace vectoriel $\text{Vect} \left(\left(\left(\frac{1}{2} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\left(\frac{1}{3} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}} \right)$ de E puis donner sa dimension.

Exercice II.7

Dans chaque cas, démontrer que F est un espace vectoriel puis en déterminer une base et préciser sa dimension.

- $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$
- $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$
- $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = 0_{3,1}\}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
- $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = X\}$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$
- $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b & b \\ 0 & a-b & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Exercice II.8 – (Rang d’une famille de vecteurs)

Calculer le rang des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ ci-dessous.

- $A = ((1, 2, -4, 3), (2, 5, -3, 4), (6, 17, -7, 10), (1, 3, -3, 2))$.
- $B = ((1, 2, 6, -1), (3, 6, 5, -6), (2, 4, -1, -2))$.

Exercice II.9 – (Base d’une intersection de sous-espaces vectoriels)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y + z = 0\}$.

Déterminer une base de $F \cap G$.

Exercice II.10 – (EV de fonctions polynomiales)

Notons $E = \{P \in \mathbb{R}_2[x] / \forall x \in \mathbb{R}, P(x) - xP'(x) = 0\}$.

Justifier que E est un espace vectoriel et en déterminer une base ainsi que la dimension.

Exercice II.11 – (Recherche de bases)

- On considère les quatre fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$ par :

$P_0(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ $P_2(x) = x(x-1)(x-3)$
 $P_1(x) = x(x-2)(x-3)$ $P_3(x) = x(x-1)(x-2)$.

Démontrer que la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

- On considère les cinq fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$f_1(x) = \ln(x)$ $f_3(x) = e^x$ $f_5(x) = \frac{1}{x}$
 $f_2(x) = x$ $f_4(x) = e^{x+3}$

On suppose que ces fonctions appartiennent à un espace vectoriel E de dimension 6 telle que $E \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$.

- La famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ est-elle une famille libre de E ?
- Déterminer une base de $\text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$.

- On note E l’ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

On note a et b les éléments de E tels que : $a_0 = 1, a_1 = 0$ et $b_0 = 0, b_1 = 1$. Enfin, on note $r = (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $s = (3^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 2 dont (r, s) est une base.
- Montrer que (a, b) est une base de E .

Exercice II.12 – (Coordonnées dans une base)

- Dans $\mathbb{R}^4$, on note $a = (1, 2, 3, 4), b = (0, 1, 1, 1), c = (1, 1, 0, 2), d = (1, 1, 2, 0)$.

- Vérifier que $\mathcal{B} = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
- On pose $x = (1, 1, 1, 1)$. Déterminer les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.

- Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right)$.

- Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Donner les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.
- Donner les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- On pose $\mathcal{F} = ((X-1)(X+1), (X+1)(X-2), (X-1)(X-2))$.

- Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[x]$.
- En déduire que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
- Donner les coordonnées de X dans cette base.

Exercice II.13 – (Cas d’égalité de deux sous-espaces vectoriels à partir des dimensions)

Dans $\mathbb{R}^3$, on note $a = (1, 1, 3), b = (1, 0, 2), c = (2, 1, 5), d = (3, 2, 8)$, ainsi que $E_1 = \text{Vect}(a, b)$ et $E_2 = \text{Vect}(c, d)$.

- Déterminer $\dim(E_1)$ et $\dim(E_2)$.
- Vérifier que $(c, d) \in (E_1)^2$.
- En déduire que $E_1 = E_2$.

Exercice II.14 – (Base d’un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$)

À tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par :

$M(a, b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$.

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$ i.e. $E = \{M(a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

On note I la matrice identité $M(1, 0)$ et A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de E ainsi que sa dimension.

II. POUR S'ENTRAÎNER

Exercice II.15 – (Bases particulières de $\mathbb{R}_n[x]$)

1. Soit $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de polynômes tels que $\deg(P_i) = i, \forall i \in \mathbb{N}$.
Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, (P_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$. On note, $\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, P_i = (X - a\mathbb{1})^i(X - b\mathbb{1})^{n-i}$.

Montrer que la famille $(P_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, \dots, a_n$ $n + 1$ réels distincts deux à deux.

Pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on appelle i -ème polynôme d'interpolation (ou interpolateur) de Lagrange associé aux réels $a_0, \dots, a_n$ le polynôme

$$L_i = \prod_{\substack{j \in \llbracket 0; n \rrbracket \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

- a. Donner le degré de L_i pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
- b. Montrer que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, L_i(a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases} = \delta_{i,k} \text{ (Symbole de Kronecker).}$$

- c. Montrer que la famille $(L_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

- d. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x], P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i$.

Exercice II.16 – (Matrices symétriques et antisymétriques)

Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ ainsi que les ensembles :

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tM = M\}$: l'ensemble des matrices carrées de taille n symétriques
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tM = -M\}$: l'ensemble des matrices carrées de taille n antisymétriques

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en donner une base de chaque ainsi que la dimension.
2. Montrer que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists!(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) / M = S + A.$$

Exercice II.17 – (Base d'un sous-espace vectoriel particulier de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$)

$$\text{Soit } \mathcal{E} = \left\{ M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \sum_{i=1}^3 m_{i,i} = 0 \right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de $\mathcal{E}$ ainsi que sa dimension.

Exercice II.18 – ((*) Centre d'une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour toute partie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle commutant de $\mathcal{E}$ la partie $C(\mathcal{E})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée des matrices qui commutent avec toute matrice de $\mathcal{E}$, i.e. $C(\mathcal{E}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \forall M \in \mathcal{E}, AM = MA\}$.

1. Vérifier que, pour toute partie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), C(\mathcal{E})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Démontrer $C(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}I_n$ où $\mathbb{R}I_n = \{aI_n, a \in \mathbb{R}\}$.

On pourra utiliser les matrices élémentaires $E_{i,j}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice II.19

$$\text{Soient } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / JMJ = M\}.$$

Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

III. CONCOURS

Exercice II.20 – (Classique !)

$$\text{On considère la matrice } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $(A - 2I_3)^2$ puis en déduire que $(A - 2I_3)^3 = 0$.
2. Montrer que l'ensemble $E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = 2X\}$ est un espace vectoriel. En déterminer une base et la dimension.
3. Posons $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - a. Vérifier que $AV \in \text{Vect}(U, V)$.
 - b. Résoudre l'équation $AX = 2X + V$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\text{c. Posons } W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Montrer que la famille } (U, V, W) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

$$\text{4. Considérons } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} .
- b. Déterminer la matrice T de sorte que $A = PTP^{-1}$ et vérifier que $T = 2b_3 + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$.
 - a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.

b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{C} \iff NQ = QN.$$

c. Démontrer que $\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / NQ = QN\} = \text{Vect} (I_3, N, N^2)$.

d. Déterminer alors une base de $\mathcal{C}$ ainsi que sa dimension.

6. On considère l'ensemble $\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / M^2 + I_3 = A\}$.

a. L'ensemble $\mathcal{R}$ est-il un espace vectoriel ?

b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{R} \iff Q^2 = I_3 + N.$$

c. Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que si $Q^2 = I_3 + N$, alors nécessairement, Q et N commutent.

d. En déduire, à l'aide de la question 5.c., les matrices $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Q^2 = I_3 + N$.

e. Conclure en déterminant l'ensemble $\mathcal{R}$.